TS spécialité

Contrôle du vendredi 16 décembre 2011 (1 h)

I. (4 points = 1 point + 3 points) Questions de cours

1°) Soit *a*, *b*, *k* trois entiers naturels non nuls.

Recopier et compléter l'égalité : PGCD(*ka* ; *kb*) = ….. .

2°) On rappelle l'énoncé du théorème de Gauss.

> Soit *a*, *b*, *c* trois entiers relatifs non nuls.
> Si *a* divise le produit *bc* et *a* est premier avec *b*, alors *a* divise *c*.

Faire la démonstration de ce théorème après avoir écrit les hypothèses (on pourra utiliser les symboles usuels).

II. (5 points = 3 points + 2 points)

1°) Écrire l'algorithme d'Euclide en langage naturel (on pourra éventuellement faire en plus l'organigramme).
Écrire cet algorithme dans un cadre sur une seule page (il ne faut pas qu'il y ait de page à tourner).
Définir les variables utilisées pour l'algorithme.

2°) Déterminer le PGCD de 2 378 et de 1 769 par l'algorithme d'Euclide en détaillant toutes les étapes.

III. (5 points = 1 point + 4 points) On considère l'équation $4x - 3y = 1$ (E) où x et y sont des entiers relatifs.

1°) Recopier et compléter sans justifier la phrase :

« Le couple (… ; …) est une solution particulière de (E). »

2°) Déterminer l'ensemble *S* de tous les couples solutions de (E) en rédigeant le plus soigneusement possible.

IV. (4 points) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que l'on ait : $\begin{cases} xy = 7\ 776 \\ \text{PGCD}(x\ ;\ y) = 18 \end{cases}$.

V. (2 points) Soit *n* un entier naturel.

On note *d* le PGCD de $5n + 1$ et de $n + 4$.

1°) Démontrer que *d* est un diviseur de 19.

2°) **Question hors barème :** Déterminer *d* suivant les valeurs de *n*.

Quelques consignes

- Traiter si possible les exercices dans l'ordre.

- Mettre les résultats en évidence en les encadrant en rouge à la règle.

Corrigé du contrôle du 16 décembre 2011

I.

1°) PGCD(ka ; kb) = k PGCD(a ; b)

2°)

> a, b et c sont trois entiers relatifs non nuls.
> Si a divise le produit bc et a est premier avec b, alors a divise c.

Démonstration

$$\textit{Hypothèses}\ \begin{cases} a \mid bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux.} \end{cases}$$

Démontrons que $a \mid c$.

a et b sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
En multipliant les deux membres de cette égalité par c, on obtient l'égalité : $acu + bcv = c$.

Or $a \mid bc$ donc $a \mid bcv$

Par ailleurs, $a \mid acu$ de manière évidente.

On en déduit que $a \mid acu + bcv$ c'est-à-dire $a \mid c$.

II.

1°) Algorithme d'Euclide :

Variables : a, b, r entiers naturels

Entrées :
Saisir a et b

Traitement :
Tantque le reste de la division euclidienne de a par b est non nul **Faire**
- r prend la valeur du reste de la division euclidienne de a par b
- a prend la valeur b
- b prend la valeur r

FinTantque

Sortie :
Afficher b

2°) **Déterminons le PGCD de 2 378 et de 1 769 par l'algorithme d'Euclide en détaillant toutes les étapes.**

$2\,378 = 1\,769 \times 1 + 609$

$1\,769 = 609 \times 2 + 551$

$609 = 551 \times 1 + 58$

$551 = 58 \times 9 + \mathbf{29}$

$58 = 29 \times 2 + 0$

Il en résulte que PGCD (2 378 ; 1 769) = 29.

III. $4x - 3y = 1$ (E) (x et y entiers relatifs)

1°) « Le couple (1 ; 1) est une solution particulière de (E). »

2°) (E) $\Leftrightarrow 4x - 3y = 1$
$\Leftrightarrow 4x - 3y = 4 \times 1 - 3 \times 1$
$\Leftrightarrow 4(x - 1) = 3(y - 1)$ (E′)

On en déduit que $3 \mid 4\,(x - 1)$ avec 4 et 3 premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, il en résulte que $3 \mid x - 1$.
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 3k$.

En remplaçant cette valeur dans l'équation (E′), on obtient : $4 \times 3k = 3\,(y - 1)$ soit $y - 1 = 4k$.

D'où finalement $x = 3k + 1$ et $y = 4k + 1$.

On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $4 \times (3k + 1) - 3 \times (4k + 1) = 1$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(3k + 1 ; 4k + 1), k \in \mathbb{Z}\}$.

IV. Déterminons tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que l'on ait : $\begin{cases} xy = 7\ 776 \\ \text{PGCD}(x\ ;\ y) = 18 \end{cases}$.

PGCD (x ; y) = 18 donc il existe des entiers x' et y' tels que $x = 18x'$ et $y = 18y'$ avec x' et y' premiers entre eux.

$$\begin{aligned} xy = 7\ 776 &\Leftrightarrow 18x' \times 18y' = 7\ 776 \\ &\Leftrightarrow 324x'y' = 7\ 776 \\ &\Leftrightarrow x'y' = \frac{7776}{324} \\ &\Leftrightarrow x'y' = 24 \end{aligned}$$

x' et y' sont des diviseurs positifs associés de 24, premiers entre eux.

Les diviseurs positifs de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Si $x' = 1$, alors $y' = 24$ et le couple (1 ; 24) convient.

Si $x' = 2$, alors $y' = 12$ ce qui n'est pas possible car 2 et 12 ne sont pas premiers entre eux.

Si $x' = 3$, alors $y' = 8$ et le couple (3 ; 8) convient.

Si $x' = 4$, alors $y' = 6$ ce qui n'est pas possible car 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux.

Si $x' = 6$, alors $y' = 4$ ce qui n'est pas possible car 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux.

Si $x' = 8$, alors $y' = 3$ et le couple (8 ; 3) convient.

Si $x' = 12$, alors $y' = 2$ ce qui n'est pas possible car 12 et 2 ne sont pas premiers entre eux.

Si $x' = 24$, alors $y' = 1$ et le couple (24 ; 1) convient.

On trouve pour (x' ; y') quatre couples solutions : (1 ; 24), (3 ; 8), (8 ; 3), (24 ; 1).

À chacun de ces couples correspond un couple (x, y) solution.

Les couples solutions du système sont : (432 ; 18), (18 ; 432), (54 ; 144), (144 ; 54).

V. n entier naturel

$d = \text{PGCD}(5n + 1\ ;\ n + 4)$

1°) **Démontrons que d est un diviseur de 19.**

d est un diviseur commun à $5n + 1$ et $n + 4$.

$d \mid 5n + 1$ et $d \mid n + 4$ donc d divise toutes les combinaisons linéaires de $5n + 1$ et $n + 4$.

En particulier, $d \mid 5\,(n + 4) - (5n + 1)$ (la combinaison linéaire a été choisi pour annuler les « n »)

Donc $d \mid 19$.

2°) **Question hors barème :** Déterminons d suivant les valeurs de n.

Bonne durée : Les élèves ont bien eu le temps de finir.

On raisonne dans les deux sens.

$\Rightarrow$ Ce sens est évident.
Si $d = 8$, 8 est un diviseur commun à A et B.

$\Leftarrow$ Si $8 \mid A$ et $8 \mid B$, alors 8 est un diviseur commun à A et B.
C'est donc un diviseur du PGCD de A et B.
On a donc $8 \mid d$.

Or d'après la question 1°), $d \mid 8$.
Par conséquent, comme d est positif, on en déduit que $d = 8$.

Déterminons les valeurs de *n* pour lesquelles 8 | A.

Méthode : on dresse un tableau de congruences.

$n \equiv \ldots\ (8)$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$A \equiv \ldots\ (8)$	**1**	**4**	**7**	**2**	**5**	**0**	**3**	**6**

$8 \mid A \Leftrightarrow A \equiv 0\ (8) \Leftrightarrow n \equiv 5\ (8)$

Déduisons-en les valeurs de *n* pour lesquelles *d* = 8.

D'après ce qui précède, une condition nécessaire pour que $d = 8$ est $n \equiv 5\ (8)$.
Vérifions que cette condition est suffisante.
Si $n \equiv 5\ (8)$, alors $5n - 1 \equiv 24\ (8)$.
Or $24 \equiv 0\ (8)$.
Par suite, $5n - 1 \equiv 0\ (8)$.
D'où $B \equiv 0\ (8)$.
Par suite, $8 \mid B$

On en déduit que $8 \mid A$ et $8 \mid B$ donc d'après la question 2°), $d = 8$.

Conclusion : $d = 8 \Leftrightarrow n \equiv 5\ (8)$