TS spé

Résolution matricielle d'un système linéaire

But du chapitre : utiliser les matrices pour résoudre des systèmes linéaires de deux inconnues à deux inconnues ou de trois équations à trois inconnues.

On notera que tous les résultats du chapitre sont donnés pour des systèmes linéaires à coefficients réels mais restent valables pour des systèmes à coefficients complexes.

I. Écriture matricielle d'un système linéaire

1°) Propriété

On considère un système linéaire de deux équations à deux inconnues de la forme :

$\boxed{(\mathrm{S})\begin{cases} a\ x+b\ y=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}}$ où a, b, c, a', b', c' sont des nombres fixés.

On pose :

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ (matrice carrée d'ordre 2 des coefficients du premier membre)

$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ (matrice-colonne des coefficients du second membre)

$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (matrice-colonne des inconnues)

Le système (S) s'écrit matriciellement sous la forme $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$.

2°) Démonstration

$$\mathrm{AX}=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ a'x+b'y \end{pmatrix}$$

Donc (S) est équivalent à $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$.

Même propriété pour les systèmes linéaires de 3 équations à 3 inconnues.

Retenir :

$$\begin{cases} a\ x+b\ y=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \text{ est équivalent à } \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathrm{X}}=\underbrace{\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}}_{\mathrm{B}}$$

II. Exemple de résolution matricielle

On considère le système (S) $\begin{cases} 4x+7y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$.

Système linéaire d'ordre 2 (résolution habituelle : déterminant, combinaison ou substitution).

Écriture matricielle du système (S)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le système (S) s'écrit sous la forme $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$.

Inverse de A

$\det \mathrm{A}=4\times 2-1\times 7=1$

$\det \mathrm{A}\neq 0$ donc A est inversible.

Dans ce cas, on peut écrire $\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2).

Résolution du système à l'aide des matrices

On part de $\mathrm{AX}=\mathrm{B}$.

On multiplie les deux membres par la matrice A^{-1} **à gauche**.

$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{AX})=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

N.B. : on est obligé de préciser multiplication à gauche car $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\neq\mathrm{BA}^{-1}$. Attention à bien respecter l'ordre pour les produits de matrices.

$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

$\mathrm{I}_2\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

I_2 est élément neutre pour la multiplication de matrices c'est-à-dire $\mathrm{I}_2\times\mathrm{X}=\mathrm{X}\times\mathrm{I}_2=\mathrm{X}$.

$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

On passe en numérique.

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} 6-35 \\ -3+20 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix} -29 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Or $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = -29 \\ y = 17 \end{cases}$

La solution du système est le couple (– 29 ; 17).
(Vérification facultative).

La même méthode s'applique pour tous les systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues.
Dans les exercices, on doit toujours détailler la méthode de résolution.
Pour appliquer cette méthode, il faut que la matrice des coefficients du premier membre soit inversible.

La résolution de systèmes d'équations à deux inconnues à l'aide de matrices n'est pas très intéressante car la méthode de substitution est plus rapide, les matrices deviennent utiles lorsque l'on a plus que deux inconnues.
Dans le cas d'un système linéaire, on a soit une, soit une infinité, soit aucune solution. On étudiera les deux derniers cas dans le supérieur.

III. Application à la résolution de systèmes grâce à la calculatrice

Dans l'application de résolution de résolution de système de la calculatrice, pour un système de plus de 3 équations, le système et présenté sous forme de matrices.

IV. Complément

Propriété importante :

Soit L_1 et L_2 deux équations.

Soit α, β, γ, δ quatre réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha L_1 + \beta L_2 \\ \gamma L_1 + \delta L_2 \end{cases}$$

Cette propriété permet de résoudre des systèmes non linéaires.