

Formules de CRAMER

(formules donnant les solutions d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues)

On considère un système linéaire de deux équations à deux inconnues de la forme :

$$(I) \begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c' \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, a', b', c' \text{ sont des nombres fixés.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On suppose que $\det A \neq 0$ c'est-à-dire $ab' - a'b \neq 0$.

$$(I) \Leftrightarrow AX = B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b'c - bc' \\ ac' - a'c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\det A} (b'c - bc') \\ y = \frac{1}{\det A} (ac' - a'c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases} \quad \text{Formules de Cramer à mémoriser}$$

avec

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad (\text{on remplace la colonne des coefficients de l'inconnue } x \text{ par la colonne des constantes})$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad (\text{on remplace la colonne des coefficients de l'inconnue } y \text{ par la colonne des constantes})$$

Avec ces formules, on peut aisément programmer sur calculatrice la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.