Exercices sur les fractions rationnelles

1 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X^4}{(X^2-4)(X+2)}$.

2 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{1}{X^4-X}$.

3 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$.

4 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{16X-32}{(X^2+2X-3)(X^2-3X+2)}$.

5 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

$F(X)=\dfrac{X^3}{X^2+X-2}$; $G(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2-1)}$; $H(X)=\dfrac{30X^2}{(X^2+X-2)(X^2+1)}$;

$K(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2+1)^2}$.

6 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^4-1)}$.

Simplifier d'abord puis donner la décomposition en éléments simples formelle de la fraction.
Calculer enfin les coefficients.

7 Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F(X)=\dfrac{1}{X^4-1}$.

8 1°) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$F(X)=\dfrac{X+2}{X^2(X+1)}$.

2°) En déduire les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2(x+1)}$.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-8}{2x^2+2x-4}$ et on note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Déterminer l'(les) asymptote(s) en $+\infty$ et en $-\infty$ de **C**.

10 Soit P un polynôme à coefficients complexes admettant n racines simples z_1, z_2 …, z_n dans $\mathbb{C}$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).

1°) Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{P}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

2°) En considérant la partie entière de $\dfrac{X}{P}$, démontrer que l'on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\widetilde{P}'(z_i)}=0$.

11 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X^n(1-X)^n}$ $\quad(n\in\mathbb{N}^*)$.

12 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X^3+1}$.

Faire la vérification.

13 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et a une racine simple de P.

Démontrer que la partie polaire relative à a dans la décomposition de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P^2}$ en éléments simples est égale à $\dfrac{1}{\left[\widetilde{P}'(a)\right]^2(X-a)^2}-\dfrac{\widetilde{P}''(a)}{\left[\widetilde{P}'(a)\right]^3(X-a)}$.

14 Soit P un polynôme non constant à coefficients réels scindé à racines simples.

1°) Décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$.

2°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $P''(x)P(x)\leqslant\left[P'(x)\right]^2$.

15 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F=\dfrac{2X^3}{X^2+6X+9}$.

16 1°) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X(X+1)}$.

2°) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $G=\dfrac{1}{X^3(X^3+1)}$.

17 1°) Effectuer la division euclidienne de X^5+1 par X^2-X+1 puis la division euclidienne de X^3+X^2-1 par X^2-X+1. Utiliser ces résultats pour déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $A=\dfrac{X^5+1}{(X^2-X+1)^3}$.

2°) Utiliser la même méthode pour déterminer la décompositions en éléments simples de la fraction rationnelle $B=\dfrac{X^4-1}{(X^2+X+1)^3}$.

18 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F=\dfrac{1}{X^2+X+1}$.

$\boxed{19}$ Exprimer en fonction de n les sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Soit F une fraction rationnelle dont les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de même degré. Que vaut la partie entière de F ?

$\boxed{2}$ Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.

$\boxed{3}$ Soit F une fraction rationnelle.
Compléter la phrase :
« Si les polynômes du numérateur et du dénominateur sont de même degré, alors la partie entière de F est égale à … »

$\boxed{3}$ Définition de la partie entière d'une fraction rationnelle.

$\boxed{4}$ Définition du corps des fractions d'un anneau.
Cas particulier de K[X] où K est un corps commutatif.

$\boxed{5}$ Existence et unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ par sa partie polaire et sa partie polynomiale.

$\boxed{6}$ Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle qui n'admet qu'un seul pôle de multiplicité m.

$\boxed{7}$ **Supertildation**

On veut « piquer » en un pôle.
Soit a un pôle de multiplicité m de F.

$$\tilde{\tilde{F}}(a) = \widetilde{(X-a)^m F}(a)$$

$$F = \frac{A}{(X-a)^m B}$$

$$\tilde{\tilde{F}}(a) = \frac{\tilde{A}(a)}{\tilde{B}(a)}$$

$\boxed{5}$ Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que P est scindé. On note α_1, α_2, … α_r ses racines dans $\mathbb{C}$.

On peut alors écrire $P = \lambda (X-\alpha_1)^{m_1} \ldots (X-\alpha_r)^{m_r}$ où λ est un nombre complexe et m_1, m_2, …, m_r des entiers naturels.

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ est donnée par : $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X-\alpha_k}$.

Corrigé

$\boxed{1}$ $F(X)=\dfrac{X^4}{(X^2-4)(X+2)}$

$$F(X)=X-2+\frac{1}{X-2}-\frac{4}{(X+2)^2}+\frac{7}{X+2}$$

$\boxed{2}$ $F(X)=\dfrac{1}{X^4-X}$

$$F(X)=-\frac{1}{X}+\frac{1}{3(X-1)}+\frac{2X+1}{3(X^2+X+1)}$$

Détail de la démarche : $F(X)=\dfrac{1}{X(X-1)(X^2+X+1)}$

$$F(X)=\frac{A}{X}+\frac{B}{X-1}+\frac{CX+D}{X^2+X+1}$$

$$\frac{1}{X(X-1)}=\left(\frac{A}{X}+\frac{B}{X-1}\right)(X^2+X+1)+CX+D$$

On remplace X par $j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ puis on fait une identification. C'est un peu « limite » mais c'est juste quand même. On trouve ainsi les valeurs de C et D.

Finalement, on obtient : $F(X)=\dfrac{2X+1}{3(X^2+X+1)}-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{3(X-1)}$.

$\boxed{3}$ $F(X)=\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+1)^2}$

$$F(X)=-\frac{1}{4(X+1)^2}-\frac{1}{4(X+1)}+\frac{1}{2(X^2+1)^2}+\frac{X}{4(X^2+1)}$$

(prendre $X=\mathrm{i}$ ou $X=-\mathrm{i}$, puis $X=0$)

$\boxed{4}$ $F(X)=\dfrac{16X-32}{(X^2+2X-3)(X^2-3X+2)}$

$$F(X)=\frac{4}{(X-1)^2}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+3}$$

$\boxed{5}$ $F(X)=\dfrac{X^3}{X^2+X-2}$; $G(X)=\dfrac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2-1)}$; $H(X)=\dfrac{30X^2}{(X^2+X-2)(X^2+1)}$;

$$K(X)=\frac{4(X+2)}{(X^2+X-2)(X^2+1)^2}$$

Réponses :

$F(X)=X-1+\dfrac{8}{3(X+2)}+\dfrac{1}{3(X-1)}$; $G(X)=\dfrac{2}{(X-1)^2}-\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{X+1}$; $H(X)=\dfrac{A}{X+2}+\dfrac{B}{X-1}+\dfrac{CX+D}{X^2+1}$

C et D sont des réels. On les trouve en faisant : $(X^2+1)H(X)=(X^2+1)\left(\dfrac{A}{X+2}+\dfrac{B}{X-1}\right)+CX+D$

Puis on fait : $X=\mathrm{i}$.

$H(X)=-\dfrac{8}{X+2}+\dfrac{5}{X-1}+\dfrac{3X+9}{X^2+1}$; on doit d'abord rendre $K(X)$ irréductible :

$$K(X)=\frac{4}{(X-1)(X^2+1)^2}=\frac{1}{X-1}-\frac{X+1}{X^2+1}-2\frac{X+1}{(X^2+1)^2}$$

$\boxed{6}$ $F(X)=\dfrac{X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^4-1)}$

$$F(X)=\frac{X+1}{(X^2+1)^2(X-1)}$$

$$F(X)=\frac{AX+B}{X^2+1}+\frac{A'X+B'}{(X^2+1)^2}+\frac{C}{X-1}$$

On trouve : $C=\dfrac{1}{2}$.

On fait $X=\mathrm{i}$.

$$F(X)(X^2+1)^2=(AX+B)(X^2+1)+A'X+B'+\frac{C}{X-1}(X^2+1)^2$$

$$\frac{X+1}{X-1}=(AX+B)(X^2+1)+A'X+B'+\frac{C}{X-1}(X^2+1)^2$$

$$\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1}=A'\mathrm{i}+B'=-\mathrm{i}$$

On multiplie par X ; on fait la limite en $+\infty$.

$$F(X)=\frac{1}{2(X-1)}-\frac{X}{(X^2+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{X+1}{X^2+1}$$

$\boxed{7}$ $F(X)=\dfrac{1}{X^4-1}$

$$F(X)=\frac{1}{4(X-1)}-\frac{1}{4(X+1)}-\frac{1}{2(X^2+1)}$$

$\boxed{8}$ $F=-\dfrac{1}{X}+\dfrac{2}{X^2}+\dfrac{1}{X+1}$

$$-\ln|x|-\frac{2}{x}+\ln|x+1|$$

$\boxed{9}$ **Méthode de division euclidienne.** On divise le polynôme X^3+3X^2-8 par le polynôme $2X^2+2X-4$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

10 1°) $\dfrac{1}{P}=\dfrac{\lambda_1}{X-z_1}+\dfrac{\lambda_2}{X-z_2}+\ldots+\dfrac{\lambda_n}{X-z_n}$ avec $\lambda_1=\dfrac{1}{\widetilde{P}'(z_1)}$ … $\lambda_n=\dfrac{1}{\widetilde{P}'(z_n)}$.

2°) partie entière de $\dfrac{X}{P}=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ (somme des résidus)

11 Utilise des décompositions suivant les puissances croissantes.

12 On commence par décomposer dans $\mathbb{C}$.

$$F=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X+j}+\frac{c}{X+j^2}$$

Pour le calcul des résidus, on utilise les dérivées.

$$a=\frac{1}{3}\ ;\ b=\frac{1}{3j^2}=\frac{j}{3}\ ;\ c=\frac{1}{3j}$$

$$F=\frac{1}{3(X+1)}+\frac{1}{3}\left(\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3(X+1)}+\frac{2-X}{3\left(X^2-X+1\right)}$$

13

Formule de Taylor pour le polynôme P (on suppose que P est degré n) :

$$P=(X-a)\times\widetilde{P}'(a)+\frac{(X-a)^2}{2}\widetilde{P}''(a)+\ldots+\frac{(X-a)^n}{n!}\widetilde{P^{(n)}}(a)$$

$$P^2=(X-a)^2\times\left[\widetilde{P}'(a)+\frac{(X-a)}{2}\widetilde{P}''(a)+\ldots+\frac{(X-a)^{n-1}}{n!}\widetilde{P^{(n)}}(a)\right]^2$$

On travaille avec la méthode des DL.

On commence par écrire le DL de P^2 en a à l'ordre 3.

Pour cela, on utilise la formule de Taylor Young.

1ère méthode : directe (assez long)

$(P^2)'=2PP'$

$(P^2)''=(2PP')'=2\left(P'^2+PP''\right)$ etc.

2e méthode : plus rapide

On écrit le DL à l'ordre 2 de P en a puis on élève au carré.

On pose $F=\dfrac{(X-a)^2}{P^2}$.

$$\widetilde{F}(x)=\frac{1}{\widetilde{P}'(a)^2+(x-a)\widetilde{P}'(a)\widetilde{P}''(a)+\ldots}$$

$$=\frac{1}{P'(a)^2}\times\frac{1}{1+(x-a)\dfrac{P''(a)}{P'(a)}+o(x-a)}$$

$$=\frac{1}{P'(a)^2}\times\left[1-(x-a)\frac{P''(a)}{P'(a)}+o(x-a)\right]$$

$$=\frac{1}{\left[P'(a)\right]^2}-(x-a)\frac{P''(a)}{\left[P'(a)\right]^3}+o(x-a)$$

14

1°) On pose $P=\lambda(X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_n)$.

$$P=\lambda\left[(X-z_2)\ldots(X-z_n)+(X-z_1)(X-z_3)\ldots(X-z_n)+(X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_{n-1})\right]$$

$$\frac{P'}{P}=\frac{1}{X-z_1}+\frac{1}{X-z_2}+\ldots+\frac{1}{X-z_n}$$

2°) On doit distinguer deux cas : le cas où x n'est pas racine de P ; le cas où x est racine de P.

On peut mettre une inégalité stricte.

15

$D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

On calcule d'aborde la partie entière.

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 & X^2+6X+9 \\ \hline -\left(2X^3+12X^2+18X\right) & 2X-12 \\ \hline 0-12X^2-18X & \\ -\left(-12X^2-72X-108\right) & \\ \hline 54X+108 & \end{array}$$

$$F=2X-12+\frac{54(X+2)}{(X+3)^2}$$

1ère méthode :

$$F=2X-12+\frac{54\left[(X+3)-1\right]}{(X+3)^2}$$

$$F=2X-12+\frac{54}{X+3}-\frac{54}{(X+3)^2}$$

2^e méthode :

$$F = 2X - 12 + \frac{A}{X+3} + \frac{B}{(X+3)^2}$$

$(X+3)^2 F$ puis évaluation en – 3 donne $B = -54$

$(X+3)F$ puis évaluation en 0 donne $A = 54$