Exemples de calculs de primitives

1. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3x+4}}$

On pose *u* (*x*) = « truc » sous racine

On pose *u* (*x*) = 3*x* + 4

u ' (*x*) = 3

Phase de réécriture

$$f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{3x+4}}$$

$$f = \frac{2}{3} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

formule de primitive

$$F = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{u}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3x+4}$$

$$F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3x+4}$$

2. $f(x) = (x+1)\left(x^2+2x-3\right)^2$

On pose $u(x) = x^2 + 2x - 3$

$u'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$

Réécriture

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2(x+1) \times \left(x^2+2x-3\right)^2$$

$$f = \frac{1}{2} \times u' \times u^2$$

c[te] **d'« équilibrage »**

formule de primitive

$$F = \frac{1}{2} \times \frac{u^3}{3}$$

replacer devant la primitive intact

$$F = \frac{u^3}{6}$$

On repasse « en chiffres ».

$$F(x) = \frac{\left(x^2+2x-3\right)^3}{6}$$

Autres exemples :

$$f(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$u(x) = e^x + 1$

$u'(x) = e^x$

$$\boxed{\frac{u'}{u^n}}$$

$$f(x)=\frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^3}$$

$$f=\frac{u'}{u^3}$$

$$\frac{u'}{u^n} \rightarrow - \frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$$

$$F=-\frac{1}{2u^2}$$

$$F(x)=-\frac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{1-4x^3}{\left(x^4-x+1\right)^2}$$

$u(x) = x^4 - x + 1$

$u'(x) = 4x^3 - 1$

$$\boxed{\frac{u'}{u^n}}$$

$$f(x) = -\frac{4x^3-1}{\left(x^4-x+1\right)^2}$$

$$f = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\frac{u'}{u^n} \rightarrow -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$$

$$\frac{u'}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{u}$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x^4-x+1}$$

$$\boldsymbol{f(x)=e^{-x}\left(e^{-x}+1\right)^5}$$

$$u(x) = e^{-x}+1$$

$$u'(x) = - e^{-x}$$

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

$$\left(e^{ax}\right)' = ae^{ax}$$

$$\boxed{u' \times u^n}$$

$$f(x) = -u'(x)\left[u(x)\right]^5$$

$$f = -\ u'u^5$$

$$u'u^n \ \rightarrow \ \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\mathrm{F} = -\frac{u^6}{6}$$

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{\left(e^{-x}+1\right)^6}{6}$$

$$f(x) = 3\cos x \times \sin^8 x$$

$$f(x) = 3\cos x \times (\sin x)^8$$

$u(x) = \sin x$

$u'(x) = \cos x$

$$\boxed{u' \times u^n}$$

$$f = 3u' \times u^8$$

$$u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\mathrm{F} = 3 \times \frac{u^9}{9} = \frac{u^9}{3}$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{(\sin x)^9}{3} = \frac{\sin^9 x}{3}$$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos(ax+b) \longrightarrow \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

$$\sin(ax+b) \longrightarrow -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Autre façon :

$$u(x) = 3x + \frac{\pi}{4}$$

$$u'(x) = 3$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \times 3 \times \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f = \frac{2}{3} \times u' \times \cos u$$

$$\mathrm{F} = \frac{2}{3}\sin u$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Autres exemples

$f(x)=(2x+1)(x^2+x+3)$

$g(x)=4x(x^2+5)^3$

$h(x)=(3x+5)^7$

$j(x)=\dfrac{3}{(2x+1)^2}$

1°) $f(x)=(2x+1)(x^2+x+3)$

On pense à la formule du type *u u*'.

On pose $u(x) = x^2+x+3$

$u'(x) = 2x + 1$

On fait une réécriture de *f* par rapport à *u* et *u*'.

$$f(x)=\underbrace{(2x+1)}_{u'(x)}\underbrace{(x^2+x+3)}_{u(x)}$$

Sans *x*, $f = u\,u'$.

Ont lit dans le tableau des primitives « la » primitive d'une fonction du type *u u*'.

$$\mathrm{F}=\frac{u^2}{2}+k$$

On revient avec les *x* pour écrire F (*x*).

$$\mathrm{F}(x)=\frac{(x^2+x+3)^2}{2}+k$$

2°) $g(x)=4x(x^2+5)^3$

On pense à la formule du type $u'u^3$ (ou plutôt $u'u^n$ avec $n = 3$)

On pose $u(x) = x^2+5$

$u'(x) = 2x$

On fait une réécriture de *g* par rapport à *u*' et u^3.

$g(x)=4x\left(x^2+5\right)^3$

$g(x)=2\times\underbrace{2x}_{u'(x)}\times\underbrace{\left(x^2+5\right)^3}_{u(x)}$

$g=$ **2** $u'u^3$ (entourer le 2)

$\mathrm{G}(x)=2\times\dfrac{\left(x^2+5\right)^4}{4}+k$ (on entoure le 2 et le 4 pour pouvoir les simplifier)

$\mathrm{G}(x)=\dfrac{\left(x^2+5\right)^4}{2}+k$

3°) $h(x)=(3x+5)^7$

On pense à la formule du type $u'u^n$ (avec n = 7)

On pose $u(x) = 3x + 5$

$u'(x) = 3$

On fait la réécriture de h par rapport à u et u'.

$h(x)=\underbrace{\dfrac{1}{3}}\times3\times(3x+5)^7$ (entourer le 3 en rouge)

constante de rééquilibrage
ou de réajustement
obligatoire pour trouver une primitive

$h=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{u'\times u^7}$

k

$\mathrm{H}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^8}{8}+k$

$\mathrm{H}=\dfrac{u^8}{24}+k$

$\mathrm{H}(x) = \dfrac{(3x+5)^8}{24} + k$

4°) $j(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}$

On pense à la formule du type $\dfrac{u'}{u^2}$.

On pose $u(x) = 2x + 1$

$u'(x) = 2$

On fait la réécriture de j par rapport à u et u'.

$\dfrac{u'}{u^2} = \dfrac{2}{(2x+1)^2}$

$$j(x) = \mathbf{\frac{3}{2}} \times \underbrace{\frac{2}{(2x+1)^2}}_{\text{écrit d'office}} \qquad \text{(entourer le } \frac{3}{2}\text{)}$$

constante de rééquilibrage

(puisque $\frac{3}{2} \times 2 = 3$)

Dernier exemple

$f(x) = 3(2x-2)(x^2-2x+7)^4$

On pose $u(x) = x^2 - 2x + 7$

$u'(x) = 2x - 2$

$f = 3 \times u' \times u^4$

$\mathrm{F} = 3 \times \dfrac{u^5}{5}$

$\mathrm{F} = \dfrac{3u^5}{5}$

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{3(x^2-2x+7)^5}{5}$