TS spé — Opérations sur les matrices

Le 12-5-2022

Mes notations ne sont pas très homogènes.
Je parle tantôt de dimension tantôt de format.

Plan du chapitre :

L'objectif du chapitre est de définir les opérations sur les matrices (addition de deux matrices, multiplication d'une matrice par un réel, multiplication de deux matrices) et d'étudier les propriétés algébriques.

I. Addition

1°) Définition

A et B sont deux matrices de dimension $m \times p$.
La **somme de A et B** est la matrice de dimension $m \times p$, notée **A + B**, obtenue en additionnant deux à deux les coefficients situés à la même place.

Condition importante sur les formats : Pour additionner deux matrices, il faut qu'elles aient le même format.

2°) Exemple

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$

3°) Propriétés

On retrouve les mêmes propriétés que pour l'addition des réels.

A, B, C sont des matrices rectangulaires de même format.
$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$ (**commutativité** de l'addition des matrices)
$(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}=\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$ (**associativité** de l'addition des matrices)

4°) Soustraction

A et B sont des matrices rectangulaires de même format.
On pose $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}+(-\mathrm{B})$.

La soustraction de deux matrices s'effectue exactement de la même manière que l'addition, en effectuant coefficient par coefficient.

On notera que, pour toute matrice A, $\mathrm{A}-\mathrm{A}$ est égale à la matrice nulle de même format, c'est-à-dire la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.

5°) Équivalence fondamentale

A, B, X sont des matrices rectangulaires de même format.
$\mathrm{A}+\mathrm{X}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{B}-\mathrm{A}$

Démonstration :

Passage de gauche à droite :
On ajoute – A aux deux membres de l'égalité.

Passage de droite à gauche :
On ajoute A aux deux membres de l'égalité.

II. Multiplication par un réel

1°) Définition

A est une matrice de dimension $m \times p$ et k un réel.
Le **produit de la matrice A par le réel *k*** est la matrice de dimension $m \times p$, notée **kA**, obtenue en multipliant par k chaque coefficient de A.

2°) Exemple

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

3°) Propriétés

A et B sont deux matrices de dimension $m \times p$, k et k' sont deux réels.
On a :

- $k(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B}$
- $(k+k')\mathrm{A} = k\mathrm{A} + k'\mathrm{A}$
- $k(k'\mathrm{A}) = kk'\mathrm{A}$

4°) Équivalence fondamentale

A et B sont deux matrices de même format.
k est un réel non nul.
$k\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \frac{1}{k}\mathrm{B}$

Démonstration :

Passage de gauche à droite :
On multiplie les deux membres de l'égalité par $\frac{1}{k}$.

Passage de droite à gauche :
On multiplie les deux membres de l'égalité par k.

III. Multiplication de deux matrices (1) : produit d'un vecteur-ligne par un vecteur-colonne

1°) Définition

On appelle produit du vecteur-ligne $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ par le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ le nombre égal à $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p$$

nombre de coefficients du vecteur-ligne = nombre de coefficients du vecteur-colonne

On notera que pour que le calcul d'un produit d'un vecteur-ligne par un vecteur-colonne soit possible dans cet ordre (vecteur-ligne $\times$ vecteur-colonne), il faut que le nombre de colonnes du vecteur-ligne soit égal au nombre de lignes du vecteur-colonne.

2°) Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\times2+3\times4+6\times1 = 22$$

3°) Remarque

Le nombre de colonnes du vecteur-ligne doit être égal au nombre de lignes du vecteur-colonne.

IV. Multiplication de deux matrices (2) : cas général

1°) Définition

On appelle **produit** d'une matrice A de format (n, p) (n lignes et p colonnes) par une matrice B de format (p, q) (p lignes et q colonnes) la matrice notée AB, de format (n, q), définie de la manière suivante :
le coefficient de AB situé sur la ligne i et dans la colonne j est obtenu en effectuant le produit de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B.

2°) Exemple de produit pour deux matrices carrées d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

Coefficient de la 1ère ligne - 1ère colonne : $c_{1,1}=a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}$ (1ère ligne fois 1ère colonne)
Coefficient de la 1ère ligne - 2e colonne : $c_{1,2}=a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}$ (1ère ligne fois 2e colonne)
Coefficient de la 2e ligne - 1ère colonne : $c_{2,1}=a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}$ (2e ligne fois 1ère colonne)
Coefficient de la 2e ligne - 2e colonne : $c_{2,2}=a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}$ (2e ligne fois 2e colonne)

Les coefficients sont des sommes de produits.

3°) Une disposition pratique sur un exemple

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -7\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

Effectuer le produit AB.

La matrice A a pour format (2 ; 3).
La matrice B a pour format (3 ; 3).

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Il est donc possible de calculer le produit AB.
La matrice AB a pour format (2 ; 3).

On peut noter au brouillon sous forme symbolique « $(2,3)\times(3,3)=(2,3)$ ».
Cela fait un peu une relation de Chasles.
On peut adopter la disposition suivante pour effectuer les calculs au brouillon (disposition pratique au brouillon uniquement).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}5 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -7\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 2 & -32\\ -2 & 12 & -24\end{pmatrix}\end{array}$$

Pour obtenir le coefficient sur la 1ère ligne et dans la 1ère colonne, on calcule : $0\times5+4\times1+(-2)\times1=2$.

On notera que dans notre exemple, les formats des matrices A et B ne permettent pas de calculer le produit BA.

Exemple très important :

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$$

4°) Remarques

• AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

• La règle concernant les dimensions peut être schématisée de la façon suivante :

$$(n,\ p)\times(p,q)=(n,\ q)$$

• Le produit d'une matrice de format $(n,\ p)$ par une matrice de format (q,r) dans cet ordre n'est possible que si $p=q$. On obtient alors une matrice de format $(n,\ q)$.

On retiendra sous forme symbolique qu'un produit du type « $(n,\ p)\times(q,r)$ » n'est possible que si $p=q$.
Par voie de conséquence, un produit du type « $(n,\ p)\times(q,r)$ » avec $p\neq q$ est impossible.

• Soit A une matrice de format $(n,\ p)$ et B une matrice de format $(q,\ m)$.
Les produits AB et BA existent si et seulement si $p=q$ et $n=m$.
Dans ce cas, AB est une matrice carrée de taille n et BA est une matrice carrée de taille p.

Cas de matrices carrées :

• Il est important de retenir que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors les produits AB et BA sont possibles et donnent des matrices carrée d'ordre n). En général, ces deux produits sont différents.

• Lorsque $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$, on dit que A et B **commutent** (pour la multiplication des matrices).

5°) Propriétés

A, B et C sont trois matrices permettant les calculs indiqués et k est un réel. On a :

- $\mathrm{A}(\mathrm{BC})=(\mathrm{AB})\mathrm{C}=\mathrm{ABC}$
- $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C})=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}$
- $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}=\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$
- $(k\mathrm{A})\mathrm{B}=k(\mathrm{AB})=\mathrm{A}(k\mathrm{B})=k\mathrm{AB}$

Commentaires :

La propriété correspondant à l'égalité $\mathrm{A}(\mathrm{BC})=(\mathrm{AB})\mathrm{C}=\mathrm{ABC}$ s'appelle l'associativité de la multiplication matricielle.

La propriété correspondant à l'égalité $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C})=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}$ et $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C}=\mathrm{AC}+\mathrm{BC}$ s'appelle la distributivité de la multiplication à gauche ou à droite sur l'addition.

Conséquence :

A et B sont deux matrices telles que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonnes de A.
α et β sont deux réels.
On a : $(\alpha\mathrm{A})(\beta\mathrm{B})=(\alpha\beta)\mathrm{AB}$.

6°) Remarques

• Si A est une matrice carrée, la matrice $A \times A$ est notée A^2, $A \times A \times A$ est notée A^3...
On a $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$.
On notera que les matrices A et A^2 commutent. De manière générale, pour tout couple $(k\,;l)$ d'entiers naturels, on a $A^k \times A^l = A^l \times A^k = A^{l+k}$.

• En général $AB \neq BA$ (la multiplication n'est pas commutative).

7°) Propriété fondamentale du produit d'une matrice par la matrice identité (démonstration facile)

Propriété :

> A est une matrice carrée d'ordre *n* et I_n la matrice identité d'ordre *n*.
> On a : $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Vocabulaire :

On dit que la matrice I_n est élément neutre à gauche et à droite pour la multiplication des matrices.

On notera l'analogie avec le nombre 1 dans l'ensemble des réels.

Généralisation :

• Si X est une matrice avec *n* lignes, alors $\boxed{I_n X = X}$.

• Si X est une matrice avec *n* colonnes, alors $\boxed{X I_n = X}$.

8°) Utilisation des propriétés

La propriété $A(BC) = (AB)C = ABC$ permet de faire le produit de 3 matrices (avec les conditions correctes sur les formats).
Pour effectuer le produit de 3 matrices, on commence par faire le produit de deux matrices puis on multiplie le résultat par la dernière matrice.

La propriété de distributivité permet de **développer** des expressions matricielles.

Exemples de développements : identités remarquables

① A et B sont des matrices carrées d'ordre *n*.

$$(A+B)^2 = (A+B)\times(A+B) = A\times A + A\times B + B\times A + B\times B = A^2 + AB + BA + B^2$$

Si $AB = BA$, $(A+B)^2 = (A+B)\times(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$.

$$(A-B)^2 = (A-B)\times(A-B) = A\times A - A\times B - B\times A + B\times B = A^2 - AB - BA + B^2$$

Si $AB = BA$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

② A et B sont des matrices carrées d'ordre *n*.

$$(A-B)^2 = (A-B)\times(A-B) = A\times A - A\times B - B\times A + B\times B = A^2 - AB - BA + B^2$$

Si $AB = BA$, $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

③ A et B sont des matrices carrées d'ordre *n*.

$$(A+B)\times(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Si $AB = BA$, $(A+B)\times(A-B) = A^2 - B^2$.

La propriété de distributivité permet de **factoriser** des expressions matricielles.

Exemples de factorisation :

① A, B, C sont des matrices carrées d'ordre *n*.

$$AB + AC = A(B+C)$$
$$AC + BC = (A+B)C$$

Attention si l'on factorise « par la gauche » ou « par la droite ».

L'expression $AB + CA$ n'est pas factorisable.

② A et B sont des matrices carrées d'ordre *n*.

• Factorisation de $A + AB$:

$A + AB = AI_n + AB = A(I_n + B)$ (l'étape « $AI_n + AB$ » permet d'effectuer la factorisation)

> Attention, pour pouvoir factoriser le membre de gauche, on écrit bien AI_n et non $I_n A$.
> Il y a vraiment un ordre.

• Factorisation de $A + A^2$:

$A + A^2 = A \times I_n + A \times A = A(I_n + A)$ (factorisation de l'expression par A à gauche)

$A + A^2 = I_n \times A + A \times A = (I_n + A)A$ (factorisation de l'expression par A à droite)

Il s'agit d'exemples fondamentaux.

9°) Produit par la matrice nulle

Définition [matrice nulle, rappel] :

On appelle **matrice nulle** une matrice rectangulaire dont tous les coefficients sont nuls.

Propriété :

• Soit A une matrice de format $(n,\ p)$ et B la matrice nulle de format $(p,\ q)$.
La matrice AB est la matrice nulle de format $(n,\ q)$.
• Soit A une matrice de format $(n,\ p)$ et B la matrice nulle de format $(q,\ n)$.
La matrice BA est la matrice nulle de format $(q,\ p)$.

On retiendra la propriété :

Le produit à gauche ou à droite par la matrice nulle est la matrice nulle.

La matrice nulle est un élément absorbant à gauche et à droite pour la multiplication.

Attention, dans l'ensemble des matrices, $\mathrm{AB}=0$ n'entraîne pas $\mathrm{A}=0$ ou $\mathrm{B}=0$.

V. Inverse d'une matrice carrée

Rappel de définition :

On dit que deux réels x et y sont inverses l'un de l'autre pour exprimer que $xy=1$.

On dit que deux réels sont inverses l'un de l'autre pour exprimer que leur produit est égal à 1.

Tous les réels ont un inverse sauf 0 (0 n'a pas d'inverse).

On va adapter cette définition aux matrices carrées d'ordre n où n est un entier naturel non nul.
Le nombre 1 est remplacé par la matrice identité I_n d'ordre n. c'est-à-dire la matrice qui comporte des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

1°) Définition

A est une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}=\mathrm{I}_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.
Dans ce cas, la matrice B est unique et s'appelle **l'inverse** de A.
L'inverse de A est notée $\mathbf{A}^{-1}$.

Une matrice qui admet un inverse est dite **inversible**.

2°) Remarques

• Nous admettrons cette année sans démonstration que la condition "$\mathrm{AB}=\mathrm{I}_n$" est équivalente à la condition "$\mathrm{BA}=\mathrm{I}_n$".
(De façon générale, on n'a pas $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$.)

Le 26-11-2021

On démontre que $\mathrm{AB}=\mathrm{I}_n \Rightarrow \mathrm{BA}=\mathrm{I}_n$.

• Si la matrice B est l'inverse de la matrice A, alors la matrice A est l'inverse de la matrice B.
On dit que les matrices A et B sont **inverses l'une de l'autre**.

• On a : $\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{I}_n$.

• Une matrice carrée n'admet pas forcément d'inverse. Dans ce cas, on dit qu'elle n'est pas inversible.
Il existe des matrices carrées non inversibles.

• Si une matrice est inversible, alors l'inverse est unique.

• La matrice I_n est inversible et $\mathrm{I}_n^{-1}=\mathrm{I}_n$.

3°) Exemple

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.
Démontrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

On calcule le produit AB.

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}_2$$

On calcule le produit BA.

$$\mathrm{BA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}_2$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{BA}=\mathrm{I}_2$ donc A est inversible et l'inverse de A est B.

On écrit : $\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{B}$ (l'inverse de A est égale à B) ou $\mathrm{B}^{-1}=\mathrm{A}$ (l'inverse de B est égale à A).

On aurait pu se contenter de vérifier uniquement que $\mathrm{AB}=\mathrm{I}_2$ puisque l'on sait alors qu'automatiquement $\mathrm{BA}=\mathrm{I}_2$.

Attention, certaines matrices carrées ne possèdent pas d'inverse.

Par exemple, la matrice carrée d'ordre n nulle ne possède pas d'inverse (démonstration par l'absurde très facile à faire).

Il existe des matrices carrées non nulles qui ne possèdent pas d'inverse, comme on va le voir dans le paragraphe suivant.

4°) Cas particulier : inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Propriété admise sans démonstration

On considère une matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels quelconques.

On pose : $\det A = ad-bc$ **(déterminant de A)**. Ce déterminant s'écrit aussi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Dans ce cas, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Attention, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 peut être défini mais la formule est beaucoup plus compliquée.
On ne donne pas de formule pour l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 en Terminale.

Démonstration :

Lemme : On pose $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On a $AB=BA=(\det A)I_2$.

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(\det A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(\det A)I_2$$

$$BA=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(\det A)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=(\det A)I_2$$

Reprise de la démonstration :

1^er^ cas : $\det A \neq 0$

On a $AB=(\det A)I_2$ donc $\dfrac{1}{\det A}(AB)=I_2$ d'où $A\left(\dfrac{1}{\det A}B\right)=I_2$.

De même, $\left(\dfrac{1}{\det A}B\right)A=I_2$.

On a donc $A\left(\dfrac{1}{\det A}B\right)=\left(\dfrac{1}{\det A}B\right)A=I_2$ ce qui permet d'affirmer que A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}B$.

2^e^ cas : $\det A = 0$

On a alors $AB=0\times I_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit inversible.
On aurait alors $B=A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donnerait $a=b=c=d=0$ et donc $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or, la matrice nulle d'ordre 2 n'est pas inversible.
On aboutit donc à une contradiction.
L'hypothèse de départ est donc fausse et, par conséquent, A n'est pas inversible.

Exemples d'applications :

① $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

$\det A = 10$

Comme $\det A \neq 0$, on en déduit que A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

② $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse ?

$\det A = 0$
On en déduit que A n'est pas inversible.

5°) Égalité fondamentale

Soit n un entier naturel non nul.

A est une matrice carrée d'ordre n.
On suppose que A est inversible.

On a $AA^{-1}=I_n$ et $A^{-1}A=I_n$.

6°) Équivalences fondamentales (1^er^ groupe)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

A est une matrice carrée d'ordre n (donc de dimension $n\times n$) inversible.
B et C sont des matrices de dimension $n\times p$.

$AB=AC \Leftrightarrow B=C$

Il s'agit d'une simplification par A $\boxed{\text{à gauche}}$.

Démonstration :

Passage de gauche à droite :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A^{-1} $\boxed{\text{à gauche}}$.

Passage de droite à gauche :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A $\boxed{\text{à gauche}}$.

A est une matrice carrée d'ordre *n* (donc de dimension $n \times n$) inversible.
B et C sont des matrices de dimension $p \times n$.
$\text{BA} = \text{CA} \Leftrightarrow \text{B} = \text{C}$

Il s'agit d'une simplification par A $\boxed{\text{à droite}}$.

Démonstration :

Passage de gauche à droite :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A^{-1} $\boxed{\text{à droite}}$.

Passage de droite à gauche :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A $\boxed{\text{à droite}}$.

7°) Équivalences fondamentales (2e groupe)

Soit *n* et *p* deux entiers naturels non nuls.

Propriété 1 :

Énoncé :

A est une matrice carrée d'ordre *n* (donc de dimension $n \times n$) inversible.
B et C sont des matrices de dimension $n \times p$.
$\text{AB} = \text{C} \Leftrightarrow \text{B} = \text{A}^{-1}\text{C}$

Démonstration :

Passage de gauche à droite :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A^{-1} $\boxed{\text{à gauche}}$.

Passage de droite à gauche :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A $\boxed{\text{à gauche}}$.

Propriété 2 :

Énoncé :

A est une matrice carrée d'ordre *n* (donc de dimension $n \times n$) inversible.
B et C sont des matrices de dimension $p \times n$.
$\text{BA} = \text{C} \Leftrightarrow \text{B} = \text{CA}^{-1}$

Démonstration :

Passage de gauche à droite :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A^{-1} $\boxed{\text{à droite}}$.

Passage de droite à gauche :
On multiplie les deux membres de l'égalité par la matrice A $\boxed{\text{à droite}}$.

8°) Propriété (inverse d'un produit)

Soit *n* un entier naturel non nul.

Énoncé :

Soit A et B deux matrices carrées de taille *n*.
Si A et B sont inversibles, alors la matrice AB est inversible et $(\text{AB})^{-1} = \text{B}^{-1}\text{A}^{-1}$.

Démonstration :

On a $\text{AB}\left(\text{B}^{-1}\text{A}^{-1}\right) = \text{AI}_n\text{A}^{-1} = \text{AA}^{-1} = \text{I}_n$.

On a $\left(\text{B}^{-1}\text{A}^{-1}\right)\text{AB} = \text{B}^{-1}\text{A}^{-1}\text{AB} = \text{B}^{-1}\text{I}_n\text{B} = \text{B}^{-1}\text{B} = \text{I}_n$.

Les deux égalités montent que la matrice AB est inversible et $(\text{AB})^{-1} = \text{B}^{-1}\text{A}^{-1}$.

9°) Inverse d'une matrice diagonale

Voir chapitre sur les puissances de matrices.

VI. Utilisation de la calculatrice (modèle TI-83 Premium CE)

1°) Quelques généralités

La calculatrice permet d'effectuer des opérations sur les matrices.

Elle fournit notamment l'inverse d'une matrice carrée inversible.

Attention, tout ce qui suit ne fonctionne que pour des matrices à coefficients réels.

2°) Différents moyens de rentrer une matrice et d'effectuer des calculs

• 1er moyen

alpha fenêtre choix « MATR »

On entre les coefficients un par un.

• 2e moyen

On appuie sur la touche matrice .

Pour rentrer les coefficients, aller dans ÉDIT.

1 : [A]   1 × 1

On appuie ensuite sur entrer .

À l'écran, on a alors MATRICE[A]   1 × 1

On rentre le format de la matrice en changeant les chiffres 1.

Par exemple, si la matrice A est une matrice carrée d'ordre 3, on tape 3 × 3.

On appuie ensuite sur entrer .

Ensuite, on rentre les coefficients un par un. Attention à utiliser le petit – (celui qui est entre parenthèses).

Une fois les coefficients rentrés, faire 2nde mode .

On appuie ensuite sur la touche matrice .

Sélectionner NOMS et le nom de la matrice sur laquelle on désire faire des calculs.

On peut calculer les puissances de la matrice.

Pour calculer l'inverse (lorsque la matrice est carrée et inversible), taper matrice 1 entrer [A] x^{-1} → inverse

• 3e moyen (pratique pour des programmes avec des matrices)

2nde × [

2nde × $[[a,b[$

2nde – $[[a,b]$

On rentre une deuxième ligne de la même manière $[[a,b][c,d]]$.

Matrice ligne : $[[a,b]]$

Matrice colonne : $[[a][b]]$

3°) Une précision pour les matrices à coefficients entiers

Pour une matrice carrée inversible dont tous les coefficients sont des entiers relatifs, les coefficients de la matrice inverse sont des nombres rationnels.

Pour obtenir les coefficients sous forme de fractions, on taper sur la touche **math** puis MATH   1 : ►Frac.

Une autre méthode consiste à multiplier la matrice obtenue par le déterminant de la matrice que l'on peut également obtenir avec la calculatrice.

4°) Calculatrice Numworks

On peut effectuer la division de deux matrices carrées. Ce n'est cependant pas une opération autorisée pour les matrices. Il s'agit en fait d'une multiplication par l'inverse.

VII. Une application en géométrie

1°) Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs du plan

On munit l'ensemble des vecteurs du plan d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$

On peut écrire $\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice 1 × 1 que l'ont peut assimiler à un réel.

2°) Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

On munit l'ensemble des vecteurs de l'espace d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

On peut écrire $\vec{u} \bullet \vec{v} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'une matrice 1 × 1 que l'ont peut assimiler à un réel.

VIII. Opérations matricielles en Python

On utilise la bibliothèque numpy.

Représentation par un tableau numpy (type np.array)

Le type array du module numpy permet une représentation de tableaux à plusieurs dimensions.
Tous les éléments du tableau sont du même type (tableau homogène).

Additionner ou soustraire deux matrices

On considère deux matrices A et B de même taille.

Pour additionner ou soustraire les matrices A et B, on peut utiliser les opérateur + et – .

```
import numpy as np
A = np.array(([3,1],[6,4]))
B = np.array(([2,5],[0,3]))
C=A+B
print (C)
```

Production :

```
[[5 6]
 [6 7]]
```

Additionner plusieurs matrices de même taille

On peut aussi utiliser l'opérateur + pour additionner plusieurs matrices en même temps.

Multiplier les éléments d'un tableau avec un scalaire (un réel)

En Python, il est très simple de multiplier tous les éléments d'un tableau NumPy par un scalaire.
L'opérateur * du package NumPy peut être utilisé pour cette opération.
L'exemple de code suivant nous montre comment utiliser la méthode * pour multiplier tous les éléments d'un tableau NumPy par un scalaire en Python.

```
import numpy as np
arr = np.array([1, 2, 3])
newarr = arr * 3
print(newarr)
```

Production :

```
[3 6 9]
```

On peut indifféremment écrire `arr * 3` ou `3 * arr`.

Dans le code ci-dessus, nous initialisons d'abord un tableau NumPy en utilisant la fonction numpy.array() puis calculons le produit de ce tableau avec un scalaire en utilisant l'opérateur *.

Ajouter un nombre à tous les éléments d'une matrice

Pour ajouter un nombre à tous les éléments d'une matrice, on peut aussi utiliser l'opérateur + .

```
import numpy as np
A = np.array(([3,1],[6,4]))
B = A + 2
print (B)
```

On peut indifféremment écrire `A + 2` ou `2 + A`.

Production :

```
[[5 3]
 [8 6]]
```

Multiplier deux matrices

On considère deux matrices A et B telles qu'il soit possible d'effectuer le calcul de AB.

Comme mentionné ci-dessus, nous pouvons utiliser l'opérateur * uniquement pour la multiplication scalaire.
Pour aller de l'avant avec la multiplication matricielle, nous devons utiliser la fonction numpy.dot ().

Syntaxe : dot(A,B)

La fonction numpy.dot() prend les tableaux NumPy comme valeurs de paramètre et effectue la multiplication selon les règles de base de la multiplication matricielle.

```
import numpy as np
A = np.array(([3,1],[6,4]))
B = np.array(([2,5],[0,3]))
C=np.dot(A,B)
print (C)
```

Production :

```
[[ 6 18]
 [12 42]]
```