TS spé

Puissances de matrices carrées

Le 14-2-2022

Astuce des π et des e sur calculatrice pour vérifier des résultats

Plan du chapitre :

● Dans ce chapitre, nous travaillons avec des matrices carrées et nous nous intéressons aux puissances d'exposant entier naturel.

● Nous mentionnerons quelques résultats à connaître.

● Nous évoquerons également à plusieurs reprises le cas de l'exposant – 1 qui correspond à l'inverse.

I. Généralités

1°) Définition [puissances d'une matrice carrée d'exposants entiers naturels]

A est une matrice carrée d'ordre *n* (*n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 1).

On définit :

$\mathrm{A}^1 = \mathrm{A}$

$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} \times \mathrm{A}$

$\vdots$

$\mathrm{A}^p = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{p \text{ facteurs}}$ (p entier naturel avec $p \geqslant 2$)

Par convention, on pose $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$ (matrice identité d'ordre *n*).

On notera l'analogie avec la convention $a^0 = 1$ pour tout réel *a* non nul.

Le 1, élément neutre de la multiplication dans l'ensemble des réels, est ici remplacé par la matrice identité d'ordre *n*, élément neutre pour la multiplication dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre *n*.

2°) Exemple

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3 = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} \quad (\text{ou : } \mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2 \times \mathrm{A})$$

3°) Mise en garde

De manière générale, pour déterminer la puissance d'une matrice carrée à un exposant entier naturel, on n'élève pas tous les coefficients de la matrice à cet exposant !

4°) Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés que pour les puissances des nombres.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

• A est une matrice carrée quelconque d'ordre n.
Pour tout couple $(p\,;q)$ d'entiers naturels, on a $A^p \times A^q = A^q \times A^p = A^{p+q}$.

• A est une matrice carrée quelconque d'ordre n.
Pour tout couple $(p\,;q)$ d'entiers naturels, on a $\left(A^p\right)^q = A^{pq}$.

• A et B sont deux matrices carrées d'ordre n qui commutent pour le produit (c'est-à-dire $AB = BA$).
Pour tout entier naturel p, on a $(A \times B)^p = A^p \times B^p$.

• A est une matrice carrée quelconque d'ordre n et λ est un réel.
Pour tout entier naturel p, on a $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p$.

• A est une matrice carrée d'ordre n qui est inversible.
Pour tout entier naturel p, la matrice A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$.

Quelques commentaires :

On retiendra du premier point que n'importe quelle puissance de A commute avec n'importe quelle puissance de A.
La condition $AB = BA$ est essentielle pour pouvoir écrire $(A \times B)^p = A^p \times B^p$.
Si cette condition n'est pas vérifiée, l'égalité est fausse.
Par exemple, si A et B ne commutent pas, on ne peut pas écrire $(A \times B)^2 = A^2 \times B^2$.
On pourra juste écrire $(AB)^2 = ABAB$.

5°) Formule du binôme de Newton (admise sans démonstration)

A et B sont deux matrices carrées d'ordre n qui commutent pour le produit (c'est-à-dire $AB = BA$).

On a $\forall m \in \mathbb{N} \quad (A+B)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ ou

$$(A+B)^m = \binom{m}{0} A^0 B^m + \binom{m}{1} A^1 B^{m-1} + \binom{m}{2} A^2 B^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m} A^m B^0.$$

La condition $AB = BA$ est essentielle pour pouvoir appliquer la formule du binôme de Newton pour des matrices.

$\binom{m}{k}$ désigne le coefficient binomial « combinaison de k éléments pris parmi m ».

L'expression générale est $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k! \times (m-k)!}$.

Cas particuliers de coefficients binomiaux :

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \times (m-0)!} = \frac{m!}{1 \times m!} = 1$$
$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \times (m-1)!} = \frac{m!}{1 \times (m-1)!} = m$$
$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2! \times (m-2)!} = \frac{m!}{2 \times (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}$$

Ce sont des valeurs à connaître.

Exemple :

Dans le cas où A et B commutent, on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Dans le cas général où A et B ne commutent pas forcément, on a :
$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Cas particulier très important d'application de la formule du binôme de Newton :

On prend $B = I_n$ (matrice identité d'ordre n).
La matrice identité commute (pour le produit) avec n'importe quelle matrice A (on sait que $AI_n = I_nA = A$).

On peut donc appliquer la formule précédente.

$$(A+I_n)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} A^k I_n^{m-k} = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} A^k \times I_n = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} A^k$$

On utilise la propriété du II. 4°) : « La matrice identité à n'importe quelle puissance est égale à la matrice identité ».
Qu'est-ce qu'une matrice scalaire ?
C'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux ou un nombre x la matrice identité.

On retiendra donc la formule suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (A+I_n)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} A^k$$

Autre cas particulier très important d'application de la formule du binôme de Newton :

On considère deux matrices A et B carrées d'ordre n telles que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}=0_n$ (matrice nulle d'ordre n).

On a $\forall m\in\mathbb{N}\quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^m=\mathrm{A}^m+\mathrm{B}^m$.

On peut généraliser à plusieurs matrices.

Par exemple, si A, B, C sont trois matrices carrées d'ordre n telles que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}=0_n$, $\mathrm{BC}=\mathrm{CB}=0_n$, $\mathrm{CA}=\mathrm{AC}=0_n$, alors $\forall m\in\mathbb{N}\quad (\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})^m=\mathrm{A}^m+\mathrm{B}^m+\mathrm{C}^m$.

6°) Identité importante

A est une matrice carrée d'ordre n.

Pour tout entier naturel p, on a $(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})(\mathrm{I}_n+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+...+\mathrm{A}^p)=\mathrm{I}_n-\mathrm{A}^{p+1}$.

Il s'agit de l'analogue de la formule $(1-z)(1+z+z^2+...+z^p)=1-z^{p+1}$ pour z nombre complexe quelconque.

La démonstration est identique. On développe le membre de gauche en utilisant que I_n est élément neutre pour le produit à droite et à gauche.

$(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})(\mathrm{I}_n+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+...+\mathrm{A}^p)=\mathrm{I}_n+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+...+\mathrm{A}^p-\mathrm{A}-\mathrm{A}^2-...-\mathrm{A}^p-\mathrm{A}^{p+1}$

En simplifiant, on obtient $(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})(\mathrm{I}_n+\mathrm{A}+\mathrm{A}^2+...+\mathrm{A}^p)=\mathrm{I}_n-\mathrm{A}^{p+1}$.

II. Puissances d'une matrice diagonale

1°) Propriété

D est une matrice diagonale de taille n.
On note λ_1, λ_2 … λ_n ses coefficients diagonaux (dans l'ordre de gauche à droite).

Pour tout entier naturel p, D^p est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ${\lambda_1}^p$, ${\lambda_2}^p$, … ${\lambda_n}^p$ (dans l'ordre de gauche à droite).

$$\forall p\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}^p=\begin{pmatrix}{\lambda_1}^p & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & {\lambda_2}^p & 0 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & {\lambda_n}^p\end{pmatrix}$$

Voir paragraphe **V. Compléments sur les puissances de matrices diagonales**

2°) Exemples

① $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$

$\mathrm{D}^2=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 49\end{pmatrix}$

② $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$\mathrm{D}^4=\begin{pmatrix}2^4 & 0 & 0\\ 0 & 3^4 & 0\\ 0 & 0 & (-1)^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3°) Démonstration

On effectue une démonstration par récurrence sur p.

On se place dans le cas où $n=2$. On pose donc $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

On va démontrer que la phrase « $\mathrm{D}^p=\begin{pmatrix}a^p & 0\\ 0 & b^p\end{pmatrix}$ » est vraie pour tout entier naturel p.

• Pour $p=1$

$\mathrm{D}^1=\mathrm{D}=\begin{pmatrix}a^1 & 0\\ 0 & b^1\end{pmatrix}$

• On suppose que la phrase est vraie pour un entier naturel p fixé.
On démontre qu'elle est alors vraie pour l'entier $p+1$.

$\mathrm{D}^{p+1}=\mathrm{D}^p\times\mathrm{D}=\begin{pmatrix}a^p & 0\\ 0 & b^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{p+1} & 0\\ 0 & b^{p+1}\end{pmatrix}$

Conclusion :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{D}^p = \begin{pmatrix} a^p & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$$

On peut aussi utiliser la propriété du produit de matrices diagonale donnée le paragraphe **V**.

4°) Cas particulier de la matrice identité

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad {\mathrm{I}_n}^p = \mathrm{I}_n}$$

La matrice identité à n'importe quelle puissance est égale à la matrice identité.

Cette propriété a été utilisée dans le cas particulier du binôme de Newton.

III. Une propriété de calcul importante

1°) Propriété

A et P sont deux matrices carrées d'ordre n.
On suppose que P est inversible.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right)^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}$$

2°) Démonstration (à savoir par cœur)

On pose $\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

On veut démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}$.

• 1ère méthode :

$$\mathrm{M}^k = \underbrace{\mathrm{M} \times \mathrm{M} \times \ldots \times \mathrm{M}}_{k \text{ facteurs}}$$

$$\mathrm{M}^k = \underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \times \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \times \ldots \times \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}}_{k \text{ facteurs}}$$

Attention à l'ordre des facteurs : la multiplication des matrices n'est pas commutative.
On ne peut changer de place les matrices dans le produit.

$$\mathrm{M}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\underbrace{\mathrm{P} \times \mathrm{P}^{-1}}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{A}\underbrace{\mathrm{P} \times \mathrm{P}^{-1}}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{A}\underbrace{\mathrm{P} \times \ldots}_{\mathrm{I}_n}\ldots\underbrace{\ldots \times \mathrm{P}^{-1}}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{AP} \quad (\text{car on a : } \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}_n)$$

$$\mathrm{M}^k = \mathrm{P}^{-1}\underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{k \text{ facteurs}}\mathrm{P}$$

$$\mathrm{M}^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^k\mathrm{P}$$

• 2e méthode : par récurrence

3°) Petite variante (démonstration similaire)

A et P sont deux matrices carrées d'ordre n.
On suppose que P est inversible.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left(\mathrm{PAP}^{-1}\right)^k = \mathrm{PA}^k\mathrm{P}^{-1}$$

IV. Méthodes de calcul des puissances d'une matrice

1°) Il y a différents moyens de calculer les puissances d'une matrice carrée :

- « à la main »

- propriétés

- récurrence

- calculatrice ou logiciel de calcul formel

2°) Puissances de matrices sur calculatrice TI

• Pour rentrer la matrice :

[matrice]

Edit $\boxed{\text{entrer}}$

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{mode}}$ (quitter)

$\boxed{\text{matrice}}$ $\boxed{\text{entrer}}$

• Pour calculer la puissance :

On utilise la touche d'exposant $\boxed{\wedge}$.

$[\mathrm{A}]^{\square} \leftarrow$ rentrer l'exposant

Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

• Cas particulier de l'inverse

Lorsque la matrice est inversible, on calcule son inverse en utilisant l'exposant – 1 ou directement la touche d'inverse $\boxed{x^{-1}}$.

3°) Logiciels de calcul formel

Certains logiciels de calcul formel permettant d'obtenir l'expression de A^n en fonction de n (par exemple, le site « dcode »).

Calculer la puissance d'une matrice NumPy

4°) Calcul de la puissance d'une matrice avec Python

Cet article présentera comment calculer la puissance d'une matrice dans Numpy.
Calculer la puissance d'une matrice Numpy avec la fonction numpy.linalg.matrix_power()

La fonction matrix_power() à l'intérieur de la bibliothèque numpy.linalg est utilisée pour calculer la puissance de la matrice. Il prend la matrice et l'exposant comme paramètres d'entrée et renvoie le résultat de l'opération dans une autre matrice. Voir l'exemple de code suivant.

```
import numpy as np
matrix = np.array([[1, 2], [4, 5]])
power = np.linalg.matrix_power(matrix, 3)
print(power)
```

Production :

```
[[ 57  78]
 [156 213]]
```

Nous avons d'abord créé la matrice sous forme de tableau NumPy 2D avec la fonction `np.array()` dans le code ci-dessus. Nous avons ensuite calculé le cube de la matrice avec la fonction `matrix_power()` et stocké le résultat à l'intérieur de la matrice power. Au final, nous avons affiché le contenu de la matrice `power`.
Gardez à l'esprit que cette méthode ne fonctionne qu'avec des matrices carrées et donne une erreur si nous l'essayons sur une matrice rectangulaire.

Programme Python permettant d'obtenir les puissances d'une matrice

Exemple :

On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

On va créer la fonction `puissance(n)` qui prend pour argument un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui renvoie en sortie A^n.

On utilisera un calcul itératif de A^n.

```
from numpy import array

A=np.array([[1, 2],[3, 4]])

def puissance(n):
    B=A
    for k in range(1,n):
        B=dot(B,A)
    return B
```

```
from numpy import matrix

A=matrix([[1, 2],[3, 4]])

def puissance(n):
    B=A
    for k in range(1,n):
        B=B*A
    return B
```

Programme issu d'un DM

```
from numpy import matrix,dot

A=matrix([[1, 2],[3, 4]])

def seuil(M):
    k=1
    B=A
    while B.sum()<M:
          B=A*B
          k+=1
    return k
```

On utilise la bibliothèque numpy.

• On peut utiliser matrix (uniquement s'il s'agit de matrices carrées d'ordre 2) ou array (valable quelles que soient les dimensions de la matrice).

• Avec matrix, le produit de deux matrices s'obtient avec l'opérateur `*`.
On écrit l'instruction `C=A*B` ou `C=B*A`.

Avec `array`, le produit de deux matrices s'obtient avec la fonction `dot`.
On écrit donc l'instruction `C=dot(A,B)` ou `C=dot(B,A)`.

V. Compléments sur les puissances de matrices diagonales

1°) Propriété 1 [somme et produit de matrices diagonales]

D est une matrice diagonale de taille *n* dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre, λ_1, λ_2 … λ_n.
D' est une matrice diagonale de taille *n* dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre, λ'_1, λ'_2 … λ'_n.
Alors :
$D+D'$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1+\lambda'_1$, $\lambda_2+\lambda'_2$, … $\lambda_n+\lambda'_n$.
DD' est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1\lambda'_1$, $\lambda_2\lambda'_2$, … $\lambda_n\lambda'_n$.

La démonstration est immédiate.

Cette propriété se généralise à plusieurs matrices diagonales de même taille.

Conséquence : puissances d'une matrice diagonale (propriété donnée dans **II. 1°)**).

2°) Propriété 2 [inverse d'une matrice diagonale]

D est une matrice diagonale de taille *n* dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre, λ_1, λ_2 … λ_n.

D est inversible si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Dans ce cas, D^{-1} est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre, $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$ … $\frac{1}{\lambda_n}$.

Démonstration :

VI. Suites de matrices colonnes ou lignes

Le 21 mars 2023

Suites de matrices

Redonner définition suite périodique et stationnaire.

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toutes de même format) est stationnaire **à partir de l'indice n_0** pour exprimer que : $\forall n \geqslant n_0 \quad U_n = U_{n+1}$.

On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toutes de même format) est **périodique** lorsqu'il existe un entier naturel $p \neq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+p} = U_n$.
• Le plus petit entier naturel *p* qui vérifie la propriété est appelé **la période** de la suite.

• Une suite périodique de période 1 est une suite constante.

• Pour les matrices, on peut parler de suite périodique, de suite stationnaire mais pas de suite monotone.

1°) Notations

m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

On considère une matrice A carrée d'ordre *m* et une matrice X_0 unicolonne à *m* lignes.

On s'intéresse à la suite (X_n) de matrices unicolonnes à *m* lignes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

2°) Exemple

On prend $m = 2$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices unicolonnes à 2 lignes définie par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

On peut calculer les premiers termes.

$X_1 = AX_0$ $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$	$X_2 = AX_1$ $= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 27 \\ 38 \end{pmatrix}$	$X_3 = AX_2$ $= \ldots$

On peut aussi utiliser la commande $\boxed{\text{rép}}$ de la calculatrice (modèles TI), comme pour une suite numérique réelle.

On commence par rentrer les matrices A et X_0 (A aura pour nom [A] et X_0 aura pour nom [B]).

On effectue ensuite les calculs.
On sait que X_1 est donnée par $X_1 = AX_0$. On tape $[A]*[B]$.

On sait que X_2 est donnée par $X_2 = AX_1$. On effectue donc le calcul de la manière suivante : $[A]*\text{Rép}$ (on utilise la commande « rép » pour introduire X_1).

On sait que X_3 est donnée par $X_3 = AX_2$.
On effectue donc le calcul de la manière suivante $[A]*\text{Rép}$ (on utilise la commande « rép » pour introduire X_2).

On obtient les termes de la suite les uns après les autres.

3°) Expression du terme général

On s'intéresse à la suite (X_n) de matrices unicolonnes à *m* lignes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$.

On cherche à exprimer X_n en fonction de *n*.

$$X_1 = AX_0$$
$$X_2 = AX_1 = A(AX_0) = A^2X_0$$
$$X_3 = AX_2 = A(A^2X_0) = A^3X_0$$

On démontre aisément par récurrence le résultat fondamental : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^nX_0}$.

Remarques :

• Il s'agit d'une formule analogue à la formule explicite d'une suite géométrique réelle (ou complexe).

• Cette formule permet le calcul de n'importe quel terme de la suite. On peut par exemple s'en servir avec la calculatrice.

• Lorsque l'on connaît l'expression de A^n en fonction de *n*, on peut déterminer l'expression de X_n en fonction de *n*.

Autres formules à connaître :

Comme pour les suites géométriques réelles, il est important de connaître les relations suivantes :

$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad X_n = A^{n-m}X_m}$.

Lorsque l'on prend $m=1$, la relation précédente donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = A^{n-1}X_1}$.

4°) Adaptation au cas d'une suite de matrices lignes

Soit A un matrice carrée d'ordre *m* (c'est-à-dire à *m* lignes et *m* colonnes).

On considère la suite (Y_n) de matrices lignes à *m* colonnes définie sur $\mathbb{N}$ par :

• son premier terme Y_0 qui est une matrice ligne à *m* colonnes ;

• la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = Y_nA$.

On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = Y_0A^n}$ (expression du terme général).

Il est important de connaître la relation suivante :
$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad Y_n = Y_mA^{n-m}}$.

Lorsque l'on prend $m=1$, la relation précédente donne : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n = Y_1A^{n-1}}$.

5°) Propriété [condition nécessaire et suffisante pour obtenir une suite constante]

On reprend les notations du 3°).

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$ (relation qui lie 2 états successifs).

La suite (X_n) est constante si et seulement si X_0 vérifie $AX_0 = X_0$.

Il s'agit d'une propriété analogue à celle étudiée pour les suites numériques réelles.

Démonstration :

• On suppose que la suite (X_n) est constante.
On sait que alors que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = X_n$. On aura en particulier $X_1 = X_0$ donc $AX_0 = X_0$.

• Réciproquement, on suppose que X_0 est un état stable.
On démontre alors aisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = X_0$ et donc que la suite (X_n) est constante.

Cette notion sera reprise dans le chapitre sur les processus d'évolution et les graphes pondérés avec la notion d'état stable ou stationnaire.

6°) Exercice-type

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer X_0 telle que la suite (X_n) soit constante.

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où *x* et *y* sont des réels.

On sait par la propriété précédente que la suite (X_n) est constante si et seulement si $AX_0 = X_0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = x \\ 4x - y = y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 4x = 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 2x$ (on obtient deux fois la même équation)

La suite (X_n) est constante si et seulement si X_0 est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

VII. Application à l'étude de suites numériques

1°) Notations

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ où *a*, *b*, *c*, *d* sont des réels donnés.

On dit que les relations de récurrence définissent des suites couplées.

En pratique, les valeurs numériques des coefficients *a*, *b*, *c*, *d* sont données dans les exercices.

2°) Exemple

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $u_0 = -2$ et $v_0 = 3$ ainsi que par les relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n - v_n$.

On peut calculer les premiers termes « à la main » ou grâce à la calculatrice.

On rentre la suite (u_n) : $n\mathrm{Min} = 0$, $\mathrm{u}(n) = \mathrm{u}(n-1) + \mathrm{v}(n-1)$, $\mathrm{u}(n\mathrm{Min}) = -2$.

On rentre la suite (v_n) : $\mathrm{v}(n) = \mathrm{u}(n-1) - \mathrm{v}(n-1)$, $\mathrm{v}(n\mathrm{Min}) = 3$.

n	$u(n)$	$v(n)$
0	– 2	3
1	1	– 5
2	– 4	6
3	2	10

3°) Commentaires

● La situation présentée dans ce paragraphe se généralise à 3 suites, 4 suites etc. vérifiant le même type de relation de récurrence.

● Ce type de suites intervient fréquemment dans des problèmes concrets de dynamique de population comme nous le verrons en exercices. Il s'agit d'une modélisation discrète de phénomènes d'évolution.

4°) Retour au cas général : suite de matrices colonnes associée

Le système d'égalités $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ peut s'écrire matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ (1).

Pour tout entier naturel *n*, nous allons noter X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Nous allons également noter A désigne la matrice carrée d'ordre 2 définie par $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ainsi d'après l'égalité (1), $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

> On se ramène à l'étude d'une suite de matrices colonnes (X_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$
>
> et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

Commentaire : Plutôt que d'étudier deux suites, on se ramène à l'étude d'une seule suite de matrices colonnes.

On peut alors dire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

Autrement dit $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Commentaire : Lorsque l'on connaît l'expression de A^n en fonction de *n*, on peut déterminer l'expression de X_n en fonction de *n* et par conséquent aussi les expressions de u_n et de v_n en fonction de *n*.

5°) Reprise de l'exemple

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ v_0 = 3 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

On a en particulier $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

On pose également $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

D'après le paragraphe précédent, on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.

L'expression de A^n en fonction de n n'est pas très simple (on peut par exemple utiliser le site dcode). Nous nous arrêterons donc là.

6°) Retour au cas général : suite de matrices lignes associée

On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ($\mathrm{B} =$ transposée de A).

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{Y}_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ ($\mathrm{Y}_n =$ transposée de X_n).

La suite (Y_n) est une suite de matrices lignes.

On vérifie immédiatement que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{Y}_n \mathrm{B}}$ (relation de récurrence).
On a alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_0 \mathrm{B}^n}$ (expression du terme général).

Il est intéressant de connaître les résultats suivants déjà, donnés dans le paragraphe **VI**.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_1 \mathrm{B}^{n-1}}$

et plus généralement :

$\boxed{\text{pour tout couple } (n\,;m) \text{ d'entiers naturels tels que } n \geqslant m \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_m \mathrm{B}^{n-m}.}$.

VIII. Convergence des puissances d'une matrice carrée

On étend aux matrices la notion de suite convergente.

Définition

On dit qu'une suite de matrices $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (toutes de même format) est convergente vers une matrice L si toutes les suites formées par les coefficients des U_n convergent vers les coefficients de L correspondants.

La matrice L est la limite de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple :

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n^2+1} \\ 3 - \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}$.

On définit ainsi une suite (U_n) de format 2 × 1 (matrices unicolonnes).

Les suites $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)$ et $\left(3 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ étant convergentes respectivement vers 0 et 3, on dit que la suite de matrices (U_n) est convergente vers $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La matrice L est la limite de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On peut écrire $\mathrm{U}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{L}$.

1°) Introduction

Soit A une matrice carrée d'ordre 2.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Il n'y a pas de formule pour calculer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de n.

On dit que la suite (A^n) converge pour exprimer que les suites réelles (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) convergent.

Si on note α, β, γ, δ leurs limites respectives, alors la matrice $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est appelée la limite de la suite (A^n).

2°) Définition [convergence et limite]

Soit A une matrice carrée d'ordre m (où m est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
On dit que la suite (A^n) converge pour exprimer que chaque coefficient de la matrice A^n converge.

Dans ce cas, la matrice L dont les coefficients sont les limites de ceux de A^n est appelée la limite de la suite (A^n).

On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{A}^n = \mathrm{L}$ ou encore $\mathrm{A}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{L}$.

3°) Exemple

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme A est une matrice diagonale, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Les autres coefficients de A^n sont constants donc convergent.

On en déduit que $\mathrm{A}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4°) Rappel

Soit q un réel.
On rappelle ci-dessous la règle concernant le comportement de la suite $\left(q^n\right)$ lorsque n tend vers + ∞ suivant les valeurs de q.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers + ∞.

Il n'y a pas de résultat général analogue pour la suite des puissances d'une matrice carrée.

5°) Propriété (découle des propriétés des limites de suites réelles pour la somme et le produit)

On reprend les notations du **2°)**.
On suppose que la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge et on note sa limite L.

- Soit B une matrice rectangulaire à m lignes.
La suite $\left(\mathrm{A}^n\mathrm{B}\right)$ converge vers LB.

- Soit C une matrice rectangulaire à m colonnes.
La suite $\left(\mathrm{C}\mathrm{A}^n\right)$ converge vers CL.

6°) Conséquence

Avec les notations du **2°)**, lorsque la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge, alors sa limite L vérifie $\mathrm{AL} = \mathrm{LA} = \mathrm{L}$.

7°) Application à la convergence d'une suite de matrices colonnes

On reprend les notations du **VI**.

m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

On considère une matrice A carrée d'ordre m et une matrice X_0 unicolonne à m lignes.

On s'intéresse à la suite $\left(\mathrm{X}_n\right)$ de matrices unicolonnes à m lignes définie sur ℕ par son premier terme X_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

● Propriété 1 :

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.
Par passage à la limite, on obtient le résultat suivant.

Si la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge vers une matrice L, alors la suite $\left(\mathrm{X}_n\right)$ converge la matrice $\mathrm{S} = \mathrm{LX}_0$.

● Propriété 2 :

Par définition de la suite, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.
Par passage à la limite, on obtient le résultat suivant.

Si la suite $\left(\mathrm{X}_n\right)$ converge, alors sa limite S vérifie $\mathrm{AS} = \mathrm{S}$.

8°) Méthodes de conjecture de la limite ; outil de conjecture

- Pour une matrice carrée A donnée, on peut conjecturer la convergence et la limite éventuelle de la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ en calculant les puissances de A pour de grands exposants.

- Lorsque la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ converge, on peut trouver sa limite en utilisant un logiciel de calcul formel (par exemple XCas).

IX. Modélisation discrète de dynamique de populations

Il s'agit d'une étude de phénomènes chronologiques.
L'évolution démographique est un enjeu important pour les politiques publiques. Être capable d'anticiper l'évolution de la population ou son vieillissement permet d'orienter les décisions publiques.

1°) Cas d'une seule population

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

Cas d'équilibre

Cas linéaire ; suite arithmético-géométrique

Un modèle particulier : Verhulst discret

2°) Suites couplées cas d'équilibre

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = f\left(u_n, v_n\right) \\ v_{n+1} = g\left(u_n, v_n\right) \end{cases}$ où f et g sont des fonctions de deux variables (fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

Conditions initiales ; cas d'équilibre

2 cas particuliers importants seront étudiés en exercices :

- modèle proie-prédateur linéaire discret – matrice proie-prédateur

- modèle de Lotka-Volterra discret

● Malthus (1766-1864)

Il suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population (modèle non réaliste).
$f\left(t\right) = ke^{at}$ (modèle continu) ou bien $u_n = C\alpha^n$ (modèle discret).

● Verhulst (1804-1849)

Il précise le modèle de Malthus : la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population et aussi à la capacité d'accueil encore disponible pour cette population.
$f\left(t\right) = \dfrac{1}{1 + be^{-at}}$ (modèle continu) ou $u_{n+1} = u_n + au_n\left(1 - \dfrac{u_n}{k}\right)$ (modèle discret).

● Volterra (1860-1940)

Modèle proie-prédateur

Version continue :

$\mathrm{A}\left(t\right)$: nombre de proies à l'instant t
$\mathrm{B}\left(t\right)$: nombre de prédateurs à l'instant t

L'évolution d'une espèce influe sur l'évolution de l'autre.

Modélisation :

On prend en compte les paramètres suivants :
Pour les proies
a : taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs
b : taux de mortalité des proies due aux prédateurs

Pour les prédateurs
d : taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies
c : taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées

$$\begin{cases} \mathrm{A}'\left(t\right) = a\mathrm{A}\left(t\right) - b\mathrm{B}\left(t\right) \times \mathrm{A}\left(t\right) = \mathrm{A}\left(t\right)\left(a - b\mathrm{B}\left(t\right)\right) \\ \mathrm{B}'\left(t\right) = -d\mathrm{B}\left(t\right) + c\mathrm{A}\left(t\right) \times \mathrm{B}\left(t\right) = \mathrm{B}\left(t\right)\left(c\mathrm{A}\left(t\right) - d\right) \end{cases}$$

Version discrète :

Système $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_n y_n \\ y_{n+1} = cy_n - dx_n y_n \end{cases}$ (modèle discret)

X. Quelques résultats sur les puissances de matrices particulières

1°) Matrices nilpotentes

Définition : [matrice nilpotente]

Soit A une matrice carrée.
On dit que A est nilpotente pour exprimer qu'il existe un entier naturel p tel que A^p soit la matrice nulle.

On appelle matrice nilpotente une matrice carrée dont l'une des puissances est la matrice nulle.

Étymologie : nil de nihil = rien en latin

Exemple :

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente puisque $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Plus généralement on a la propriété suivante (admise ici sans démonstration) :

Tout matrice carrée triangulaire dont tous les coefficients de la diagonale sont nuls est nilpotente.

Propriété :

Dans ce cas, pour tout entier naturel $n \geqslant p$, A^n est aussi égale à la matrice nulle.

La suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ est stationnaire à partir de l'exposant p.

2°) Matrices idempotentes

Définition : [matrice idempotente]

Soit A une matrice carrée.
On dit que A est idempotente pour exprimer $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

Étymologie : idem = même, pareil en latin

Propriété :

Soit A une matrice carrée idempotente.
Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, $\mathrm{A}^p = \mathrm{A}$.

La démonstration se fait facilement par récurrence.

3°) Matrices carrées dont une puissance est égale à la matrice identité

Propriété :

Soit A une matrice carrée.
S'il existe un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^p = \mathrm{I}$ où I est la matrice identité de même ordre que A, alors la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ est périodique de période *p*.

Propriété : (démonstration très facile)

Soit A une matrice carrée.
On suppose qu'il existe un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^p = \mathrm{I}$ où I est la matrice identité de même ordre que A.
La matrice A est inversible et l'inverse de A est $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{p-1}$.

Démonstration :

On a $\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{p-1} = \mathrm{A}^{p-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}$.

4°) Matrices carrées dont une puissance est égale à elle-même

Propriété :

Soit A une matrice carrée.

S'il existe un entier naturel $p \geqslant 1$, $\mathrm{A}^p = \mathrm{A}$, alors la suite $\left(\mathrm{A}^n\right)$ est périodique de période *p* à partir de l'exposant 1.

Si on a $\mathrm{A}^p = \mathrm{A}$, on n'a pas le droit d'écrire $\mathrm{A}^{p-1} = \mathrm{I}$ (on est dans les matrices). Ça ne serait valable que si est A est inversible.

5°) Matrices carrées dont le carré est proportionnel à la matrice

Propriété :

Soit A une matrice carrée.

On suppose qu'il existe un réel *q* tel que $\mathrm{A}^2 = q\mathrm{A}$.
Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n = q^{n-1}\mathrm{A}$.

Utilisation :

Voir exercices

XI. Matrices stochastiques

1°) Définitions

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre *n* est **stochastique en colonnes** lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :
- ses coefficients sont des réels positifs ou nuls ;
- la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1.

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre *n* est **stochastique en lignes** lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :
- ses coefficients sont des réels positifs ou nuls ;
- la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

On a l'équivalence suivante qui est évidente : A stochastique en colonnes $\Leftrightarrow$ ${}^t\mathrm{A}$ stochastique en lignes.

Le mot stochastique se réfère aux probabilités.
Nous verrons que les matrices stochastiques seront utilisées pour étudier des processus probabilistes (processus de Markov).

Dans la suite, nous développerons plutôt les résultats pour des matrices stochastiques en colonnes sachant qu'ils s'adaptent sans difficulté pour des matrices stochastiques en lignes.

On dit qu'une matrice X unicolonne à *n* lignes est **stochastique** lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :
- ses coefficients sont des réels positifs ou nuls ;
- la somme des coefficients est égale à 1.

On dit qu'une matrice Y uniligne à n colonnes est **stochastique** lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :
- ses coefficients sont des réels positifs ou nuls ;
- la somme des coefficients est égale à 1.

2°) Exemples

• Exemple 1 :

La matrice $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,7\\ 0,8 & 0,3\end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 stochastique en colonnes.

• Exemple 2 :

La matrice identité d'ordre n est une matrice stochastique en lignes et en colonnes.

3°) Propriété pour le produit et les puissances

Lemme :

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On pose $U=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ vecteur ligne à n colonnes dont les coefficients sont égaux à 1.
- Si A est stochastique en colonnes, alors $UA=U$.
- Si tous les coefficients de A sont positifs ou nuls et $UA=U$, alors A est stochastique en colonnes.

Démonstration :

On note $a_{i,j}$ les coefficients de A.

$$UA=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{k=n}a_{i,1} & \sum\limits_{k=1}^{k=n}a_{i,2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{k=n}a_{i,n}\end{pmatrix}$$

Propriété :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n.
Si A et B sont stochastiques en colonnes, alors AB est stochastique en colonnes.

On dira que le produit de deux matrices stochastiques en colonnes de même ordre est stochastique en colonnes.
Même résultat pour les matrices stochastiques en lignes.

Démonstration

On reprend le vecteur U du lemme précédent. On sait que $UA=UB=U$ d'après la première partie du lemme.

On peut donc écrire $UAB=UB=U$.

De plus, les coefficients de A et de B sont positifs ou nuls, donc les coefficients de AB sont aussi positifs ou nuls (rappelons que le coefficient de AB situé sur la ligne i et dans la colonne j est donné par $\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(a_{i,k}\times b_{k,j}\right)$).

La deuxième partie du lemme permet d'affirmer que la matrice AB est stochastique en colonnes.

Conséquence :

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
Si A est stochastique en colonnes, alors pour tout entier naturel p, A^p est stochastique en colonnes.

Les puissances entières d'une matrice stochastique en colonnes sont stochastiques en colonnes.

4°) Limite des puissances d'une matrice stochastique en colonnes

• Propriété [limite éventuelle des puissances d'une matrice stochastique en colonnes]

Soit A une matrice carrée d'ordre n stochastique en colonnes.

Si la suite de matrices $\left(A^n\right)$ converge vers une limite L, alors L est stochastique en colonnes.

La démonstration repose sur deux arguments :

Tous les coefficients de L sont positifs ou nuls (évident car la limite d'une suite à termes positifs ou nuls est positive ou nulle).
$\forall p\in\mathbb{N}\quad UA^p=U$ donc, par passage à la limite, $UL=U$.

• Théorème fondamental (admis sans démonstration) [condition suffisante de convergence des puissances d'une matrice stochastique en colonnes]

Soit A une matrice carrée d'ordre n stochastique en colonnes.

- Si aucun coefficient de A n'est nul, alors la suite de matrices $\left(A^p\right)$ converge vers une limite L.
- De plus, L est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1\\ \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n & \alpha_n & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$ où α_1, α_2, …, α_n sont des réels positifs ou nuls dont la somme est égale à 1.

Le résultat reste valable si A est une matrice stochastique admettant une puissance dont tous les coefficients sont non nuls.

La démonstration peut se faire assez facilement pour $n=2$ avec les outils de terminale.
En revanche, il n'est pas possible de la faire pour n quelconque car elle nécessite des outils qui sont étudiés en post-bac.

Ce théorème sera utilisé dans le chapitre sur les processus d'évolution.

Nous vérifierons dans les exercices que pour une matrice stochastique en colonnes A, la limite de la suite $\left(\mathrm{A}^{p}\right)$ est bien une matrice L stochastique en colonnes de la forme donnée dans l'énoncé.

XII. Puissances des matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des coefficients de chaque ligne ou chaque colonne est égale à 1

1°) Matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels de somme non nulle.

On cherche à déterminer A^{n} pour n entier naturel quelconque.

On peut écrire $\mathrm{A}=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}+\dfrac{1-a-b}{a+b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -a & b\end{pmatrix}$ (simple vérification par le calcul).

On pose $\mathrm{B}=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}$ et $\mathrm{C}=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -a & b\end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{A}=\mathrm{B}+(1-a-b)\mathrm{C}$.

On vérifie facilement par le calcul que $\mathrm{B}^{2}=\mathrm{B}$, $\mathrm{C}^{2}=\mathrm{C}$ et $\mathrm{BC}=\mathrm{CB}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'après le cas particulier de la formule du binôme de Newton, pour tout entier naturel n, on a donc $\mathrm{A}^{n}=\mathrm{B}^{n}+\left[(1-a-b)\mathrm{C}\right]^{n}$ soit $\mathrm{A}^{n}=\mathrm{B}^{n}+(1-a-b)^{n}\mathrm{C}^{n}$.

Comme les matrices B et C sont idempotentes, $\forall n\in\mathbb{N}^{*}\quad \mathrm{B}^{n}=\mathrm{B}$ et $\mathrm{C}^{n}=\mathrm{C}$.

On a donc $\forall n\in\mathbb{N}^{*}\quad \mathrm{A}^{n}=\mathrm{B}+(1-a-b)^{n}\mathrm{C}$.

On constate que cette égalité est encore valable pour $n=0$ puisque $\mathrm{B}+\mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}_2=\mathrm{A}^{0}$.

On a donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^{n}=\mathrm{B}+(1-a-b)^{n}\mathrm{C}$ ce qui donne la formule écrite dans le cadre ci-dessous :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}1-a & b\\ a & 1-b\end{pmatrix}^{n}=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & b\\ a & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^{n}}{a+b}\begin{pmatrix}a & -b\\ -a & b\end{pmatrix}}$$

On peut aussi démontrer ce résultat par récurrence.

Ce résultat n'est pas à savoir par cœur. Il sera utilisé dans le chapitre sur les « Graphes probabilistes ».

2°) Matrices carrées d'ordre 2 dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1

a et b sont deux réels de somme non nulle.

Par transposition des résultats donnés au 1°), on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}^{n}=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^{n}}{a+b}\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}}$$

3°) Utilisation

Ces résultats seront utilisés pour les puissances des matrices stochastiques en lignes ou en colonnes dans le chapitre sur les graphes probabilistes.