TS

Exercices sur la limite d'une composée de fonctions

On pourra utiliser l'application photomath pour certaines limites.

1 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2 On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin 5x}{x}$.

Déterminer la limite de f en 0.

5 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Déterminer la limite de f en 0.

6 1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{E}(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{E}(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{E}(ax)}{\mathrm{E}(bx)}$ où a et b sont deux réels non nuls.

On pourra se contenter de faire la démonstration dans le cas où a et b sont strictement positifs.

7 On admet le théorème suivant, dit théorème de limite de composée « suite-fonction ».

> On considère une suite (x_n) et une fonction f telle que toutes les valeurs de la suite appartiennent à l'intervalle de définition de f.
>
> Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sin\dfrac{2}{n}\right)$.

Pour la première limite, on utilisera la limite suivante $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

8 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Indications :

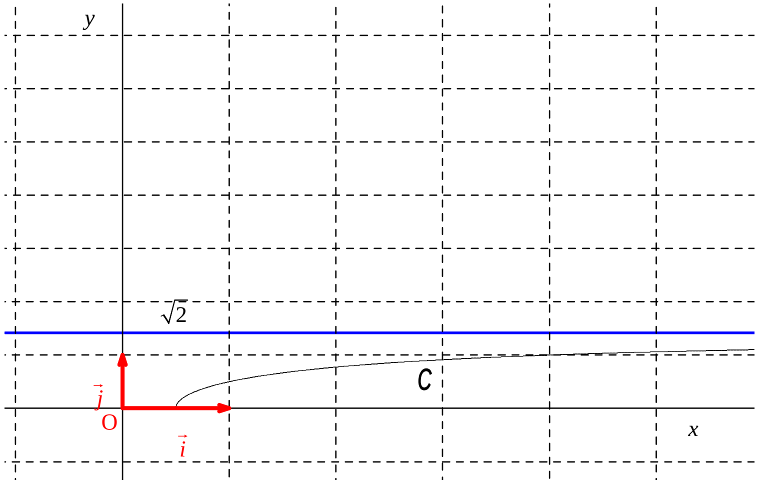
- Écrire $u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
- Utiliser la limite de référence $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ vue dans le chapitre « Logarithme népérien (2) ».

Corrigé

$\boxed{1}$ $\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-3[\,\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ (par tableau de signes) ; $\lim\limits_{+\infty} f = \sqrt{2}$ (limite d'une composée)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$



$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+3} \geqslant 0 \end{cases}$.

Étudions le signes de $\dfrac{2x-1}{x+3}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
Signe de $x+3$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{2x-1}{x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0^{num}	$+$	

$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-3[\,\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Remarque : Il ne faut pas transformer $f(x)$ en $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+3}}$.

Pour trouver un ensemble de définition, on raisonne sur la forme de base.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{2x-1}{x+3}}_{X} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2 \;^{*} \\ \lim\limits_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2} \end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

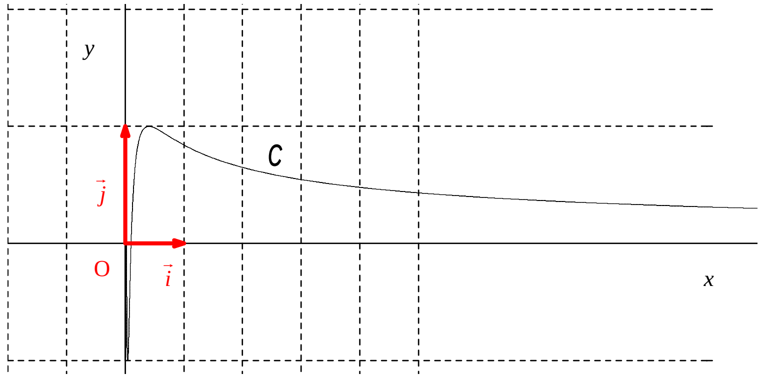
* On applique la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré pour une fonction rationnelle non nulle en $+\infty$ ou en $-\infty$.

La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \sqrt{2}$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

$\boxed{2}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$; $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (limite d'une composée)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$



$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

On trouve $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

On peut écrire $f = v \circ u$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $v(x) = \sin x$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}_{X} = 0 \;^{*} \\ \lim\limits_{X\to 0} \sin X = 0 \;^{**} \end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

* On pourrait écrire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0^{+}$ mais la précision donnée par le + ne sert pas du tout pour la suite donc cela ne sert à rien de le mettre.

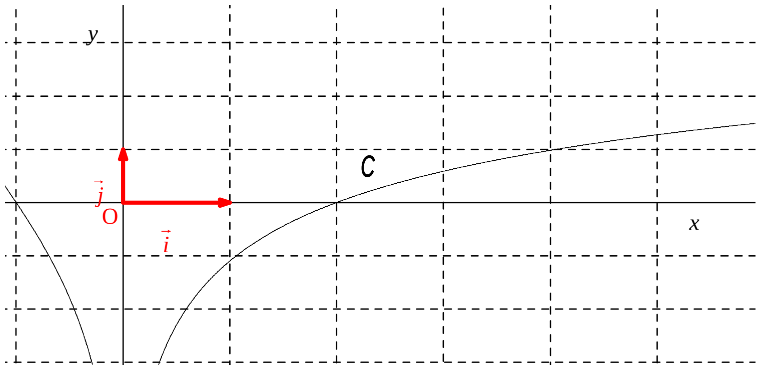
** On utilise $\sin 0 = 0$.

La courbe représentative de *f* admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

$\boxed{3}$ $D_f =]-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (limite d'une composée)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \ln \dfrac{x^2}{x+2}$



$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+2} > 0 \end{cases}$.

On fait un tableau de signes pour $\dfrac{x^2}{x+2}$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de x^2		$+$		$+$	0^{num}	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{x^2}{x+2}$		$-$	$\|\|$	$+$	0^{num}	$+$	

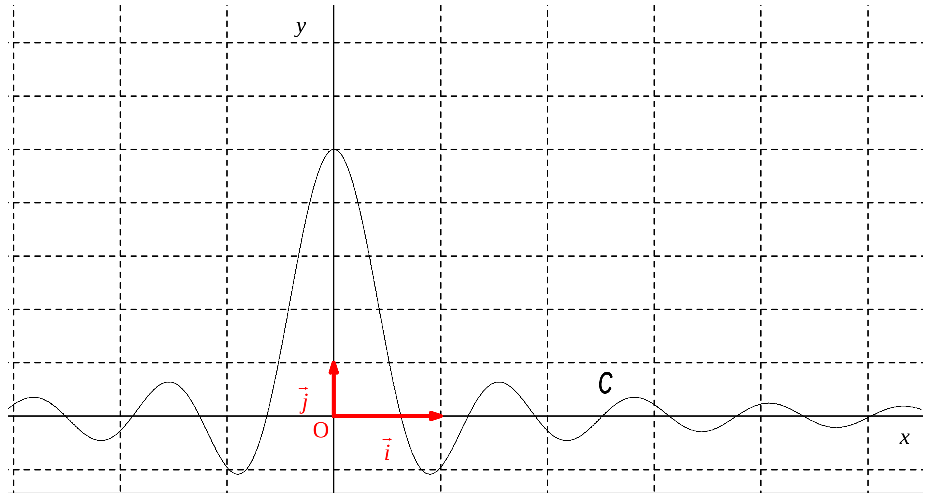
$D_f =]-2\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{x^2}{x+2}}_{X} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \;^{*} \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \text{donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

* On applique la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré qui permet de déterminer la limite d'une fonction rationnelle non nulle en $+\infty$ ou en $-\infty$.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{\sin 5x}{x}$

Déterminons la limite de *f* en 0.



La recherche de l'ensemble de définition n'a pas grand intérêt ici (c'est $\mathbb{R}^*$).

Attention, à la convention d'écriture $\sin 5x = \sin(5x)$.

Pour déterminer la limite de *f* en 0, on utilise la méthode de changement de variable (réécriture).
Il n'y a pas d'autre façon de faire (le théorème des gendarmes ne marche pas en 0 ; il ne marche qu'en $+\infty$ et $-\infty$).

$X = 5x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X}{5} = x$

$(x \to 0) \quad \Leftrightarrow \quad (X \to 0)$

On effectue la réécriture de l'expression en fonction de *X*.

$\dfrac{\sin 5x}{x} = 5 \dfrac{\sin X}{X}$

$\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (limite de référence)

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=5}$.

Autre méthode :

On utilise les dérivées.

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad \frac{\sin 5x}{x}=\frac{\sin 5x-\sin(5\times 0)}{x-0}$$

Ce quotient est le taux d'accroissement de la fonction $u : t\mapsto \sin 5t$ entre 0 et x.

Or la fonction u est dérivable en 0.
Donc la limite en 0 de ce taux est le nombre dérivé de la fonction u en 0.

Or $\forall t\in\mathbb{R} \quad u'(t)=5\cos 5t$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\times\cos(5\times 0)=5\times 1=5$.

$\boxed{5}$ $f : x\mapsto \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Déterminons la limite de f en 0.

On effectue la réécriture $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{2}{3}$.

Comme toujours, la réécriture est plus compliquée mais elle va permettre de simplifier la recherche.

On peut ainsi utiliser ensuite la limite de référence $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$.

Grâce à la limite d'une composée (non détaillée ici), on a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$ d'où par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{1}{1}=1$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ avec $l\in\mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{l}$.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2}{3}}$.

On peut utiliser l'application photomath.

On peut retrouver certaines limites graphiquement.

$\boxed{6}$

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{E}(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{E}(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$

Par définition de la partie entière, on a $\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x)\leqslant x<\mathrm{E}(x)+1$ (1).
Donc $\mathrm{E}(x)+1>x$.
D'où $\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x)>x-1$.

On a $\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x)\geqslant x-1$ (une inégalité stricte entraîne une inégalité large)
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$
Donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{E}(x)=+\infty$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x)\leqslant x$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$
On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{E}(x)=-\infty$.

D'après (1), $\forall x\in\mathbb{R} \quad \mathrm{E}(x)\leqslant x$ (i) et $x<\mathrm{E}(x)+1$.
Donc $\mathrm{E}(x)>x-1$ (ii).
D'où (i) et (ii) donnent $x-1<\mathrm{E}(x)\leqslant x$.

Par conséquent, $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{x-1}{x}<\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}\leqslant\dfrac{x}{x}$ soit $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{x-1}{x}<\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}\leqslant 1$ que l'on peut encore écrire $1-\dfrac{1}{x}<\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}\leqslant 1$ (qui entraîne $1-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}\leqslant 1$).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}=1$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}=1$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}(ax)}{\mathrm{E}(bx)}$ où a et b sont deux réels non nuls.

On effectue une réécriture : $\dfrac{\mathrm{E}(ax)}{\mathrm{E}(bx)}=\dfrac{\mathrm{E}(ax)}{ax}\times\dfrac{bx}{\mathrm{E}(bx)}\times\dfrac{a}{b}$.

On se place dans le cas où $a>0$ et $b>0$.

D'après la question 1°), $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}(X)}{X}=1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{E}(ax)}{\mathrm{E}(bx)}=\dfrac{a}{b}$.

On peut faire pareil dans les trois autres cas.

$\boxed{7}$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{2}{n}\right)$.

• $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$.

On considère :

la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{1}{n}$;

la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

$u_n = f(x_n)$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ [$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite de référence)].

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

• $v_n = n\sin\frac{2}{n}$

On rencontre une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_n = \dfrac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\times 2$

On considère :

la suite (y_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $y_n = \frac{2}{n}$;

la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

$v_n = g(y_n)\times 2$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ [$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (limite de référence)].

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n) = 1$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

$\boxed{8}$ Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

Indications :

• Écrire $u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

• Utiliser la limite de référence $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ vue dans le chapitre « Logarithme népérien (2) ».

On rencontre une forme indéterminée du type « 1^∞ ».

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ (limite trouvée dans l'exercice précédent) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.

Il s'agit d'une convergence lente comme on s'en rend compte à la calculatrice.