TS

Fonction exponentielle (2)

Plan du chapitre :

I. Limites de la fonction exponentielle en + ∞ et en – ∞

1°) Comparaison de e^x et x

On a vu dans le chapitre sur la convexité que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x \geqslant x+1$ (en effet, la fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation $y = x+1$).

Cette inégalité entraîne $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > x$.

Autre méthode : On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

2°) Limite en + ∞

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}$.

3°) Limite en – ∞

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ (limite d'une composée).

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0}$.

Conséquence graphique :

La courbe représentative de la fonction exponentielle admet l'axe $(\mathrm{O}x)$ pour asymptote horizontale en $-\infty$.
Ce résultat permet évidemment de donner l'allure correcte de la courbe représentative de la fonction exponentielle lorsqu'on la trace.

4°) Tableau de variation complet de la fonction exponentielle

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	↗	$+\infty$

On peut noter que, graphiquement, $\mathscr{C}_{\exp}$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

Lorsque $x \to -\infty$, $\mathscr{C}_{\exp}$ se rapproche indéfiniment de l'axe $(\mathrm{O}x)$ (d'après le sens de variation).

II. Limites de la fonction exponentielle par croissance comparée

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On reprend l'inégalité du **I. 1°)** en remplaçant x par $\dfrac{x}{2}$.

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ (on peut élever au carré les deux membres de l'inégalité car les deux membres sont positifs ou nuls) ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{4}$.

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{4}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ donc par l'extension du théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$.

Conséquence graphique :

La courbe représentative de la fonction exponentielle admet une branche parabolique de direction (Oy) en + ∞.
La notion de branche parabolique sera peu développée cette année.
On peut simplement signaler une interprétation toute simple.
En effet, soit M un point quelconque de la courbe de la fonction exponentielle d'abscisse $x \neq 0$ (faire un graphique).

Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\dfrac{e^x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ signifie que le coefficient directeur de la droite (OM) tend vers + ∞ lorsque $x \to +\infty$.

Complément sur les branches paraboliques des courbes représentatives de fonctions :

En + ∞ :

• Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, on dira que la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction (Oy) lorsque x tend vers + ∞.

• Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, on dira que la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction (Ox) lorsque tend vers + ∞.

En – ∞ :
On a les mêmes résultats, moyennant certaines adaptations.

Par passage à l'inverse, on peut en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.

On ne retiendra cependant pas cette limite comme limite de référence. On ne retiendra que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^x\right)$

On rencontre une F.I. du type « $0 \times \infty$ ».

On procède par changement de variable.

On pose $\quad x = -X \Leftrightarrow X = -x$

$\quad (x \to -\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

On effectue une réécriture.

$xe^x = -Xe^{-X}$

$= -\dfrac{X}{e^X}$

$= -\dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{X \to +\infty} (1) = 1 \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \text{ (limite du 1°)} \end{array}\right\} \text{ donc par quotient } \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}} \right) = 0.$$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) = 0$.

$$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^x\right) = 0}$$

III. Limite reliée au nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0

1°) Propriété

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$$

2°) Démonstration

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \left(e^x - 1\right) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \end{array}\right\} \text{ On rencontre une FI du type « } \dfrac{0}{0} \text{ ».}$$

On effectue une réécriture du quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$

Ce quotient est le taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et x.

Or la fonction exponentielle est dérivable en 0.
Donc la limite en 0 de ce taux de variation est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

Or $\exp' = \exp$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$.

3°) Conséquence

Par passage à l'inverse, on peut en déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.

On ne retiendra cependant pas cette limite comme limite de référence. On ne retiendra que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

IV. Dérivée de la composée d'une fonction dérivable suivie de la fonction exponentielle

1°) Règle générale

> u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
> La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
> On retient : $\left(\mathrm{e}^{u}\right)' = u' \times \mathrm{e}^{u}$.

On peut noter $f = \exp \circ u$.

2°) Démonstration

La formule du **1°)** est une application de dérivée de la composée de deux fonctions : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

3°) Cas particulier

$u(x) = ax + b$ (u est une fonction affine)
$u'(x) = a$

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a \times \mathrm{e}^{ax+b}}$$

Lorsque $b = 0$, on obtient la formule :

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{ax}\right)' = a \times \mathrm{e}^{ax}}$$

Avec la notation de Leibniz ou notation différentielle (utilisée en physique), cette formule s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{ax}\right)}{\mathrm{d}x} = a \times \mathrm{e}^{ax}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{at}\right)}{\mathrm{d}t} = a \times \mathrm{e}^{at}$$

La variable figure au « dénominateur » (entre guillemets, car il ne s'agit pas vraiment d'un quotient).

Exemples :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-2t}\right)}{\mathrm{d}t} = -2 \times \mathrm{e}^{-2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}\right)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}$$

V. Fonctions associées à la fonction exponentielle

La modélisation de nombreux problèmes en probabilités, statistiques ou en biologie amène à l'étude de fonctions particulières $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$ (avec k une constante réelle strictement positive).

1°) Fonctions $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ ($k > 0$ fixé)

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère.

Il s'agit de l'étude d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre.

• **Étude**

Pour déterminer le sens de variation de f_k sur $\mathbb{R}$, il y a deux méthodes.

1$^{\text{ère}}$ méthode : en utilisant les dérivées

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$

Comme k est strictement positif par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k'(x) < 0$.

2$^{\text{e}}$ méthode : en utilisant les composées

On considère la fonction $u : x \mapsto -kx$.
f_k est la composée de u suivie de la fonction exponentielle.
On peut écrire $f_k = \exp \circ u$.

u est une fonction linéaire de coefficient $-k$.
Comme k est strictement positif par hypothèse, $-k$ est strictement négatif.
Donc d'après la propriété donnant le sens de variation d'une fonction affine (les fonctions linéaires sont des fonctions affines particulières), u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $f_k = \exp \circ u$, on en déduit que f_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante).

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f_k'(x)$	$-$	
Variation de f_k	$+\infty$ ↘	0

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-kx}_{X}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$.

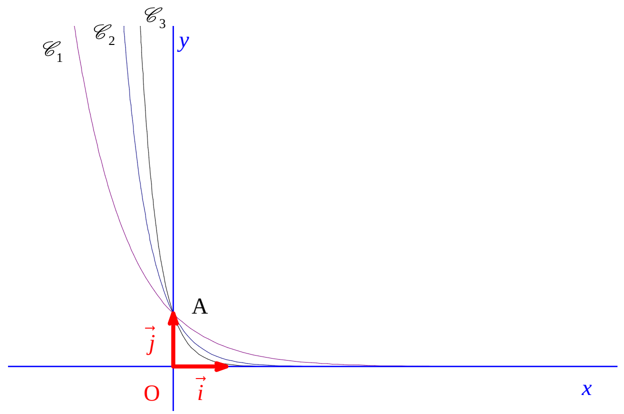
On en déduit que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en + ∞.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} (-kx) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$.

• Allure des courbes

On obtient un « réseau » de courbes dans le plan (toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ forment un réseau).
Il s'agit en fait des solutions de l'équation différentielle $y' = -ky$ telles que $y(0) = 1$.

$\forall k \in \mathbb{R}_+^*$ $f_k(0) = 1$ donc toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par le point A(0 ; 1).



On observe les résultats suivants que l'on peut justifier par le calcul :

- la position relative des courbes les unes par rapport aux autres ;

- plus k est grand, plus $\mathscr{C}_k$ « décroît » rapidement.

On peut démontrer que, dans un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}_k$ se déduit de la courbe représentative de la fonction exponentielle par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $-\dfrac{1}{k}$.

On démontre aisément que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ admettent une branche parabolique de direction Oy (tournée « vers les y positifs ») au voisinage de – ∞.

Un exemple d'utilisation d'une telle fonction nous est fourni en radioactivité.

On démontre en effet que le nombre de noyaux radioactifs à un instant t obéit à la loi : $\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}_0 \times \mathrm{e}^{-\lambda t}$ où λ désigne la constante de radioactivité de la substance considérée ($\lambda > 0$).
On définit alors le temps de demi-vie de la substance radioactive comme le temps au bout duquel il reste la moitié des noyaux radioactifs dans l'échantillon. On démontre que ce temps de demi-vie est égal à $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

2°) Fonctions $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$ ($k > 0$ fixé)

f_k est définie sur ℝ.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_k(-x) = f_k(x)$ donc f_k est paire.
La courbe $\mathscr{C}_k$ dans un repère orthogonal admet l'axe (Oy) pour axe de symétrie.

Pour déterminer les variations de f_k sur ℝ, il y a deux méthodes.

1ère méthode : en utilisant les dérivées

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_k'(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_k	0	↗	1	↘	0

Compte tenu de la parité de f_k, on peut se contenter de faire l'étude des variations uniquement sur $\mathbb{R}_+$.

Le tableau de variations fait apparaître un maximum global égal à 1 atteint en 0.

2e méthode : en utilisant les composées

On considère la fonction $u : x \mapsto -kx^2$.
f_k est la composée de u suivie de la fonction exponentielle.
On peut écrire $f_k = \exp \circ u$.

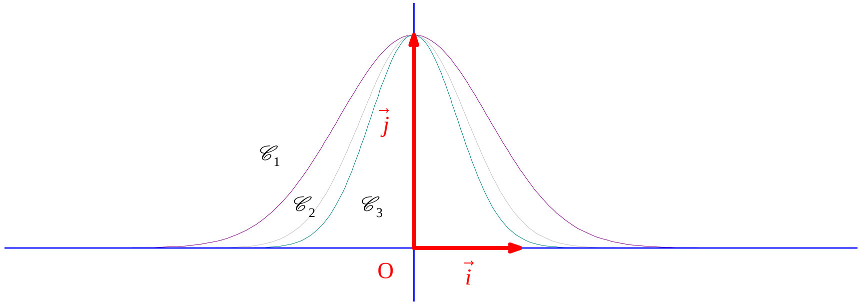
Les variations de u sont contraires de celles de la fonction « carré » car $-k < 0$.
On en déduit les variations de f_k.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-kx^2}_{X}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-kx^2\right) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = 0$.

Il est logique de trouver la même limite en – ∞ qu'en + ∞ puisque la fonction f_k est paire.

On en déduit que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ admettent l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en + ∞ et en – ∞.



Ces courbes s'appellent des « courbes en cloche » (courbes de Gauss).

En calculant la dérivée seconde de f_k, on démontre aisément que toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ admettent deux points d'inflexion symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
On peut aussi en déduire les intervalles sur lesquels *f* est convexe ainsi que ceux sur lesquels *f* est concave.

Remarque :

Il n'est possible de donner l'expression d'une primitive de f_k (résultat admis sans démonstration).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = f_1\left(\sqrt{k}\,x\right)$ donc $\mathscr{C}_k$ se déduit de $\mathscr{C}_1$ par l'affinité orthogonale d'axe (O*x*) et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

VI. Autres limites de la fonction exponentielle par croissance comparée (admises sans démonstration)

n désigne un entier naturel quelconque.

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

Cette limite a été donnée et démontrée dans le cas $n = 1$.
La démonstration est similaire dans le cas général.

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^n e^x\right)$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^n e^x\right) = 0}$$

Cette limite a été donnée et démontrée dans le cas $n = 1$.
La démonstration est similaire dans le cas général.

Appendice :

Récapitulatif des limites de la fonction exponentielle

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{a} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x\mathrm{e}^{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$$