1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 11 février 2013 (40 min)

Prénom : ……………………………………….……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (4 points) Question de cours

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).

Soit x un réel quelconque et M son point image sur le cercle trigonométrique.

Compléter les phrases suivantes :

- Le point image de $x+\pi$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport ……………………
- Le point image de $-x$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport ………………………
- Le point image de $\pi-x$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport ……………………
- Le point image de $\dfrac{\pi}{2}-x$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport …………………..

…..………

II. (4 points)

Compléter en donnant les valeurs exactes.

$\cos\dfrac{45\pi}{4}=$ ……….. $\qquad \cos\left(-\dfrac{38\pi}{3}\right)=$ ………..

$\sin\dfrac{61\pi}{6}=$ ……….. $\qquad \sin\left(-\dfrac{103\pi}{4}\right)=$ ………..

III. (2 points)

Simplifier les expressions suivantes où t est un réel.

$$A=\cos(t+13\pi)+5\cos(9\pi-t)-3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$B=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos(16\pi-t)+3\sin(21\pi-t)+\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

A = …………	B = ……………

IV. (2 points)

Soit x le réel de l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ tel que $\cos x=-\dfrac{5}{13}$.

Calculer la valeur exacte de sin x. $\qquad$ $\sin x=$ ……….

V. (3 points)

Un employé a touché une prime salariale de 1500 €.
Il place cette somme sur un compte rapportant 2,5 % d'intérêts à l'année.
On suppose qu'il ne retire ni ajoute d'argent ensuite sur ce compte et que le taux d'intérêt ne varie pas.
Les intérêts sont calculés au fil des années sur le capital et les intérêts des années précédentes.

On note u_0 la somme en euros dont il dispose au départ ; ainsi $u_0=1500$.
On appelle u_n la somme en euros dont il dispose au bout de n années (où n est un entier naturel).

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

2°) De quelle somme disposera l'employé au bout de dix ans ?
Justifier la réponse et arrondir la valeur au centime d'euro.

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

VI. (2 points)

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction « carré » dans le plan muni d'un repère orthogonal d'origine O.

Soit a un réel strictement positif.

On s'intéresse au domaine limité par $\mathscr{C}$ et le segment [AB] où A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.

On désire hachurer ce domaine par des hachures horizontales et régulièrement espacées*.

L'algorithme demande à l'utilisateur de saisir en entrée la valeur de a et la valeur de n, entier naturel qui correspond au nombre de hachures souhaité ($n \geqslant 2$).

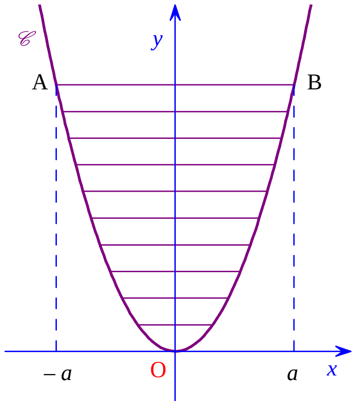

Figure pour $n = 10$ (et a strictement positif).

Compléter l'algorithme ci-dessous.

Entrée :
Saisir a
Saisir n

Traitement et sorties :

h prend la valeur $\dfrac{a^2}{n}$

Pour k entier naturel allant de 1 à n **Faire**

Tracer le segment joignant les points de coordonnées (…...… ; …...…) et (…...… ; ……..…)

FinPour

* Les hachures sont régulièrement espacées signifie que la distance entre deux hachures consécutives est constante.

VII. (3 points)

Écrire en langage naturel un algorithme qui demande à l'utilisateur d'entrer la valeur d'un entier naturel n non nul et qui calcule la somme des inverses de tous les entiers compris entre 1 et n au sens large.

Bonus (1 point) : à ne traiter que s'il reste du temps

Réaliser puis exécuter le programme correspondant sur calculatrice. Indiquer la valeur arrondie au millième de la somme des inverses de tous les entiers de 1 à 50 (au sens large).

…..………

…..………

Corrigé du contrôle du 11-2-2013

I. Question de cours

Il s'agit d'exprimer des symétries.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On note A, B, A', B' les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1), (– 1 ; 0), (0 ; – 1).

Soit x un réel quelconque et M son point image sur le cercle trigonométrique.

Compléter les phrases suivantes :

• Le point image de $x+\pi$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport **à O**.

• Le point image de $-x$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport **à (OA)**.

• Le point image de $\pi-x$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport **à (OB)**.

• Le point image de $\frac{\pi}{2}-x$ sur le cercle trigonométrique est le symétrique de M par rapport **à la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$ (ou à la droite d'équation $y=x$)**.

II.

$\cos\frac{45\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos\left(-\frac{38\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\sin\frac{61\pi}{6}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin\left(-\frac{103\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\frac{45\pi}{4}=\cos\frac{48\pi-3\pi}{4}=\cos\left(12\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{38\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{-36\pi-2\pi}{3}\right)=\cos\left(-12\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{61\pi}{6}=\sin\frac{60\pi+\pi}{6}=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{103\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{-104\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(-26\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

III.

Simplifions les expressions suivantes où *t* est un réel.

$$A=\cos(t+13\pi)+5\cos(9\pi-t)-3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$B=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos(16\pi-t)+3\sin(21\pi-t)+\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$A=-9\cos t$	$B=\cos t+4\sin t$

$$A=\cos(t+13\pi)+5\cos(9\pi-t)-3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos(t+\pi+12\pi)+5\cos(8\pi+\pi-t)-3\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos(t+\pi)+5\cos(\pi-t)-3\cos t$$
$$=-\cos t-5\cos t-3\cos t$$
$$=-9\cos t$$

$$B=2\cos t-\cos(-t)+3\sin(20\pi+\pi-t)+\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]$$
$$=2\cos t-\cos t+3\sin(\pi-t)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$
$$=\cos t+4\sin t$$

IV.

$x\in[-\pi\,;0]$ tel que $\cos x=-\frac{5}{13}$

Calculons la valeur exacte de sin *x*.

$$\mathbf{\sin x=-\frac{12}{13}}$$

On utilise la relation $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

On a donc : $\left(-\frac{5}{13}\right)^2+\sin^2 x=1$ d'où $\sin^2 x=1-\frac{25}{169}$ soit $\sin^2 x=\frac{144}{169}$.

Par suite, $\sin x=\frac{12}{13}$ ou $\sin x=-\frac{12}{13}$.

Or $x\in[-\pi\,;0]$ donc $\sin x\leqslant 0$.

On en déduit que $\sin x=-\frac{12}{13}$.

V.

Un employé a touché une prime salariale de 1500 €.
Il place cette somme sur un compte rapportant 2,5 % d'intérêts à l'année.
On suppose qu'il ne retire ni ajoute d'argent ensuite sur ce compte et que le taux d'intérêt ne varie pas.
Les intérêts sont calculés au fil des années sur le capital et les intérêts des années précédentes.

On note u_0 la somme en euros dont il dispose au départ ; ainsi $u_0 = 1500$.
On appelle u_n la somme en euros dont il dispose au bout de *n* années (où *n* est un entier naturel).

1°)

Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n.

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 2,5 % est égal à 1,025.

On a : $u_{n+1} = 1{,}025u_n$.

Déduisons-en la nature de la suite (u_n).

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1500$ et de raison 1,025.

2°) **Calculons la somme dont disposera l'employé au bout de dix ans.**

Au bout de 10 ans, la somme dont disposera l'employé est égale à u_{10}.

$$u_{10} = u_0 \times 1{,}025^{10}$$

$$= 1500 \times 1{,}025^{10}$$

$$= 1920{,}126816...$$

Donc $u_{10} \approx 1920{,}13$ (valeur arrondie au centième).

Au bout de 10 ans, l'employé disposera de 1920,13 € environ.

VI.

$\mathscr{C}$: courbe représentative de la fonction « carré ».

$a > 0$

On s'intéresse au domaine limité par $\mathscr{C}$ et le segment [AB] où A et B sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives – *a* et *a*.

On désire hachurer ce domaine par des hachures horizontales et régulièrement espacées.

L'algorithme demande à l'utilisateur de saisir en entrée la valeur de *a* et la valeur de *n*, entier naturel qui correspond au nombre de hachures souhaité ($n \geqslant 2$).

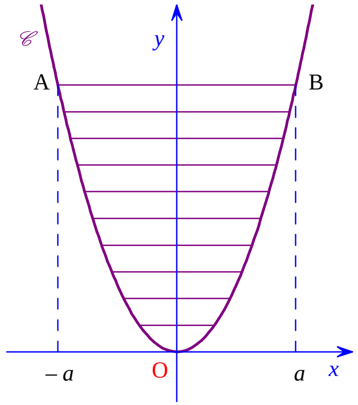

Figure pour $n = 10$ (et *a* strictement positif).

Les hachures coupent l'axe des ordonnées aux points d'ordonnées respectives *h*, 2*h*, 3*h*, … *nh*.
(On peut faire apparaître ces points sur le graphique.)

Entrée :
Saisir *a*
Saisir *n*

Traitement et sorties :

h prend la valeur $\dfrac{a^2}{n}$

Pour *k* entier naturel allant de 1 à *n* **Faire**

  Tracer le segment joignant les points de coordonnées ($-\sqrt{kh}$; kh) et ($\sqrt{kh}$; kh)

FinPour

VII.

Écrivons en langage naturel un algorithme qui demande à l'utilisateur d'entrer la valeur d'un entier naturel n non nul et qui calcule la somme des inverses de tous les entiers compris entre 1 et n au sens large.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour k entier naturel allant de 1 à n **Faire**
  S prend la valeur $S+\dfrac{1}{k}$
FinPour

Sortie :
Afficher S

Bonus :

En faisant tourner le programme sur calculatrice, on a obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=50}\frac{1}{k}=4,9920538...$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=50}\frac{1}{k}\approx 4,992$ (valeur arrondie au millième).