TS

Les primitives

Le 14 mars 2021

Où trouve-t-on les exposants fractionnaires ?

Le 24 février 2021

tableau des dérivées

On le voit dans un sens.

Plan du chapitre :

Dans tout le chapitre, les intervalles de $\mathbb{R}$ considérés sont non vides et non réduits à un singleton.

I. Notion de primitive

1°) Définition (rappel)

f **est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.**

On dit qu'une fonction *F* définie sur I est une primitive de *f* sur I lorsque :
① *F* est dérivable sur I ;
② $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = f(x)$.

On pourrait expliquer le terme de « primitive ».
Celui-ci provient de l'adjectif « primitif ». On peut le comprendre à partir du schéma qui est donné dans le paragraphe 3°).

2°) Exemples

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x+5$

f admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

② $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

On ne sait pas donner une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

Néanmoins, comme *f* est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Darboux (admis sans démonstration) qui est énoncé dans le paragraphe suivant permet d'affirmer que *f* admet bien des primitives sur $\mathbb{R}$. L'une de ces primitives est la fonction Arctangente, notée Arctan, qui sera étudiée dans le supérieur.

③ $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto \ln x$

④ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto gt$ (g étant une constante)

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$t \mapsto \frac{1}{2}gt^2$

On reconnaît ici une primitive utilisée en physique dans le cadre de la détermination des lois horaires du mouvement d'un objet dans le champ de pesanteur terrestre.

3°) Théorème de Darboux (mathématicien du XIX^{e} siècle)

Gaston Darboux (né en 1842 à Nîmes et mort le 23 février 1917 à Paris)

Toute fonction définie et continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Ce théorème est admis sans démonstration.

Une fonction non continue sur un intervalle peut quand même admettre des primitives sur cet intervalle.

Toutes les fonctions n'admettent pas en général de primitives.

Certaines fonctions ne sont pas dérivables ; certaines fonctions n'admettent pas de primitive mais lorsque tout se passe bien :

$$\boldsymbol{F} \underset{\text{Chercher une primitive}}{\overset{\text{Dériver}}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{F' = f}$$

« Primitiver »

En physique, on dit fréquemment « intégrer » au lieu de « primitiver ».

En physique, on est souvent amené à faire une double intégration.

Le but du chapitre est d'apprendre à calculer des primitives.

II. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

1°) Une première propriété évidente

Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ $(k \in \mathbb{R})$ est aussi une primitive de f sur I.

2°) Une deuxième propriété

Énoncé :

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration :

Supposons que f admette deux primitives F et G sur un intervalle I.

Dans ce cas, $\forall x \in \mathrm{I} \quad F'(x) = G'(x) = f(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad G'(x) - F'(x) = 0$

soit $\forall x \in \mathrm{I} \quad (G - F)'(x) = 0$.

Or I est un intervalle.

Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I.

Donc il existe un réel k tel que $\forall x \in \mathrm{I} \quad (G - F)(x) = k$ soit $\forall x \in \mathrm{I} \quad G(x) = F(x) + k$.

3°) Théorème

Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions

$G : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ $\quad (k \in \mathbb{R})$.

$x \mapsto F(x) + k$

Ce théorème permet d'écrire toutes les primitives d'une fonction à partir de l'une quelconque d'entre elles.

Si une fonction admet une primitive sur un intervalle, on obtient toutes les primitives de la fonction en ajoutant une constante quelconque à cette primitive.

On notera que si une fonction admet une primitive sur un intervalle, alors elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

On peut noter que, du point de vue graphique, les courbes représentatives de deux primitives distinctes sur un intervalle sont « parallèles », c'est-à-dire que l'une se déduit de l'autre par une translation dont le vecteur a une direction parallèle à l'axe des ordonnées.
On emploie ici l'adjectif « parallèle » pour des courbes, ce qui est inhabituel mais possible.

Le 14-3-2022

Graphiquement, une primitive, ça peut être n'importe quoi (une droite, une parabole etc.).

III. Linéarité

1°) Propriété

f et g sont deux fonctions définies sur un même intervalle I admettant des primitives sur I.
Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I, alors pour tous réels α et β la fonction $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur I.

2°) Démonstration

La fonction $\alpha F+\beta G$ est dérivable sur I (règle sur les opérations algébriques sur les dérivées) et $(\alpha F+\beta G)'=\alpha F'+\beta G'=\alpha f+\beta g$.

3°) Cas particuliers

$F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I (car la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées).

$F-G$ est une primitive de $f-g$ sur I (car la dérivée d'une différence est égale à la différence des dérivées).

Attention au produit

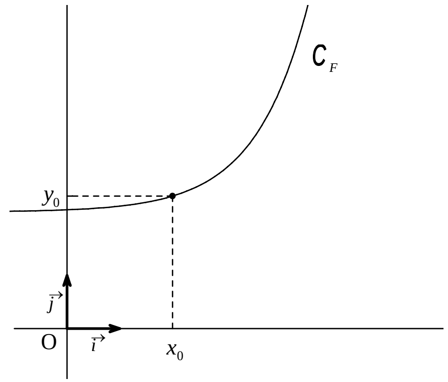
$F\times G$ n'est pas une primitive de $f\times g$ sur I (car la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées).

IV. Primitive prenant une valeur donnée

1°) Propriété

f est une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives sur cet intervalle.
Pour tout couple $(x_0\,;\,y_0)\in \mathrm{I}\times\mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

$\mathrm{I}\times\mathbb{R}$ désigne le produit cartésien de I par $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble des couples $(x_0\,;\,y_0)$ de réels avec $x_0\in\mathrm{I}$ et $y_0\in\mathbb{R}$.
On notera que $x_0\in\mathrm{I}$ car on prend son image par F.



Cette propriété correspond aux conditions initiales en sciences physiques.

La propriété permet d'en déduire que les courbes représentatives de deux primitives ne se coupent pas.

2°) Démonstration

Par hypothèse, f admet des primitives sur I.
On note G une primitive de f sur I.

Les primitives de f sur I sont les fonctions $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ $\quad (k\in\mathbb{R})$.
$$x\mapsto G(x)+k$$

On cherche k tel que $F(x_0)=y_0\quad(1)$.

$$(1)\Leftrightarrow G(x_0)+k=y_0$$

$$\Leftrightarrow k=y_0-G(x_0)$$

f admet donc une unique primitive F sur I telle que $F(x_0)=y_0$.
F est définie par $F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$ (formule à ne pas apprendre).

3°) Exercice

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2-3x+1$$

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=5$.

ou :
Déterminer la primitive F de f qui prend la valeur 5 en 0.

Il convient d'expliquer l'expression « F prend la valeur 5 en 0 ». Cette expression signifie que $F(0)=5$. Le mot « valeur » se réfère à la valeur de l'image de 0 par F (valeur de la fonction en 0).

[f est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de Darboux, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$].

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x+k \quad (k\in\mathbb{R})$.

On cherche k tel que $F(0)=5 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{0^3}{3}-\frac{3}{2}\times 0^2+0+k=5$

$\Leftrightarrow k=5$

La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=5$ est définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x+5$.

V. Primitives usuelles

1°) Primitives des fonctions de référence

Fonction	Primitive	Intervalle(s) de validité
$a \quad (a\in\mathbb{R})$	$ax+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
$\cos x$	$\sin x+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b) \quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b) \quad (a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{\sqrt{ax+b}} \quad (a\neq 0)$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathcal{D}_f\setminus\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$e^{ax} \quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha=e^{\alpha\ln x} \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{ax+b} \quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\left]-\infty\,;-\frac{b}{a}\right[$ et $\left]-\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+k \quad (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Complément :

e^{ax+b} $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+k$ $(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$

Quelques commentaires :

• Quelle est la différence entre les lignes 4 et 17 : x^n $(n \in \mathbb{N})$ et $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$?

On a l'impression que ce sont les mêmes formules.

La formule est effectivement la même.

Dans la formule de la ligne 4, l'exposant est un entier naturel.

Dans la formule de la ligne 17, l'exposant est un réel différent de – 1.

Cette formule est intéressante lorsque l'on a des exposants non entiers naturels (en particulier, fractionnaires).

• On pourrait rajouter la ligne suivante.

$\frac{1}{x^\alpha}$	$-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}+k$ $(k \in \mathbb{R})$	$]0\,;+\infty[$

• Justification de deux lignes :

$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$F(x)=\frac{1}{n+1}\times x^{n+1}$

$F'(x)=\frac{1}{n+1}\times(n+1)x^n$

$F'(x)=x^n$

$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

$F(x)=-\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{x^{n-1}}$

$F'(x)=-\frac{1}{n-1}\times\left(-\frac{n-1}{x^n}\right)$ [Formule $\left(\frac{1}{x^p}\right)'=-\frac{p}{x^{p+1}}$]

$F'(x)=\frac{1}{x^n}$

2°) Primitives déduites des règles de dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Primitive
$u'+v'$	$u+v+k$ $(k \in \mathbb{R})$
au' $(a \in \mathbb{R})$	$au+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$u'v+uv'$	$uv+k$ $(k \in \mathbb{R})$
uu'	$\frac{u^2}{2}+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$\frac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0$ sur I$)$	$-\frac{1}{u}+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$\frac{u'}{u^n}$ $(u \neq 0$ sur I ; $n \geqslant 2)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ $(u > 0$ sur I$)$	$2\sqrt{u}+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$u'\sin u$	$-\cos u+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$u'\cos u$	$\sin u+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$\frac{u'}{u}$ $(u \neq 0$ sur I$)$	$\ln\lvert u\rvert+k$ $(k \in \mathbb{R})$
$u'e^u$	e^u+k $(k \in \mathbb{R})$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $u>0$ sur I$)$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k$ $(k \in \mathbb{R})$

N.B. :

$\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ (la notation $\sqrt{u}$ est autorisée !)

Commentaire (à la suite de la question de Thomas Vidor, élève de TS1 durant l'année scolaire 2019) :

Pourquoi ne pas mettre $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ dans le tableau ?

On pourrait si on le voulait. Mais on préfère mettre des formes sans constantes multiplicatives (formes « pures ») de manière à éviter la multiplication de formules.

De même, on pourrait mettre $2uu'$, $nu'u^{n-1}$ etc.

VI. Exemples de calculs de primitives

1°) Exemple 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Déterminer les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$.

[*f* est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.]

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x) = x^2 + 1$.

On a alors $u'(x) = 2x$.

On effectue une **réécriture** de *f*.

$$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

Donc les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions *F* définies par $F = 2\sqrt{u} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Commentaires :

On dit « les » primitives à cause du *k*.
On voit que chercher une primitive c'est beaucoup plus compliqué que chercher une dérivée.
On fait en deux temps.

2°) Exemple 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{x^3}{\left(x^4+1\right)^6}$

Déterminer les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$.

[*f* est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.]

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^n}$.

On pose $u(x) = x^4 + 1$.

On a alors $u'(x) = 4x^3$.

On effectue une **réécriture** de $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{constante} \\ \text{d'ajustement}}} \times \frac{4x^3}{\left(x^4+1\right)^6}$$

On veut faire « sauter » le 4 pour retrouver le x^3 (c'est un langage imagé mais qui a le mérite de parler).

$$f = \frac{1}{4} \times \frac{u'}{u^6}$$

(On utilise le tableau : $\dfrac{u'}{u^n} \to -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.)

Donc les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions *F* définies par

$$F = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{(6-1)u^{6-1}}\right] + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5\left[u(x)\right]^5} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{20\left(x^4+1\right)^5} + k} \quad (k \in \mathbb{R})$$

3°) Exemple 3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 5 \sin x \times \cos^3 x$

Déterminer les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On effectue la réécriture $f(x) = 5 \sin x \times (\cos x)^3$ (convention d'écriture de l'exposant pour les puissances des fonctions cos, sin, tan).

On pense à la forme $u'u^n$.

On pose $u(x)=\cos x$.

On a alors $u'(x)=-\sin x$.

On effectue une **réécriture** de $f(x)$.

$f(x)=-5\times(-\sin x)\times(\cos x)^3$

$f=-5\times u'\times u^3$

(On utilise le tableau : $u'u^n \to \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.)

Donc les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions *F* définies par

$F=-5\times\dfrac{u^4}{4}+k \quad (k\in\mathbb{R})$ ou encore $F=-\dfrac{5u^4}{4}+k \quad (k\in\mathbb{R})$.

$F(x)=-5\times\dfrac{[u(x)]^4}{4}+k \quad (k\in\mathbb{R})$

$\boxed{F(x)=-\dfrac{5}{4}(\cos x)^4+k} \quad (k\in\mathbb{R})$

On peut aussi écrire : $F(x)=-\dfrac{5}{4}\cos^4 x+k$.

4°) Exemple 4

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\mapsto 5x-1+3\cos x$

Déterminer les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On fait la primitive terme à terme.

Les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions *F* définies par

$F(x)=5\times\dfrac{x^2}{2}-x+3\sin x+k \quad (k\in\mathbb{R})$

$\boxed{F(x)=\dfrac{5x^2}{2}-x+3\sin x+k} \quad (k\in\mathbb{R})$

5°) Exemple 5

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\quad x\mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

Déterminer les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$.

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u}$.

On pose $u(x)=x^2+1$.

On a alors $u'(x)=2x$.

On effectue une **réécriture** de *f*.

$f=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u}$

(On utilise le tableau : $\dfrac{u'}{u}\to\ln|u|$)

Donc les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions *F* définies par

$F=\dfrac{1}{2}\ln|u|$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+k \quad (k\in\mathbb{R})$

valeurs absolues de sécurité (qu'on peut enlever après avoir constaté que l'expression est strictement positive)

$\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+k} \quad (k\in\mathbb{R})$

6°) Exemple 6

Primitive de la fonction racine carrée :

Pour trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, on écrit $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

On applique la formule de la ligne suivante :

$x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ $(k \in \mathbb{R})$	$]0 ; +\infty[$

On notera bien que α est un réel différent de – 1. On prend $\alpha = \dfrac{1}{2}$ (exposant fractionnaire).

Une primitive de f est donc la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$.

Comme c'est simple, on ne la donne pas dans le cours.