1^ère^ S1

Contrôle du lundi 17 décembre 2012 (30 min)

Prénom et nom : ……………………………………………

Note : …….. / 20

• Ne rien écrire sur le sujet en dehors de ce qui est demandé.

• Tirer tous les traits de fractions à la règle.

I. (5 points) Démonstration d'une propriété du cours guidée

Dans la démonstration que l'on demande de faire, on s'appuiera sur la définition rappelée ci-dessous.

> Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* (non vide et non réduit à un singleton) et *a* un réel fixé dans *I*.
> On rappelle que « *f* est dérivable en *a* » signifie que le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand *h* tend vers 0 ; dans ce cas, cette limite est appelée le nombre dérivé de *f* en *a* et est notée $f'(a)$.

Le but de ce qui suit est de démontrer le résultat relatif au nombre dérivé du produit d'une fonction par un réel.

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle *I* et *k* un réel fixé. On suppose que *u* est dérivable en un réel $a \in I$.
On note *f* la fonction définie sur *I* par $f(x)=k\times u(x)$.

1°) Soit *h* un réel non nul tel que $a+h \in I$.
Vérifier que l'on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=k\times\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$ (1).

……

……

……

……

……

……

……

2°) Compléter l'égalité suivante sans explication :

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(car } u \text{ est dérivable en ……..)}$$

3°) On admet que la limite du produit d'une fonction par un réel est égale au produit de la limite par ce réel.
En utilisant l'égalité (1), déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; en déduire que *f* est dérivable en *a* et donner $f'(a)$.

……

……

……

……

……

……

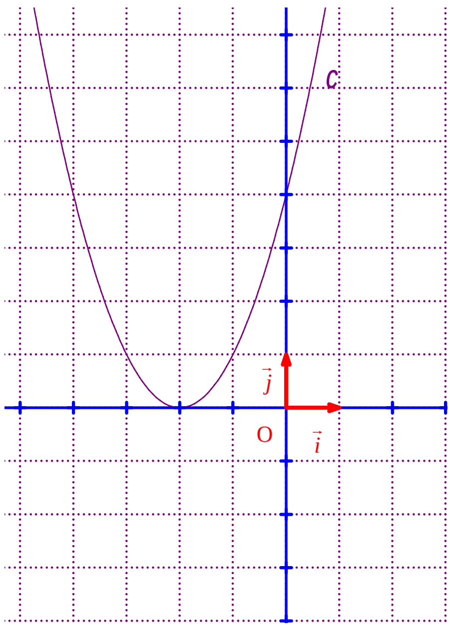
II. (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)^2$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

On note T_1 et T_2 les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives – 4 et 0.
Calculer les coefficients directeurs de T_1 et T_2.
Tracer ces deux tangentes sur le graphique ci-contre.



1°) Calcul de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x)=$ ………………..…………………………

2°) Coefficients directeurs de T_1 et T_2

Le coefficient directeur de T_1 est égal à : ……….. .

Le coefficient directeur de T_2 est égal à : ……….. .

III. (10 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$.

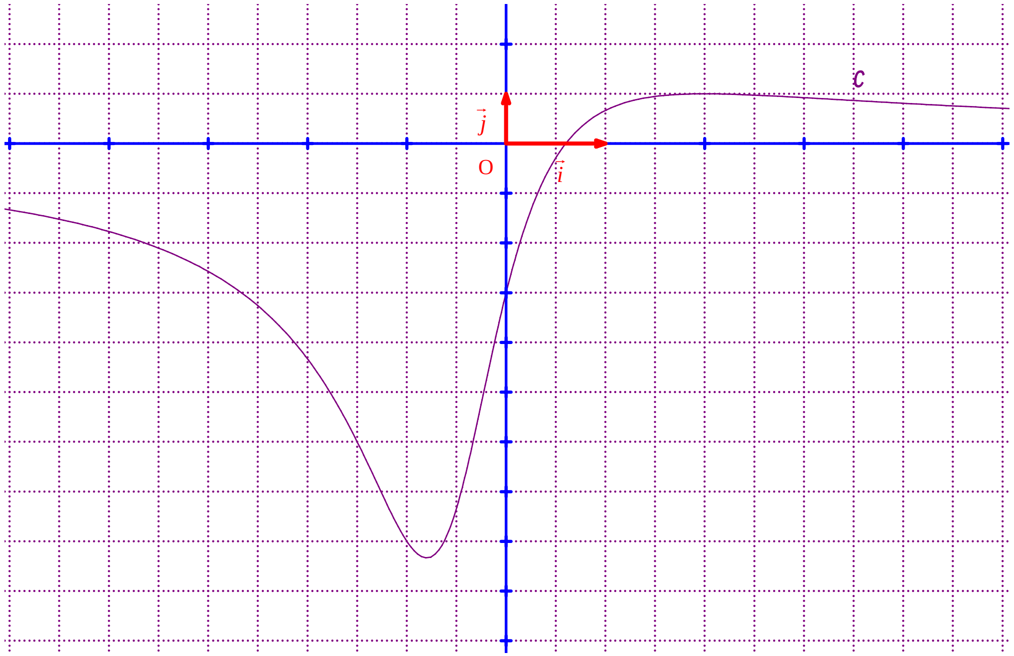
1°) Justifier par une phrase que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

2°) Étudier les variations de la fonction *f* (donner brièvement les explications préalables, en faisant attention à la précision du vocabulaire employé, et dresser un tableau d'étude détaillé ; faire les flèches de variations à la règle ; calculer les extremums au brouillon et compléter le tableau de variations).

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer une équation de la tangente *T* à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$.

Tracer *T* sur le graphique ci-dessous.



1°) **Calcul de $f'(x)$**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme ……………………………………………………………….

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) =$ ………………………………………………………… (laisser la trace de la formule utilisée ; on ne demande pas d'écrire la formule)

$=$…………………………………………………………

$=$…………………………………………………………

2°) **Étude des variations de *f***

………

………

………

………

………

x	$-\infty$	$+\infty$

3°) **Équation de *T***

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 17-12-2012

I. Démonstration d'une propriété du cours guidée

u : fonction définie sur un intervalle I
k : réel fixé

On suppose que u est dérivable en un réel $a \in I$.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = k \times u(x)$

1°) Soit h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

Vérifions que $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = k \times \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$ (1).

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k \times u(a+h) - k \times u(a)}{h}$$
$$= k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

2°) **Complétons l'égalité suivante sans explication :**

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ (car u est dérivable en a)

3°)

• Déterminons $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

D'après (1), $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = k \times u'(a)$.

• Déduisons-en que f est dérivable en a et l'expression de $f'(a)$.

Comme le résultat de la limite est fini, on en déduit que f est dérivable en a et que $f'(a) = k \times u'(a)$.

II. $f : x \mapsto (x+2)^2$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) **Calcul de $f'(x)$**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2(x+2)$

2°)
$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$
T_1 et T_2 : tangentes à $\mathcal{C}$ aux points A et B d'abscisses respectives – 4 et 0

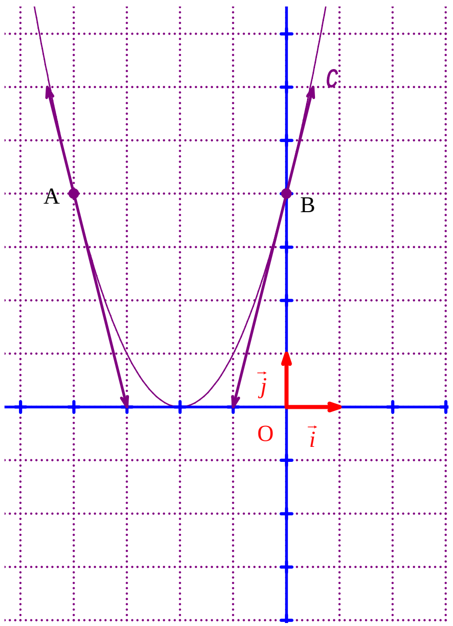
Coefficients directeurs de T_1 et T_2

Le coefficient directeur de T_1 est égal à : $f'(-4) = -4$.

Le coefficient directeur de T_2 est égal à : $f'(0) = 4$.

Connaissant les nombres dérivés, il est possible de tracer les tangentes avec précision.

Il n'est pas utile de déterminer les équations réduites des tangentes ; les coefficients directeurs suffisent pour le tracé.



On vérifie les coefficients directeurs sur la calculatrice graphique ainsi que les tracés.

III. $f : x \mapsto \dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) **Calcul de $f'(x)$**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle (c'est-à-dire le quotient de deux fonctions polynômes).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{5\times\left(x^2+x+2\right)-(5x-3)\times(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

> On a laissé la trace de la formule utilisée. L'énoncé ne demandait pas d'écrire la formule.

$$= \frac{5x^2+5x+10-10x^2-5x+6x+3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+6x+8}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

2°) **Étudions les variations de la fonction *f*.**

Les racines du polynôme $-5x^2+6x+8$ sont 2 et $-\dfrac{4}{5}$ (obtenues par racine évidente et produit, par calcul de discriminant ou tout simplement par programme de la calculatrice !).

On utilise la règle du signe d'un trinôme du second degré.

La dérivée de f s'annule en $-\dfrac{4}{5}$ et 2.

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{5}$		2		$+\infty$
Signe de $-5x^2+6x+8$		$-$	0^{num}	$+$	0^{num}	$-$	
Signe de $\left(x^2+x+1\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0^{num}	$+$	0^{num}	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-\dfrac{25}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Attention à bien écrire : « Variations de f » et non « Variations de $f(x)$ ».

On calcule les extremums de f afin de compléter le tableau de variations.
On calcule donc la valeur de f en $-\dfrac{4}{5}$ et en 2.

$$f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{175}{21} = -\frac{25}{3}$$

$$f(2) = 1$$

f est strictement décroissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\dfrac{4}{5}\right]$ et $\left[2\,;+\infty\right[$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{4}{5}\,;2\right]$ et $\left[2\,;+\infty\right[$.

On n'écrit que des valeurs exactes dans un tableau de variation.

3°) $\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Déterminons une équation de la tangente *T* à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$.

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

$f'\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -4$ (calcul assez pénible mais simple à la calculatrice : $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{-5\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+6\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+8}{\left(\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}+1\right)^2}$)

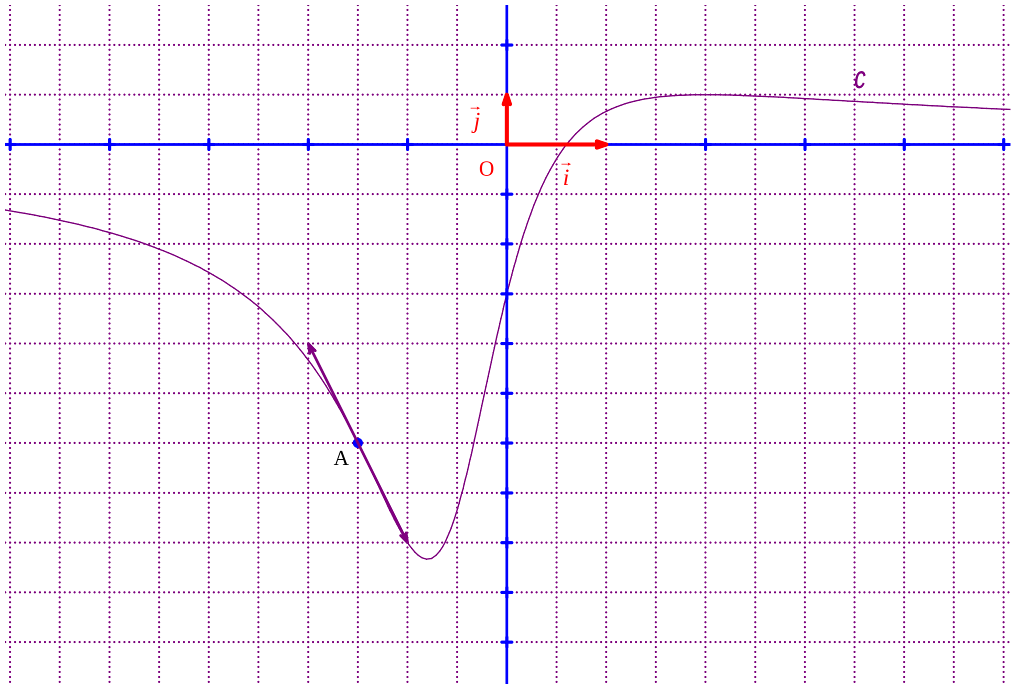
T a pour équation $y = f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ (on écrit la formule de l'équation de la tangente en situation)

soit $y = 4\left(x+\dfrac{3}{2}\right)-6$

par suite $y = -4x-12$

Tracé de *T*

On vérifie le tracé sur la calculatrice graphique.



La tangente *T* semble être une tangente d'inflexion, c'est-à-dire que la courbe change de position par rapport à la tangente au point A.
On dit que A est un point d'inflexion.