TS

Exercices sur la fonction exponentielle (2)

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{3}$, on demande de déterminer les ensembles de définition de *f* et de dérivabilité de *f* puis de calculer la dérivée de *f*.

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$ $\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$ $\boxed{3}$ $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x+1}$

Dans les exercices $\boxed{4}$ à $\boxed{9}$, on demande de déterminer la limite de *f* en + ∞.
Dans le cas de transformations d'écriture, bien préciser pour quelles valeurs de *x* ces transformations d'écriture sont valables.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2+3}$ $\boxed{5}$ $f : x \mapsto (2x-5)\mathrm{e}^{-4x}$ $\boxed{6}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ $\boxed{7}$ $f : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^x-x}{x^2}$

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $\boxed{9}$ $f : x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{3x-4}$. Déterminer la limite de *f* en – ∞.

$\boxed{11}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}-x+3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier le sens de variation de *f* (on détaillera le signe de $f'(x)$) et les limites de *f*.
Calculer l'extremum de *f* (valeur exacte).
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ.
3°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction O*y* en + ∞.
4°) Faire un petit tableau de valeurs puis tracer $\mathcal{C}$ et Δ en prenant 1 cm pour unité graphique.

Tracer la tangente horizontale ainsi que la tangente *T* au point A d'abscisse 0.

Bien mettre les pointillés pour les coordonnées du point correspondant au minimum (en abscisse et en ordonnée **avec les valeurs exactes** sur les axes).

Vérifier sur la calculatrice graphique.

Corrigé

$\boxed{1}$ **$f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$**

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que composée de fonction dérivables.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = -\dfrac{7}{(x-2)^2}\mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$

Solution détaillée :

$f(x)$ existe si et seulement si $x-2 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ en tant que composée de fonction dérivables.

On pose $u(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$ (formule de dérivation d'une fonction du type e^u *)

$$= \frac{2(x-2) - 1\times(2x+3)}{(x-2)^2} \times \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$$

$$= \frac{2x-4-2x-3}{(x-2)^2} \times \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$$

$$= -\frac{7}{(x-2)^2}\mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$$

* C'est un cas particulier de la formule de dérivation d'une composée $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ qui s'écrit : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$.

On l'applique ici avec $u(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

$\boxed{2}$ **$f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$**

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1 - 2x\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}$

Solution détaillée :

$f(x)$ existe si et seulement si $\mathrm{e}^{2x} - 1 \neq 0$

si et seulement si $\mathrm{e}^{2x} \neq 1$

si et seulement si $2x \neq 0$

si et seulement si $x \neq 0$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{1\times(\mathrm{e}^{2x}-1) - x \times 2\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}$ (formule dérivation d'un quotient)

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1 - 2x\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}$$

$\boxed{3}$ **$f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x + 1}$**

Solution détaillée :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x \geqslant 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

L'idée pour les limites est toujours se ramener à des limites de référence avec exponentielle pure.

$\boxed{4}$ **$f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2+3}$**

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{2 + \frac{3}{x^2}}$ pour tout réel $x \neq 0$; on ne peut pas appliquer la règle sur les monômes car f n'est pas une fonction rationnelle.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Solution détaillée :

$D_f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^2+3\right) = +\infty\end{array}\right\}$$ donc en $+\infty$, on rencontre une F.I. du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{2+\dfrac{3}{x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ (limite de référence, croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2+\dfrac{3}{x^2}} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto (2x-5)e^{-4x}$

$D_f = \mathbb{R}$; $X = -4x$; $f(x) = -\dfrac{Xe^X}{2} - 5e^X$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Méthode :
On effectue un changement de variable.
On prend l'exposant de l'exponentielle comme nouvelle variable : $X = -4x$.

Solution détaillée :

$D_f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-5) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x} = 0 \quad \text{(limite déduite par changement de variable de la limite de référence } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\text{)}\end{array}\right\}$$ donc en $+\infty$, on rencontre une F.I. du type « $0 \times \infty$ ».

On pose $X = -4x$ d'où $x = -\dfrac{X}{4}$.

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to -\infty)$

$$f(x) = \left(-\frac{X}{2} - 5\right)e^X = -\frac{Xe^X}{2} - 5e^X$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to-\infty} \left(-\dfrac{Xe^X}{2}\right) = 0 \text{ (limite de référence, croissance comparée)} \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \left(-5e^X\right) = 0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme

$\lim\limits_{X\to-\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Il n'y a aucune autre méthode satisfaisante.

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{e^x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} \times \dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}} \times \dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{e^x}}$ pour tout réel $x \neq 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution détaillée :

$D_f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+3x-1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x+1\right) = +\infty\end{array}\right\}$$ donc en $+\infty$, on rencontre une F.I. du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{e^x}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}} \times \frac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{e^x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{e^x}\right) = 1\end{array}\right\}$$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Autre méthode pas satisfaisante proposée par Diego Blétry le mardi 4-2-2014 :

On pose $X=-x$ d'où $x=-X$.

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to -\infty)$

$$f(x)=\frac{(-X)^2-3X-1}{\dfrac{1+e^X}{e^X}}$$

$$=\frac{X^2e^X-3Xe^X-e^X}{1+e^X}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X^2e^X-3Xe^X-e^X\right)=0\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\left(1+e^X\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Autre méthode pas satisfaisante proposée par Diego Blétry le mardi 4-2-2014 :

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x+1}+\frac{3x}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}$$

$\boxed{7}$ $f: x \mapsto \dfrac{2e^x-x}{x^2}$

$D_f=\mathbb{R}^*$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Solution détaillée :

$D_f=\mathbb{R}^*$

Au numérateur, on rencontre une F.I. du type « $\infty-\infty$ ».

On effectue une réécriture en séparant en deux quotients.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x)=2\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}$ (en effet, $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{e^x}{x^2}\right)=+\infty \quad \text{(théorème de croissance comparée)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Autre démonstration : à éviter

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2}\left(2-\frac{x}{e^x}\right)$$

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2}\left(2-\frac{1}{\dfrac{e^x}{x}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty \quad \text{(théorème de croissance comparée)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}\right)=2\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

$\boxed{8}$ $f: x \mapsto x^3e^{-\sqrt{x}}$

$D_f=\mathbb{R}_+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (changement de variable $X=-\sqrt{x}$; on a donc : $X^2=x$; $f(x)=X^6e^X$)

Solution détaillée :

$f(x)$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$

$D_f=\mathbb{R}_+$

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

On pose $X=-\sqrt{x}$ donc $x=X^2$.

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to -\infty)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x)=X^6e^X$

$\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X^6e^X\right)=0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Remarque signalée par Théo Regnier-Vigouroux (élève de Terminale 4 spécialité durant l'année scolaire 2020-2021) le vendredi 5 février 2021 :
Lorsque l'on trace la fonction sur la calculatrice, on a l'impression qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Il ne faut pas se fier à la calculatrice.
Néanmoins, on voit que la limite de f en $+\infty$ est bien 0 en dézoomant.

$\boxed{9}$ $f: x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$

$D_f=\mathbb{R}_+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (pas de changement de variable ; faire la réécriture $f(x)=\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $\boxed{x>0}$)

Autre façon de faire : $f(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$

Solution détaillée :

$D_f=\mathbb{R}_+$

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=\sqrt{x}\times\frac{1}{\mathrm{e}^x}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x\times\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x}{\mathrm{e}^x\times\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Version initiale $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=\sqrt{x}\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}=0$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}}=0\\&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'un produit }\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Autre démonstration possible (mais à éviter) :

On pose $X=-x\Leftrightarrow x=-X$.

$(x\to+\infty)\Leftrightarrow(X\to-\infty)$

$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad f(x)=\sqrt{-X}\,\mathrm{e}^X$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

Idée : $x\mathrm{e}^x>\sqrt{x}\mathrm{e}^x>0$ théorème des gendarmes

$\boxed{10}$ $f: x\mapsto x\mathrm{e}^{3x-4}$

$D_f=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ (changement de variable $X=3x$; $f(x)=\dfrac{X\mathrm{e}^X}{3\mathrm{e}^4}$)

Solution détaillée :

$D_f=\mathbb{R}$

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

On pose $X=3x\Leftrightarrow x=\dfrac{X}{3}$.

$(x\to-\infty)\Leftrightarrow(X\to-\infty)$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\frac{X}{3}\mathrm{e}^{X-4}$$
$$=\frac{X}{3}\times\mathrm{e}^X\times\mathrm{e}^{-4}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-4}}{3}\times X\mathrm{e}^X$$

$=\dfrac{1}{3\mathrm{e}^4}\times X\mathrm{e}^X$ (2 dernières lignes pas forcément utiles, on peut s'arrêter à la ligne

$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{3}\times X\mathrm{e}^X$)

$=\dfrac{X\mathrm{e}^X}{3\mathrm{e}^4}$ (étape facultative)

$\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X\mathrm{e}^X\right)=0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ (car $3\mathrm{e}^4$ est une constante, elle ne contient pas de x)

Remarques :

1. Pour la fin, on peut aussi écrire (mais ce n'est pas très utile) :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X\mathrm{e}^X\right)=0\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\left(3\mathrm{e}^4\right)=3\mathrm{e}^4\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

2. On peut aussi poser $X=3x-4$.
Les calculs sont un peu plus longs (la démarche est un peu maladroite).

$$f(x)=\frac{X+4}{3}\mathrm{e}^X=\frac{X\mathrm{e}^X+4\mathrm{e}^X}{3}$$

$\boxed{11}$ $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}-x+3$

1°) $D_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-1$

Il faut résoudre deux inéquations et une équation.

$2\mathrm{e}^{2x}-1>0\quad(1)$	$2\mathrm{e}^{2x}-1<0\quad(2)$	$2\mathrm{e}^{2x}-1=0\quad(3)$
$(1)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>\frac{1}{2}$	$(2)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}<\frac{1}{2}$	$(3)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x}>\ln\frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x}<\ln\frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x}=\ln\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2x>-\ln 2$	$\Leftrightarrow 2x<-\ln 2$	$\Leftrightarrow 2x=-\ln 2$
$\Leftrightarrow x>-\frac{\ln 2}{2}$	$\Leftrightarrow x<-\frac{\ln 2}{2}$	$\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 2}{2}$

Rappel : $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$

Ordre plus logique ? : $2\mathrm{e}^{2x}-1<0$ (2) $2\mathrm{e}^{2x}-1=0$ (3) $2\mathrm{e}^{2x}-1>0$ (1)

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\ln 2+7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{\ln 2}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\ln 2}{2}\,;+\infty\right[$.

$f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{7+\ln 2}{2}$ (le calcul du minimum global n'est pas très difficile ; il nécessite de bien utiliser les règles).

Calcul du minimum global :

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)&=\mathrm{e}^{2\times\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)}+\frac{\ln 2}{2}+3\\&=\mathrm{e}^{-\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}+3\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}}+\frac{\ln 2}{2}+3\\&=\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}+3\\&=\frac{1+\ln 2+6}{2}\\&=\frac{\ln 2+7}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{En }+\infty}$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

Ecrire $f(x)=x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}\right)$ pour $x\neq 0$ puis éventuellement changement de variable pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}=+\infty\text{ (théorème de croissance comparée)*}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}\right)=-1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme }\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}\right)=+\infty.$$

* Avec le changement de variable $X=2x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\text{ (théorème de croissance comparée)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit }\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

$\boxed{\text{En }-\infty}$, pas de changement de variable.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x+3)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme }\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

Les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ sont égales à $+\infty$.

2°) **Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique.**

On observe l'expression de f (méthode pour démontrer qu'une courbe admet une asymptote quand cette asymptote n'est pas donnée) :

$$f(x) = \underbrace{-x+3}_{\text{partie affine}} + \underbrace{e^{2x}}_{\text{partie qui tend vers 0 lorsque } x \text{ tend vers } -\infty}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (-x+3) = e^{2x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-x+3) \right] = \lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = -x+3$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

N.B. : Il est inutile d'écrire que $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-x+3) \right] = +\infty$.

L'étude de la branche infinie en $+\infty$ sera faite à la question suivante.

3°) **Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (O*y*) en $+\infty$.**

On applique la méthode du cours pour démontrer qu'une courbe admet une branche parabolique.

On étudie $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{2x} - x + 3}{x} = \frac{e^{2x}}{x} - 1 + \frac{3}{x}$$

Pour déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x}$, il y a 2 possibilités :

- changement de variable ;
- réécriture $\dfrac{e^{2x}}{x} = \dfrac{e^{x}}{x} \times e^{x}$.

On trouve : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \dfrac{3}{x} \right) = -1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction O*y* en $+\infty$.

4°)

$\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $\left(-\dfrac{\ln 2}{2} ; \dfrac{\ln 2 + 7}{2} \right)$.

$$-\frac{\ln 2}{2} = -0{,}346573590...$$

$$f\left(-\frac{\ln 2}{2} \right) = 3{,}8465735...$$

L'ordonnée du point A est donné par $f(0) = 4$.

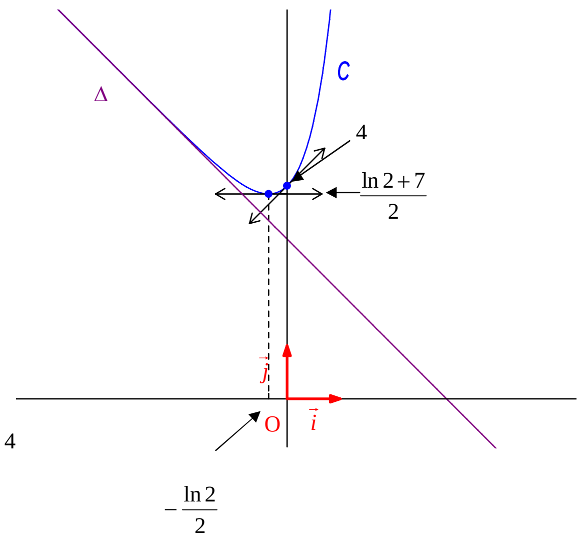
T a pour coefficient directeur $f'(0) = 2e^{2 \times 0} - 1 = 1$.

On utilise le coefficient directeur pour tracer T.

[T a donc pour équation $y = x + 4$; cette équation n'est cependant pas utile pour tracer T]

On pourra remarquer que $T \perp \Delta$.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	9	8	7	6	5	4,1	4	9,3	55,6	403



$\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (O*y*) en $+\infty$.

Croissances comparées pour les fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances en + ∞

Logarithme	+ faible
Fonction puissance	
Fonction exponentielle	+ fort