TS1

Contrôle du jeudi 17 janvier 2013
(50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………………….. **Note : …… /20**

I. (2 points)

Déterminer les dérivées des fonctions *f* et *g* définies respectivement sur I et J.

$f(x)=\cos\frac{1}{x}$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}^*$; $f'(x)=$.................. $g(x)=\sin(\ln x)$; $\mathrm{J}=\mathbb{R}_+^*$; $g'(x)=$..................

II. (4 points)

Donner le domaine de résolution de l'équation (1) et des inéquations (2), (3), (4) puis les résoudre.

1°) $\ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln(x+2)$ (1)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_1=$……………………

2°) $\ln x+\ln(x-3)<2\ln 2$ (2)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_2=$……………………

3°) $\ln(x+2)\leqslant 2\ln x$ (3)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_3=$……………………

4°) $\ln(x+2)>2$ (4)

domaine de résolution : ………………… ; ensemble des solutions : $S_4=$……………………

III. (2 points)

Déterminer les dérivées des fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f(x)=\dfrac{x^2(2\ln x-1)}{2}$; $f'(x)=$.................. | $g(x)=(\ln x)^5$; $g'(x)=$..................

IV. (3 points)

Compléter sans détailler les calculs :

$\lim\limits_{x\to0^+}(2x-\ln x)=$.............. ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-2\dfrac{\ln x}{x}\right)=$.............. ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x)}{x}=$..............

V. (1 point)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, *P*) qui suit la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0,42$. Pour quelle valeur de l'entier naturel *k* la probabilité $P(\mathrm{X}=k)$ est-elle maximale ? Répondre sans justifier ni faire de phrase.

………………………

VI. (5 points)

Une machine doit produire chaque jour 5000 boulons. En fonctionnement normal, la probabilité qu'un boulon soit défectueux est de 0,01. Les défauts sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boulons défectueux.

1°) Quelle loi suit X ? Répondre avec précision.
2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les entiers *a* et *b* ainsi définis :
• *a* est le plus petit entier naturel tel que $P(\mathrm{X}\leqslant a)>0,025$;
• *b* est le plus petit entier naturel tel que $P(\mathrm{X}\geqslant b)\geqslant 0,975$.
3°) En déduire l'intervalle de fluctuation I à 95 % de la fréquence de boulons défectueux dans les échantillons de taille 5000 issus de cette production (bornes écrites sous forme décimale).
4°) On observe qu'il y a 60 boulons défectueux. Peut-on penser qu'il y a un problème ? Justifier.

1°) X suit ……………………………………………………………………………………………………..

2°) $a=$……….. ; $b=$…………..

3°) $\mathrm{I}=$………………

4°) ……

……

VII. (3 points)

Lucie est inscrite dans un club de basket-ball. Son entraîneur a constaté que lors d'un tir au niveau du poste central la probabilité qu'elle marque un panier est $p=0,6$. À l'entraînement, Lucie effectue une série de *n* lancers depuis ce poste (*n* : entier naturel supérieur ou égal à 1).

1°) Exprimer en fonction de *n* la probabilité pour que Lucie réussisse au moins un panier. Répondre sans justifier.

……………………………………………

2°) Quel est le nombre minimum n_0 de lancers, à partir du poste central, que Lucie doit effectuer afin que la probabilité qu'elle réussisse au moins un panier dépasse 0,9999 ?
Résoudre cette question par le calcul en détaillant toute la démarche au verso.

Corrigé du contrôle du 17-1-2013

I.

$f(x)=\cos\frac{1}{x}$ $\quad$ $f'(x)=-\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ $\quad$ $g(x)=\sin(\ln x)$ $\quad$ $g'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$

II.

1°) $\ln(2x-1)+\ln(2x+1)=\ln(x+2)$ $\quad$ (1)

domaine de résolution : $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; ensemble des solutions : $S_1=\{1\}$

2°) $\ln x+\ln(x-3)<2\ln 2$ $\quad$ (2)

domaine de résolution : $]3;+\infty[$; ensemble des solutions : $S_2=]3;4[$

3°) $\ln(x+2)\leqslant 2\ln x$ $\quad$ (3)

domaine de résolution : $]0;+\infty[$; ensemble des solutions : $S_3=[2;+\infty[$

4°) $\ln(x+2)>2$ $\quad$ (4)

domaine de résolution : $]-2;+\infty[$; ensemble des solutions : $S_4=\left]e^2-2;+\infty\right[$

III.

$f(x)=\frac{x^2(2\ln x-1)}{2}$; $f'(x)=2x\ln x$ $\quad|\quad$ $g(x)=(\ln x)^5$; $g'(x)=\frac{5(\ln x)^4}{x}$

IV.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-\ln x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+1-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(3x)}{x}=0$ (réécriture : $\frac{\ln(3x)}{x}=\frac{\ln 3+\ln x}{x}=\frac{\ln 3}{x}+\frac{\ln x}{x}$)

V.

$$k=84$$

VI.

Une machine doit produire chaque jour 5000 boulons. En fonctionnement normal, la probabilité qu'un boulon soit défectueux est de 0,01. Les défauts sont indépendants.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de boulons défectueux.

1°) Quelle loi suit X ? Répondre avec précision.
2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les entiers a et b ainsi définis :
• a est le plus petit entier naturel tel que $P(X\leqslant a)>0,025$;
• b est le plus petit entier naturel tel que $P(X\geqslant b)\geqslant 0,975$.
3°) En déduire l'intervalle de fluctuation I à 95 % de la fréquence de boulons défectueux dans les échantillons de taille 5000 issus de cette production (bornes écrites sous forme décimale).
4°) On observe qu'il y a 60 boulons défectueux. Peut-on penser qu'il y a un problème ? Justifier.

1°) X suit la **loi binomiale de paramètres 5000 (nombre d'épreuves) et 0,01 (probabilité d'un succès)**.

2°) $a=37$; $b=64$

3°) $I=[0,0074 ; 0,00128]$

4°)
On utilise l'intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 % déterminé à la question précédente.
$\frac{60}{5000}=0,012$
Or $0,0012\in I$.

On peut donc penser qu'il n'y a pas de problème au risque de 5 %.

(ou $37\leqslant 60\leqslant 64$ donc …)

VII.

1°) **Exprimons en fonction de n la probabilité pour que Lucie réussisse au moins un panier.**

$$1-0,4^n$$

2°) **Déterminons le nombre minimum n_0 de lancers, à partir du poste central, que Lucie doit effectuer afin que la probabilité qu'elle réussisse au moins un panier dépasse 0,9999.**

On cherche $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $1-0,4^n>0,9999$ (1).

(1) $\Leftrightarrow\ 0,4^n < 0,0001$

$\Leftrightarrow\ \ln\left(0,4^n\right) < \ln 0,0001$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\Leftrightarrow\ n \ln 0,4 < \ln 0,0001$

$\Leftrightarrow\ n > \dfrac{\ln 0,0001}{\ln 0,4}$ (en effet, $0,4 < 1$ donc $\ln 0,4 < 0$)

D'après la calculatrice, on a : $\dfrac{\ln 0,0001}{\ln 0,4} = 10,0517664...$

Or $n \in \mathbb{N}$ donc (1) $\Leftrightarrow\ n \geqslant 11$ (car le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\dfrac{\ln 0,0001}{\ln 0,4}$ est 11).

Donc le plus petit entier naturel n tel que l'inégalité (1) soit vraie est 11.

$n_0 = 11$

Avec 11 lancers, Lucie a une probabilité qui dépasse 0,9999 de mettre au moins un panier.

Autre méthodes (qui n'étaient pas celle qu'attendait l'énoncé) :

1. On peut utiliser un algorithme (algorithme de détermination de valeur seuil) :

Initialisation :
n prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $1 - 0,4^n \leqslant 0,9999$ **Faire**
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

2. On peut rentrer la fonction $f : x \mapsto 1 - 0,4^x$ dans la calculatrice et trouver la valeur de n_0 grâce à un tableau de valeurs.