TS

# Généralités sur les lois de probabilité à densité sur un intervalle [*a* ; *b*]

# Plan du chapitre :





## I. Fonction de densité de probabilité sur un intervalle [*a* ; *b*]

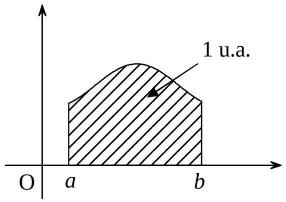
### 1°) Définition (rappel)

On appelle **densité de probabilité** sur un intervalle [*a* ; *b*] ($a < b$) une fonction *f* vérifiant les trois conditions $C_1$, $C_2$, $C_3$ :

$C_1$ : *f* est définie et continue sur [*a* ; *b*]

$C_2$ : *f* est positive ou nulle sur [*a* ; *b*]

$C_3$ : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$




Une densité de probabilité est aussi appelée **fonction de densité de probabilité** ou **fonction de densité**.

### 2°) Exemple : loi de probabilité uniforme sur [0 ; 1]

La loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] admet pour densité de probabilité la fonction

$$f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 1$$

D'autres exemples (qui montreront en outre l'utilisation que l'on peut en faire) seront donnés en exercices et dans les chapitres suivants (l'un des buts de la suite du cours est d'étudier certaines lois de probabilité continues très importantes en probabilités).

### 3°) Commentaires

- Dans l'enseignement supérieur, on autorisera éventuellement à ce qu'une fonction de densité de probabilité soit discontinue en un nombre fini de réels de son intervalle de définition.
- Cette année, la fonction de densité sera toujours donnée en exercices, ainsi que l'intervalle fermé borné sur lequel elle est définie.

- On retiendra qu'une densité de probabilité est une fonction vérifiant les 3 conditions de continuité, positivité et d'intégrale égale à 1.

### 4°) Représentation graphique d'une fonction de densité

On peut visualiser une densité de probabilité sur l'écran de la calculatrice ; c'est une fonction comme une autre si ce n'est qu'elle possède des propriétés particulières (les 3 conditions de la définition d'une densité de probabilité).

## II. Probabilité d'un intervalle

### 1°) Définition

$f$ est une fonction de densité sur un intervalle $[a\,;b]$.

On définit la probabilité de tout intervalle $[\alpha\,;\beta]\subset[a\,;b]$, en posant $P([\alpha\,;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x$.

Une loi à densité est appelée **loi continue**.

### 2°) Interprétation géométrique

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan $P$ muni d'un repère orthogonal.

- $P([\alpha\,;\beta])$ est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$.

- Plus généralement, si J est un intervalle quelconque inclus dans $[a\,;b]$, la probabilité de J est l'aire du domaine $D=\{\mathrm{M}(x\,;y)\in P\,/\,x\in \mathrm{J} \text{ et } 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$.

### 3°) Propriétés

- $P(\{\alpha\})=\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x=0$ (la probabilité d'un singleton est nulle)

- $P(]\alpha\,;\beta])=P([\alpha\,;\beta])$

## III. Lois de probabilité à densité et variables aléatoires

### 1°) Cadre continu

On s'intéresse dans le reste du cours à une variable aléatoire définie sur un univers probabilisé $(\Omega, P)$ pouvant prendre toutes les valeurs d'un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.

Une telle situation a été vue dans le chapitre précédent avec l'étude de la loi uniforme sur $[0\,;1]$ (choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$). Cette situation était nouvelle car jusqu'alors, on avait seulement considéré des variables aléatoires réelles prenant un nombre fini de valeurs (variables aléatoires discrètes).



### 2°) Définition

$f$ est une densité de probabilité sur un intervalle $[a\,;b]$.

On dit qu'une variable aléatoire X admet $f$ pour densité de probabilité pour exprimer que sa loi de probabilité admet $f$ pour densité de probabilité.
Dans ce cas, on dit que la variable est **continue**.

### 3°) Propriété fondamentale

Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ appartenant à $[a\,;b]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$, on a $P(\alpha\leqslant \mathrm{X}\leqslant\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x$.

### 4°) Autres propriétés

- Pour tout réel $\alpha$ appartenant à $[a\,;b]$, on a $P(\mathrm{X}=\alpha)=0$.

- Pour tout réel $\alpha$ appartenant à $[a\,;b]$, $P(\mathrm{X}>\alpha)=1-P(\mathrm{X}\leqslant\alpha)$.

- Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ appartenant à $[a\,;b]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$, $P(\alpha<\mathrm{X}<\beta)=P(\mathrm{X}<\beta)-P(\mathrm{X}\leqslant\alpha)$.

- Pour une loi continue, dans les calculs de probabilité, on peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement. Par exemple, $P(\mathrm{X}>\alpha)=P(\mathrm{X}\geqslant\alpha)$.

Remarque à propos de la formule $P(\mathrm{X}>\alpha)=1-P(\mathrm{X}\leqslant\alpha)$ :

Cette formule ne sert pas nécessairement dans la pratique (elle a plus une importance théorique que pratique).

### 5°) Applications concrètes

Les variables aléatoires à densité permettent de modéliser des phénomènes de la vie courante tels que temps d'attente à arrêt un bus, durée de vie d'un appareil, poids à la naissance, taux de glycémie (voir exercices du chapitre et suite du cours).

## IV. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire à densité

### 1°) Définitions

*f* est une densité de probabilité sur un intervalle [*a* ; *b*].
X est une variable aléatoire admettant *f* pour densité de probabilité.

- L'**espérance mathématique** de X est donnée par la formule $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_a^b x\times f(x)\ \mathrm{d}x$.
- La **variance** de X est donnée par la formule $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\int_a^b \left[x-\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2\times f(x)\ \mathrm{d}x$.
- L'**écart-type** de X est donné par la formule $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}$.

### 2°) Commentaires

Ces formules donnant l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable continue sont à rapprocher de celles d'une variable aléatoire discrète ( $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{i=n} x_i\times P(\mathrm{X}=x_i)$ etc.).

En particulier, comme pour une variable aléatoire discrète, il est important de retenir qu'une espréance est une moyenne.
Il est donc intéressant de noter que la définition précédente de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire à densité constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète (les sommes étant remplacées par des intégrales).

On observera que les propriétés suivantes sont identiques à celles données pour les variables aléatoires discrètes.

Il faut bien noter qu'en pratique le résultat de l'espérance et de la variance de X dépendent de la fonction *f*.
Pour l'espérance, le résultat peut être positif ou négatif alors que le résultat de la variance est toujours positif ou nul par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le « bon sens ») comme mentionné dans la propriété suivante.

### 3°) Propriété de positivité de la variance

$$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X})\geqslant 0}$$

### 4°) Formule de Kœnig-Huygens

$$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X})=\left(\int_a^b x^2\times f(x)\ \mathrm{d}x\right)-\left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2}$$

La démonstration est facile. On part de la définition en développant à l'intérieur de l'intégale.



Les parenthèses ne servent à priori à rien ; elles ne sont là que pour rendre plus claire la formule en isolant l'intégrale.

Comme dans le cas discret, on peut aussi écrire cette formule sous la forme : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2$.

### 5°) Interprétation

L'interprétation est la même que pour des variables aléatoires discrètes.
On admettra que si on choisit *n* nombres réels dans l'intervalle [*a* ; *b*] selon la loi d'une variable aléatoire continue X, leur moyenne (respectivement leur écart-type) est d'autant plus proche de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ (respectivement $\sigma(\mathrm{X})$) que *n* est grand.
Comme pour les variables aléatoires discrètes, l'écart-type est associé à la notion de risque.
Cela sera précisé dans le chapitre sur la loi normale qui sera vue ultérieurement.

### 6°) Unités

- $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$ sont dans la même unité que la variable aléatoire X.
- $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ a la même unité mais au carré.

Cette remarque est particulièrement importante dans les cas concrets de variables aléatoires (voir exercices).

## V. Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

### 1°) Définition

On reprend la même définition que celle donnée en 1ère lors de l'étude des variables aléatoires définies sur un univers fini.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω avec une probabilité *P*.

On appelle **fonction de répartition** de X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x)=P(\mathrm{X}\leqslant x)$.

### 2°) Propriété

Soit X une variable aléatoire qui admet pour densité une fonction *f* définie sur un intervalle $[a\,;b]$ ( $a<b$ ).

$\forall x\in\left]-\infty\,;a\right[\qquad \mathrm{F}(x)=0$

$\forall x\in[a\,;b]\qquad \mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

$\forall x\in\left]b\,;+\infty\right[\qquad \mathrm{F}(x)=1$

La démonstration est évidente.

### 3°) Propriétés de la fonction de répartition (quasiment immédiates)

- $F(a)=0$ et $F(b)=1$.
- F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est dérivable sur $]a\,;b[$ et $\forall x \in ]a\,;b[\quad F'(x)=f(x)$.

### 4°) Probabilité d'un intervalle à l'aide de la fonction de répartition

Pour tout couple $(\alpha\,;\beta)$ de réels tels que $\alpha<\beta$, on a $\boldsymbol{P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)=F(\beta)-F(\alpha)}$.

**Démonstration :**

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)=P(X \leqslant \beta)-P(X<\alpha)=P(X \leqslant \beta)-P(X \leqslant \alpha)=F(\beta)-F(\alpha)$$

**La vraie propriété générale est $P(\alpha < X \leqslant \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.**

### 5°) Utilisation de la fonction de répartition

- L'utilisation d'une fonction de répartition est la même que celle des lors de l'étude des variables aléatoires définies sur un univers fini. Dans le chapitre sur la loi binomiale, on a appris à utiliser la fonction de répartition de la loi binomiale en lien avec la calculatrice.

- Les fonctions de répartition vont surtout nous servir lorsque nous étudierons les lois de probabilités à densités particulières (loi exponentielle et loi normale) toujours en lien avec la calculatrice.

### 6°) Appellation anglaise

En anglais, la fonction de répartition d'une variable aléatoire est appelée « cumulative distribution function », en abrégé « cdf ».

La fonction de densité d'une variable aléatoire est appelée « probability distribution function » ou « probability density distribution », en abrégé « pdf ».

Ces appellations sont utilisées sur les calculatrices en anglais.

Il n'est pas possible de faire apparaître la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.



## VI. Commentaires sur le chapitre

### 1°) Dans les exercices

Pour les probabilités à densité, la fonction de densité sera toujours donnée dans l'énoncé ainsi que l'intervalle sur lequel elle est définie.

### 2°) Chapitres à venir

On va étudier des lois à densité particulières c'est-à-dire pour des fonctions *f* particulières.
Pour chacune d'elles, on verra leurs propriétés et leurs applications.
Par exemple, dans le chapitre suivant consacré à la loi uniforme sur un intervalle $[a\,;b]$, nous allons étudier le cas particulier d'une fonction de densité constante.