1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur la géométrie dans l'espace (3)

Dans tous les exercices, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1 1°) Représenter le repère $\mathcal{R}$ en perspective ; on placera le point O (origine du repère), les axes du repères et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. On pourra prendre $\mathcal{R}$ orthogonal.
2°) On considère les points A(3 ; 4 ; 5), B(2 ; – 3 ; 3) et C(0 ; 0 ; – 5).

Recopier et compléter les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{\text{OA}} = \ldots\ldots\ \vec{i} + \ldots\ldots\ \vec{j} + \ldots\ldots\ \vec{k}$

$\overrightarrow{\text{OB}} = \ldots\ldots\ \vec{i} + \ldots\ldots\ \vec{j} + \ldots\ldots\ \vec{k}$

$\overrightarrow{\text{OC}} = \ldots\ldots\ \vec{i} + \ldots\ldots\ \vec{j} + \ldots\ldots\ \vec{k}$

Tracer les pointillés correspondant aux coordonnées. Indiquer les valeurs sur les axes.

2 On considère les points A(1 ; 0 ; 0) et B(2 ; 5 ; 4). On note C le symétrique de A par rapport à B.
1°) Faire un graphique.
2°) Calculer les coordonnées de C.

3 Les vecteurs $\vec{u}$ (– 4 ; – 2 ; 1) et $\vec{v}$ (28 ; 14 ; – 7) sont-ils colinéaires ?

4 On donne les vecteurs $\vec{u}$ (2 ; 3 ; 1), $\vec{v}$ (1 ; – 1 ; 2) et $\vec{w}$ (5 ; 5 ; 4).
1°) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2°) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?
On cherchera s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

5 On considère les points A(2 ; 0 ; – 1), B(1 ; – 4 ; 8) et C(7 ; – 12 ; 22).
Calculer $2\overrightarrow{\text{OA}} + 3\overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OC}}$. Que peut-on en déduire pour les points O, A, B, C ?

6 On considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(6 ; 4 ; 2) et C(2 ; 3 ; 4). On note *P* le plan d'équation $z = 1$.
Déterminer le point D de *P* tel que (AB) // (CD).

7 On considère deux points A et B fixés de l'espace ainsi que les vecteurs $\vec{u}$ (– 3 ; – 1 ; 1) et $\vec{v}$ (*a* ; *b* ; 5).
On note *D* et *D'* les droites de repères respectifs $\left(\text{A}, \vec{u}\right)$ et $\left(\text{B}, \vec{v}\right)$.
Déterminer *a* et *b* tels que *D* // *D'*.

Dans les exercices suivants, on suppose que le repère $\mathcal{R}$ est **orthonormé**.

---

8 On considère les points A(2 ; 3 ; 2), B(5 ; 3 ; – 1), C(1 ; 2 ; – 2) et D(– 2 ; 2 ; 1).
Démontrer que ABCD est un losange.

9 Déterminer une équation cartésienne de la sphère *S* de centre A(– 1 ; – 1 ; 0) passant par le point B(2 ; 3 ; 5).

10 Déterminer l'ensemble *S* des points M(*x* ; *y* ; *z*) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 1 = 0$.

11 Déterminer une équation du cylindre de révolution $\mathcal{C}$ d'axe (O*z*) qui contient le point A(2 ; 1 ; 3).

12 Déterminer une équation du cylindre de révolution $\mathcal{C}$ d'axe (O*x*) dont la section par le plan d'équation $x = 1$ est un cercle de rayon 3.

13 Déterminer une équation cartésienne du cône de révolution $\mathcal{C}$ de sommet O, d'axe (O*z*), dont la section par le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de rayon 2.

Indication : On commencera par calculer la mesure du demi-angle au sommet de $\mathcal{C}$.

14 Déterminer la nature de la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $y^2 + z^2 - 3x^2 = 0$.

Corrigé

1

1°) Graphique

• Pour l'axe $(\mathrm{O}x)$, on évite un angle de 45° avec l'axe $(\mathrm{O}y)$.

• On n'est pas obligé de représenter le plan $(x\mathrm{O}y)$.

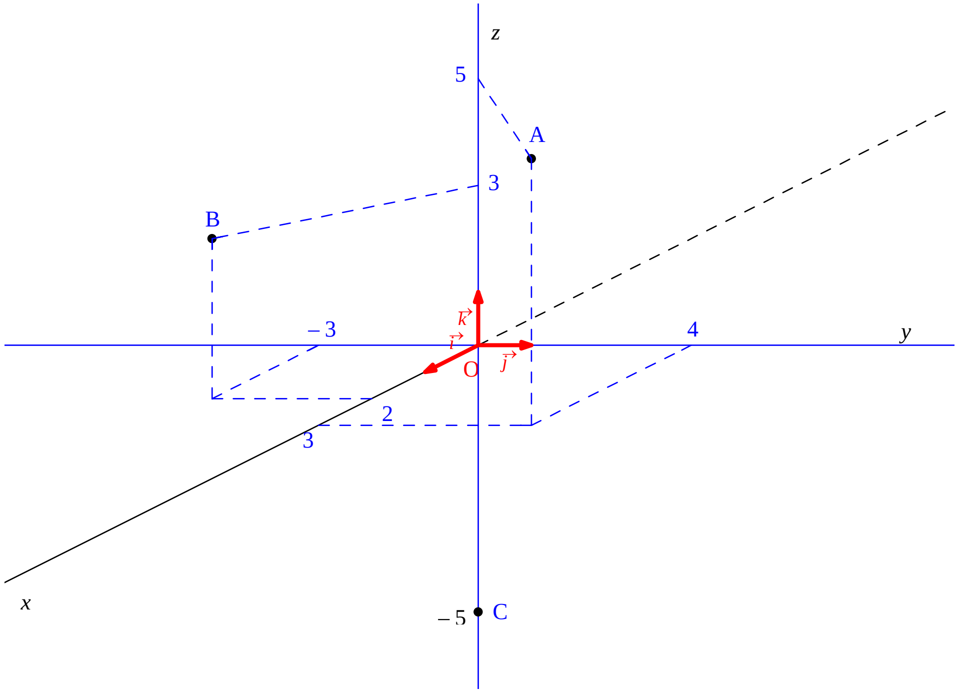
2°) A(3 ; 4 ; 5) B(2 ; – 3 ; 3) C(0 ; 0 ; – 5)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 5\vec{k}$

En général, on n'écrit pas $0\vec{i} + 0\vec{j}$. On écrit directement $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -5\vec{k}$.



2

A(1 ; 0 ; 0) et B(2 ; 5 ; 4)

C : symétrique de A par rapport à B

1°) **Figure (graphique)**

2°) **Calculons les coordonnées de C.**

On peut écrire : $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ou $\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{C}}}{2} \\ y_{\mathrm{B}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{C}}}{2} \\ z_{\mathrm{B}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}}}{2} \end{cases}$ (mieux, c'est ce qui est proposé ci après).

Version rédigée :

C est le symétrique de A par rapport à B signifie que B est le milieu de [AC].

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{C}}}{2} \\ y_{\mathrm{B}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{C}}}{2} \\ z_{\mathrm{B}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}}}{2} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} 2 = \dfrac{1 + x_{\mathrm{C}}}{2} \\ 5 = \dfrac{y_{\mathrm{C}}}{2} \\ 4 = \dfrac{z_{\mathrm{C}}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + x_{\mathrm{C}} = 4 \\ y_{\mathrm{C}} = 10 \\ z_{\mathrm{C}} = 8 \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} x_{\mathrm{C}} = 3 \\ y_{\mathrm{C}} = 10 \\ z_{\mathrm{C}} = 8 \end{cases}$.

Conclusion : C(3 ; 10 ; 8)

$\boxed{3}$ $\vec{u}(-4\ ;-2\ ;1)$ et $\vec{v}(28\ ;14\ ;-7)$

Déterminons si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On observe que $\begin{cases} x_{\vec{v}} = -7x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}} = -7y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{v}} = -7z_{\vec{u}} \end{cases}$.

On a donc $\vec{v} = -7\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Pour cet exercice, on évite d'utiliser le critère de colinéarité vu la simplicité du coefficient à trouver.

$\boxed{4}$

$\vec{u}(2\ ;3\ ;1)$ $\vec{v}(1\ ;-1\ ;2)$ $\vec{w}(5\ ;5\ ;4)$

On commence par écrire sur la première ligne toutes les coordonnées des vecteurs à la verticale (on évite de les écrire à l'horizontale quand on travaille dans l'espace).

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\\4\end{pmatrix}$

1°) **Déterminons si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

On peut voir directement sur les coordonnées que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
On va quand même le démontrer rigoureusement par le calcul.

Cherchons s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (1).

On traduit l'égalité (1) en coordonnées.

$$\begin{cases} x_{\vec{v}} = \lambda x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}} = \lambda y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{v}} = \lambda z_{\vec{u}} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda\times 2 \\ -1 = \lambda\times 3 \\ 2 = \lambda\times 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{3} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution.
Il n'existe donc pas de réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Cherchons s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \lambda\times 1 \\ 3 = \lambda\times(-1) \\ 1 = \lambda\times 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solution.
Il n'existe donc pas de réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Conclusion : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Bilan de la méthode pour cette question :
- on traduit l'égalité (1) en système de trois équations à une inconnue ;
- on voit ensuite que le système n'admet pas de solution.

On pourrait éventuellement utiliser le critère de colinéarité avec les trois déterminants (condition analytique de colinéarité IV. 7°)).

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - 1\times(-1) = 7$$

On calcule le premier déterminant. On s'arrête tout de suite car on trouve un résultat non nul. On peut tout de suite conclure que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2°) **Déterminons si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.**

On utilise la propriété suivante :

> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
> $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On va chercher à savoir si le vecteur $\vec{w}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Cherchons s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ (2).

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5=2\alpha+\beta \\ 5=3\alpha-\beta \\ 4=\alpha+2\beta \end{cases}$ (traduction en coordonnées de l'égalité vectorielle)

> Pour écrire les trois égalités de coordonnées, on pourrait utiliser une écriture matricielle en utilisant les matrices des coordonnées dans l'espace :
> $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le système obtenu est un système linéaire de 3 équations à 2 inconnues (on dit que le système est un système pléthorique ou surabondant en équations par rapport au nombre d'inconnues).
La méthode consiste à résoudre le système formé par les deux premières équations (système linéaire de deux équations à deux inconnues) puis à vérifier si les solutions obtenues vérifient ou non la 3^{e} équation.

> On peut éventuellement résoudre ce système à l'aide de la calculatrice.

On « prend » le système formé par les deux premières équations.

Considérons le système (I) $\begin{cases} 5=2\alpha+\beta \\ 5=3\alpha-\beta \end{cases}$ que l'on peut aussi écrire $\begin{cases} 2\alpha+\beta=5 \\ 3\alpha-\beta=5 \end{cases}$.

Il y a plusieurs méthodes de résolution :

Méthode par substitution :
On isole une inconnue que l'on exprime que l'on exprime en fonction de l'autre et l'on reporte dans l'autre équation.

Méthode par combinaisons linéaires :
On peut additionner membre à membre les deux équations, de sorte que l'inconnue β disparaît, ce qui donne $(2\alpha+\beta)+(3\alpha-\beta)=5+5$.
On obtient $5\alpha=10$ d'où $\alpha=2$.
On remplace α dans l'une des deux équations du système.
En remplaçant α par 2 dans la 1$^{\text{ère}}$ équation, on obtient $2\times2+\beta=5$ d'où $\beta=1$.

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases}$

On vérifie que 2 et 1 sont solutions de la 3^{e} équation car $4=2+2\times1$.

La solution du système (I) est donc le couple (2 ; 1).

En remplaçant α par 2 et β par 1 dans l'égalité (2), on peut donc écrire l'égalité vectorielle $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$.

On en conclut que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Autre méthode :

On utilise un déterminant 3 x 3.

On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ (vérification possible à l'aide de la calculatrice).

On trouve 0.

$\boxed{5}$

A(2 ; 0 ; – 1) B(1 ; – 4 ; 8) C(7 ; – 12 ; 22) (rappel : O est l'origine du repère)

Calculons $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

Rappel : O désigne l'origine du repère donc O a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0).

On calcule les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ en utilisant les propriétés des coordonnées dans l'espace.
La présentation avec une barre comme suit est assez pratique.

$$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\ \left|\ \begin{array}{l} 2x_{\overrightarrow{OA}}+3x_{\overrightarrow{OB}}-x_{\overrightarrow{OC}}=2\times2+3\times1-7=0 \\ 2y_{\overrightarrow{OA}}+3y_{\overrightarrow{OB}}-y_{\overrightarrow{OC}}=2\times0+3\times(-4)-(-12)=0 \\ 2z_{\overrightarrow{OA}}+3z_{\overrightarrow{OB}}-z_{\overrightarrow{OC}}=2\times(-1)+3\times8-22=0 \end{array}\right.$$

Donc $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (1).

Déduisons-en une propriété pour les points O, A, B, C.

(1) permet d'écrire $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ $(1')$.

L'égalité $(1')$ montre que le vecteur $\overrightarrow{OC}$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

On en déduit que vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires et, par suite, comme ils ont la même origine, on en déduit que les points O, A, B, C sont coplanaires.

Autre méthode :

A(2 ; 0 ; – 1) donc $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{k}$

B(1 ; – 4 ; 8) donc $\overrightarrow{OB} = \vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$

C(7 ; – 12 ; 22) donc $\overrightarrow{OC} = 7\vec{i} - 12\vec{j} + 22\vec{k}$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} &= 2\left(2\vec{i} - \vec{k}\right) + 3\left(\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}\right) - \left(7\vec{i} - 12\vec{j} + 22\vec{k}\right) \\ &= 4\vec{i} - 2\vec{k} + 3\vec{i} - 12\vec{j} + 24\vec{k} - 7\vec{i} + 12\vec{j} - 22\vec{k} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.

Cette égalité permet d'affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires.

Par suite, les points O, A, B, C sont coplanaires.

$\boxed{6}$ **Solution détaillée :**

A(1 ; 2 ; 3) B(6 ; 4 ; 2) C(2 ; 3 ; 4)

$P : z = 1$

P est l'ensemble des points de l'espace dont la cote (c'est-à-dire la 3^e coordonnée) est égale à 1.
Les points de l'espace qui ont tous une cote égale à 1 sont situés dans un plan (facile à visualiser) forment un plan « horizontal » (ou parallèle à (*x*O*y*)).

Si on fait un graphique (ce qui n'est pas demandé dans l'énoncé), le plan *P* est le plan parallèle au plan (*x*O*y*) passant par le point de coordonnées (0 ; 0 ; 1) (on prend ce point : c'est le point d'intersection de *P* et de l'axe (O*z*)).
Sur le graphique, on peut représenter le plan (*x*O*y*) et le plan *P*.
Le point de coordonnées (0 ; 0 ; 1) sert juste à bien représenter le plan *P* sur le graphique.

P // (*x*O*y*) car *P* admet une équation de la forme $z = \text{c}^{\text{te}}$.

Déterminons le point D de *P* tel que (AB) // (CD).

$D \in P$ donc $z_D = 1$ (on connaît donc la cote de D ; on va donc chercher les deux autres coordonnées de D, à savoir son abscisse x_D et son ordonnée y_D).

On doit avoir (AB) // (CD).

On utilise la propriété :

(AB) // (CD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

On peut traduire cette condition par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ (1) (λ : coefficient de colinéarité).

On va traduire (1) en coordonnées (3 égalités de coordonnées).

$\overrightarrow{AB}(5 ; 2 ; -1)$

$\overrightarrow{CD}\left(x_D - 2 ; y_D - 3 ; -3\right)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 5\lambda \\ y_D - 3 = 2\lambda \\ -3 = -\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 17 \\ y_D = 9 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

D(17 ; 9 ; 1)

Il vaut mieux écrire $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ plutôt que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

Avec la deuxième égalité, on obtient : $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \lambda\left(x_D - 2\right) \\ 2 = \lambda\left(y_D - 3\right) \\ -1 = \lambda \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3} \\ x_D = 17 \\ y_D = 9 \end{cases}$.

On pourrait éventuellement utiliser le critère de colinéarité.

$\boxed{7}$ $a = -15$ et $b = -5$

Solution détaillée :

D : droite de repère $\left(A, \vec{u}\right)$ avec A point fixé et $\vec{u}(-3 ; -1 ; 1)$

D' : droite de repère $\left(B, \vec{v}\right)$ avec B point fixé et $\vec{v}(a ; b ; 5)$ $\left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right)$

D est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

D' est la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Déterminons *a* et *b* tels que *D* // *D'*.

On va utiliser la propriété suivante :

Soit D et D' deux droites de l'espace.
On note $\vec{u}$ un vecteur directeur de D et $\vec{v}$ un vecteur directeur de D'.
$D // D' \Leftrightarrow \vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$

On détermine a et b pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Les points A et B ne jouent aucun rôle.

On peut rédiger en chaîne d'équivalences.

$D \mathbin{//} D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

$\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} a = -3\lambda \\ b = -\lambda \\ 5 = \lambda \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -15 \\ b = -5 \end{cases}$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $D \mathbin{//} D'$ est $a = -15$ et $b = -5$.

On pourrait éventuellement utiliser le critère de colinéarité dans l'espace.

8

A(2 ; 3 ; 2) **B(5 ; 3 ; – 1)** **C(1 ; 2 ; – 2)** **D(– 2 ; 2 ; 1)**

Repère orthonormé.

Démontrons que ABCD est un losange.

Le plus simple – le plus court - est d'utiliser la propriété suivante :

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.

On procède en deux temps :

① On démontre que les points A, B, C, D sont coplanaires et que ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{\text{AB}} \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{\text{DC}} \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix}$

On a donc $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{DC}}$.

Par conséquent, les points A, B, C, D sont coplanaires et ABCD est un parallélogramme.

② On démontre qu'on a deux côtés consécutifs de même longueur.

On calcule les coordonnées de deux vecteurs puis on applique la formule de calcul de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée (mieux que la formule de distance entre deux points dans un repère orthonormé).

$\text{AB} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{\text{BC}} \begin{vmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ donc $\text{BC} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

On peut éventuellement calculer uniquement les carrés des deux distances (évite d'avoir de grands radicaux).

On a donc $\text{AB} = \text{BC}$.

Or un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Donc ABCD est un losange.

Remarque :
La première partie où l'on a démontré que ABCD est un parallélogramme est importante car elle prouve que les points A, B, C, D forment un quadrilatère plan.
Dans l'espace, il ne suffit pas de démontrer que tous les côtés ont la même longueur pour démontrer qu'il s'agit d'un losange. En effet, les points doivent être coplanaires pour que la figure soit un losange.

9 A(– 1 ; – 1 ; 0) B(2 ; 3 ; 5)

Déterminons une équation cartésienne de la sphère *S* de centre A passant par B.

On calcule $\text{AB}^2 = (2+1)^2 + (3+1)^2 + 5^2 = 50$.

Une équation de S s'écrit $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2 = 50$.

Donc S a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 48 = 0$.

Autre version notée sur une feuille :

Une équation de S s'écrit $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$ soit $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 48 = 0$.

10 **Déterminons l'ensemble S des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+6z-1=0$.**

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M}\in S \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2+6z-1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+y^2+(z+3)^2-9-1=0$ (mise sous forme canonique des trinômes du second degré x^2-2x et z^2+6z)

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+3)^2-11=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z+3)^2=11$

On en déduit que S est la sphère de centre $\Omega(1\,;0\,;-3)$ et de rayon $\sqrt{11}$.

Autre version notée sur une feuille :

$x^2+y^2+z^2-2x+6z-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z+3)^2=\left(\sqrt{11}\right)^2$

S est la sphère de centre Ω(1 ; 0 ; – 3) et de rayon $\sqrt{11}$.

11

$\mathcal{C}$: cylindre de révolution d'axe (Oz) qui passe par le point A(2 ; 1 ; 3)

Il faut commencer par faire une figure.

On sait que $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2+y^2=R^2$ où R désigne le rayon de $\mathcal{C}$.

R est égal à la distance de A à l'axe $(\mathrm{O}z)$: on peut écrire $R=\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{O}z)$.

$R^2={x_\mathrm{A}}^2+{y_\mathrm{A}}^2=2^2+1^2=5$ (formule donnant le carré de la distance d'un point à l'axe des cotes)

On peut éventuellement introduire le point H, projeté orthogonal de A sur l'axe $(\mathrm{O}z)$.
Cela rallonge un peu. Il est préférable d'utiliser directement la formule donnant la distance d'un point à l'un des axes du repère.

Le cylindre $\mathcal{C}$ a donc pour équation $x^2+y^2=5$.

12 Le cylindre $\mathcal{C}$ a pour équation $y^2+z^2=9$.

13 Soit α la mesure en radians du demi-angle au sommet.

On a : $\tan\alpha=\dfrac{2}{5}$ (faire une figure pour s'en rendre compte).

Le cône $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2-\dfrac{4}{25}z^2=0$.

14 $\mathcal{S}$ est le cône de révolution de sommet, d'axe (Ox), de demi-angle au sommet 60° $\left(\tan 60°=\sqrt{3}\right)$.