TS spé **Exercices sur la résolution matricielle de systèmes linéaires**

1 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 7 & -5\end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse.

2°) On considère le système $\begin{cases}6x-4y=7\\ 7x-5y=8\end{cases}$.

Écrire matriciellement ce système.

En utilisant la matrice A^{-1}, chercher la solution de ce système.

2 Reprendre la démarche précédente pour résoudre le système $\begin{cases}6x+5y=7\\ -x-y=3\end{cases}$.

Écrire matriciellement ce système.

En utilisant la matrice A^{-1}, chercher la solution de ce système.

3 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 3 & -1 & -1\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

1°) Vérifier que A admet pour inverse la matrice $C=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 9 & -4\\ 2 & 26 & -16\\ 1 & -7 & 4\end{pmatrix}$.

2°) En déduire la résolution matricielle du système $\begin{cases}x+y+5z=0\\ 3x-y-z=-4\\ 5x-2y-z=-7\end{cases}$.

4 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 7\\ 3 & -1 & 3\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

1°) Vérifier que A admet pour inverse la matrice $C=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}-10 & 23 & -1\\ -9 & 18 & -9\\ 7 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

2°) En déduire la résolution matricielle du système $\begin{cases}4x-2y+7z=20\\ 3x-\ \ y+3z=10\\ 2x-3y-\ \ z=3\end{cases}$.

5 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 11\end{pmatrix}$.

1°) Démontrer que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse.

2°) En déduire le couple solution du système $\begin{cases}3x+5y=-3\\ 7x+11y=13\end{cases}$.

6 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

1°) À l'aide de la calculatrice, donner A^{-1}. Écrire les coefficients sous forme fractionnaire.

2°) En déduire les solutions du système $\begin{cases}x+2y+z=4\\ 2x+3y+4z=2\\ 3x+4y+z=-8\end{cases}$.

7 Résoudre le système suivant en utilisant la calculatrice et une matrice dont on déterminera l'inverse :

$\begin{cases}x+2y+3z=1\\ 2x+3y+z=2\\ 3x+y+2z=3\end{cases}$.

Réponses

1 1°) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2,5 & -2\\ 3,5 & -3\end{pmatrix}$ (on applique la formule d'inversion d'une matrice carrée d'ordre 2)

2°) La solution du système est le couple (1,5 ; 0,5).

2 La solution du système est le couple $(22\,;-25)$.

3 1°) On effectue le produit AB afin de vérifier qu'il est égal I_3. Il n'y a pas de formule pour l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3.
2°) La solution est du système (I) est le triplet (– 1 ; 1 ; 0).

4 1°) On vérifie que $AC=CA=I_3$. 2°) La solution du système (I) est le triplet (1 ; – 1 ; 2).

5 1°) $A^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}11 & -5\\ -7 & 3\end{pmatrix}$ 2°) La solution du système est le couple (49 ; – 30).

6 1°) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6}\\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

2°) La solution du système est le triplet $\left(-\dfrac{44}{3}\,;\dfrac{26}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right)$.

7 On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-5 & 1 & 7\\ 1 & 7 & -5\\ 7 & -5 & 1\end{pmatrix}$$

La solution du système est le triplet (1 ; 0 ; 0).

Solutions détaillées

1 $A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 7 & -5\end{pmatrix}$

1°) **Démontrons que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse.**

$\det A=6\times(-5)-(-4)\times 7=-2$

$\det A\neq 0$ donc A est inversible.

Dans ce cas, on peut écrire $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,5 & -2\\ 3,5 & -3\end{pmatrix}$ (formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2)

2°) **(I)** $\begin{cases}\boldsymbol{6x-4y=7}\\ \boldsymbol{7x-5y=8}\end{cases}$

Écrivons matriciellement ce système.

On pose $B=\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

(I) s'écrit $AX=B$.

Cherchons la solution de ce système.

(I) $\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}2,5 & -2\\ 3,5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}17,5-16\\ 24,5-24\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1,5\\ 0,5\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1,5\\ y=0,5\end{cases}$

La solution du système est le couple (1,5 ; 0,5).

Autre rédaction possible :

Soit S l'ensemble des solutions de (I).

$S=\{(1,5\,;0,5)\}$

$\boxed{2}$

(I) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ -x-y=3 \end{cases}$

On pose $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(I) s'écrit $AX=B$.

A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ (formule de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2)

(I) $\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 22 \\ -25 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=22 \\ y=-25 \end{cases}$

La solution du système est le couple (22 ; – 25).

$\boxed{3}$ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1°) **Vérifions que A admet pour inverse la matrice** $\mathbf{C}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 2 & 26 & -16 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

$AC=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\times\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 2 & 26 & -16 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 2 & 26 & -16 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=I_3$

On en déduit que C est l'inverse de la matrice A.

2°) **Déduisons-en la résolution matricielle du système (I)** $\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y-z=-4 \\ 5x-2y-z=-7 \end{cases}$.

On pose $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(I) s'écrit $AX=B$.

(I) $\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=CB$

$\Leftrightarrow X=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 2 & 26 & -16 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

La solution du système (I) est le triplet (– 1 ; 1 ; 0).

$\boxed{4}$ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1°) **Vérifions que A admet pour inverse la matrice** $\mathbf{C}=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -10 & 23 & -1 \\ -9 & 18 & -9 \\ 7 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

$AC=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}\times\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -10 & 23 & -1 \\ -9 & 18 & -9 \\ 7 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

$=I_3$

On en déduit que C est l'inverse de la matrice A.

Il n'est pas nécessaire de calculer CA.

2°) **Déduisons-en la résolution matricielle du système (I)** $\begin{cases} 4x-2y+7z=20 \\ 3x-\ \ y+3z=10 \\ 2x-3y-\ z=3 \end{cases}$.

On pose $B=\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(I) s'écrit $AX=B$.

(I) $\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=CB$

$\Leftrightarrow X=\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -10 & 23 & -1 \\ -9 & 18 & -9 \\ 7 & -8 & -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$

La solution du système (I) est le triplet (1 ; – 1 ; 2).

$\boxed{5}$ $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$

1°) **Démontrons que la matrice A est inversible et déterminer sa matrice inverse.**

$\det A=3\times11-5\times7=-2$

$\det A\neq0$ donc A est inversible.

$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

2°) **Déduisons-en le couple solution du système (I)** $\begin{cases} 3x+5y=-3 \\ 7x+11y=13 \end{cases}$.

On pose $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(I) s'écrit $AX=B$.

(I) $\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -98 \\ 60 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 49 \\ -30 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=49 \\ y=-30 \end{cases}$

La solution du système est le couple (49 ; – 30).

$\boxed{6}$ $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

1°) Donnons A^{-1}.

À l'aide de la calculatrice, on voit que A est inversible et que son inverse est $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

2°) **Déduisons-en les solutions du système (I)** $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+z=-8 \end{cases}$.

On pose $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(I) s'écrit $AX=B$.

(I) $\Leftrightarrow$ $X = A^{-1}B$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{44}{3} \\ \frac{26}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{44}{3} \\ y = \frac{26}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

La solution du système (I) est le triplet $\left(-\frac{44}{3} ; \frac{26}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

$\boxed{7}$ **Résolvons matriciellement le système (I) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$.**

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

À l'aide de la calculatrice, on voit que A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) $\Leftrightarrow$ $X = A^{-1}B$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (produit effectué « à la main », plutôt qu'à la calculatrice*)

La solution du système est le triplet (1 ; 0 ; 0).

Vérification immédiate

*À la calculatrice, on obtient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \times 10^{-14} \\ 0 \end{pmatrix}$.