TS spé

Généralités sur les matrices (définitions et vocabulaire)

Définition 1 [vecteur-ligne]

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un **vecteur-ligne de dimension p** est une ligne de p nombres.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 \end{pmatrix}$ est le vecteur-ligne de dimension 3 représentant les notes d'un élève en mathématiques au premier trimestre (12), au deuxième trimestre (10) et au troisième trimestre (14).

Observer la notation d'un vecteur-ligne avec des parenthèses.

Définition 2 [vecteur-colonne]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un **vecteur-colonne de dimension n** est une colonne de n nombres.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$ est le vecteur-colonne de dimension 2 représentant les notes d'un élève du premier trimestre en mathématiques (12) et en économie (13).

Observer la notation d'un vecteur-colonne avec des parenthèses.

Définition 3 [matrice]

Soit n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Une **matrice** A de dimension $n \times p$ ou de format (n, p) est un tableau de nombres, à n lignes et p colonnes, appelés les **coefficients** (ou les termes) de la matrice.

Le coefficient de la matrice A situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne se note $a_{i,\,j}$.
(« C'est juste pour se repérer dans un tableau »).
On utilise une double indexation.

Observer que l'on indique d'abord le nombre de lignes puis ensuite le nombre de colonnes.
Observer que pour $a_{i,\,j}$, on indique le numéro de la ligne puis le numéro de la colonne.

Remarques :

Un **vecteur-ligne** de dimension p est une matrice de format $(1, p)$.

Un **vecteur-colonne** de dimension n est une matrice de format $(n, 1)$.

Exemple :

La matrice de dimension 2×3 ci-dessous représente les notes d'un élève en mathématiques et en économie obtenues aux trois trimestres :

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Tri.1} & \text{Tri.2} & \text{Tri.3} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{mathématiques} \\ \text{économie} \end{array} & \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 \\ 13 & 9 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le coefficient $a_{1,\,2}$ est égal à 10 ; il représente la note de mathématiques du 2^{e} trimestre.
Le coefficient $a_{2,\,1}$ est égal à 13 ; il représente la note d'économie du 1er trimestre.

On observera l'écriture d'une matrice avec des parenthèses.

Vocabulaire :

On parle des lignes et des colonnes de la matrice.

Les coefficients de la matrice peuvent être positifs ou négatifs.

Définition 4 [matrice carrée]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une **matrice carrée d'ordre n** est une matrice ayant le même nombre n de lignes que de colonnes.

Exemple :

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Vocabulaire :

On peut avoir des matrices carrées de n'importe quel ordre.

Lorsqu'une matrice n'a pas le même nombre de lignes que de colonnes, on parle de **matrice rectangulaire**.

Principe d'égalité de deux matrices

Dire que deux matrices de même format sont égales signifie que les coefficients situés à la même place sont égaux.

Définition 5 [matrice identité]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

La **matrice identité d'ordre n**, notée I_n, est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients situés à l'intersection de la i-ième ligne et de la i-ième colonne sont égaux à 1 et dont tous les autres coefficients sont égaux à 0 (on dit que tous les coefficients situés sur la diagonale principale sont égaux à 1 et que les autres sont égaux à 0).

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple :

La matrice identité d'ordre 3 est $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous verrons dans la suite du cours que les matrices identités présentent un intérêt pour les calculs (chapitre « Opérations sur les matrices »).

Définition 6 [matrice nulle]

Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.

La matrice nulle de format (n, p) peut se noter $0_{n,\,p}$.

Nous verrons dans la suite du cours que les matrices identités présentent un intérêt pour les calculs (chapitre « Opérations sur les matrices »).

Définition 7 [opposée d'une matrice]

La **matrice opposée d'une matrice A** de format (n, p) est la matrice notée – A, de format (n, p), dont tous les coefficients sont égaux aux opposés des coefficients de la matrice A situés à la même place.

Exemple :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad -\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 8 [transposée d'une matrice]

La **matrice transposée d'une matrice A** de format (n, p) est la matrice notée ${}^t\mathrm{A}$ de format (p, n) dont les lignes sont égales aux colonnes de la matrice A.

La notation ${}^t\mathrm{A}$ est propre aux matrices.

Exemple :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice (2, 3).
La transposée de A est une matrice (3, 2).

$${}^t\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

De manière générale, si A est une matrice, alors la transposée de A est la matrice $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A}$ définie par : $b_{i,\,j} = a_{j,\,i}$.

Définition 9 [matrice diagonale]

On dit qu'une matrice carrée est une **matrice diagonale** si tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

Exemples :

① La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 2.

② La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3

Remarques :

- La matrice identité d'ordre n est une matrice diagonale particulière.
- On notera que les matrices diagonales sont nécessairement des matrices carrées.

Définition 10 [coefficients diagonaux d'une matrice carrée]

On appelle **coefficients diagonaux** d'une matrice carrée les coefficients dont le numéro de la ligne est égal au numéro de la colonne.

Soit A une matrice carrée d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la matrice A situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.

Les coefficients diagonaux de A sont les coefficients $a_{i,i}$ pour i compris entre 1 et n.

On dit qu'ils forment la **diagonale** de la matrice A.

Définition 11 [matrice symétrique]

On dit qu'une matrice carrée A est une **matrice symétrique** si ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

Soit A une matrice carrée d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

A est symétrique si et seulement si $\forall (i\,;\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \quad a_{j,i} = a_{i,j}$.

Exemple :

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3 symétrique.

Définition 12 [matrice antisymétrique]

On dit qu'une matrice carrée A est une **matrice antisymétrique** si ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$.

Soit A une matrice carrée d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

A est antisymétrique si et seulement si $\forall (i\,;\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$.

Exemple :

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ -4 & 1 & 5 \\ -9 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3 antisymétrique.

Définition 13 [matrice triangulaire]

- On dit qu'une matrice carrée A est **triangulaire supérieure** si tous les coefficients au-dessous (strictement) de la diagonale sont nuls.
- On dit qu'une matrice carrée A est **triangulaire inférieure** si tous les coefficients au-dessous (strictement) de la diagonale sont nuls.

Exemples :

① $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3 triangulaire supérieure.

② $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3 triangulaire inférieure.

Soit A une matrice carrée d'ordre n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On reprend les notations usuelles.

- A est triangulaire supérieure si et seulement si $\forall (i\,;\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- A est triangulaire inférieure si et seulement si $\forall (i\,;\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

Calculatrice Numworks

Pour aller sur les matrices, on appuie sur la boîte à outils et on descend sur la ligne « matrice ».
Les matrices ne sont pas notées avec des parenthèses mais avec des crochets.

Le 6-3-2023

Matrices sur Numworks

Calculs → boîte à outils

Sur la calculatrice Numworks, les matrices sont notées avec des crochets.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Nouvelle matrice ou vecteur

identity(n) permet d'écrire la matrice identité d'ordre n lorsque l'on donne à n une valeur
det(M)
transpose(M)
dim(M)
matrices avec sous-rubriques
vecteurs avec sous-rubriques

Les matrices en Python

① En langage Python, une matrice est une liste de listes (chaque liste est un vecteur ligne, noté avec des crochets).

On utilise la bibliothèque numpy.

② Une matrice de taille $n \times p$ est représentée en Python par une liste de n listes, chacune des sous-listes comportant p éléments.

Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est représentée en Python par

```
A = [[ 1 , 0 , - 2 ], [ 0 , - 1 , 2 ]].
```

③ Il est très facile de convertir une matrice A en tableau numpy :

Il est très facile de convertir une matrice A en tableau numpy :

```
B = np.array(A)
```

Les éléments de B sont maintenant des tableaux numpy (des "array").
les deux syntaxes suivantes donnent accès au même élément
B[0][1]
B[0 , 1]

Oral
Python
MP, PC, PSI, TSI

Calcul matriciel

On travaille avec le module numpy.

import numpy as np

Création de matrices

Pour définir une matrice, on utilise la fonction array du module numpy.

```
>>> A = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> A
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
```

L'attribut shape donne la taille d'une matrice : nombre de lignes, nombre de colonnes.

L'accès à un coefficient de la matrice A se fait à l'aide de l'opération d'indexage A[i, j] où i désigne la ligne et j la colonne. Attention, les indices commencent à zéro !

```
>>> A[1, 0] # terme de la deuxième ligne, première colonne
```

Les fonctions zeros et ones permettent de créer des matrices remplies de 0 ou de 1. La fonction eye permet de créer une matrice du type □ □ où □ est un entier. La fonction diag permet de créer une matrice diagonale.

```
>>> np.zeros((2,3))
array([[ 0., 0., 0.],
       [ 0., 0., 0.]])

>>> np.ones((3,2))
array([[ 1., 1.],
       [ 1., 1.],
       [ 1., 1.]])

>>> np.eye(4)
array([[ 1., 0., 0., 0.],
       [ 0., 1., 0., 0.],
       [ 0., 0., 1., 0.],
       [ 0., 0., 0., 1.]])

>>> np.diag([1,2,3])
array([[1, 0, 0],
       [0, 2, 0],
       [0, 0, 3]])
```