TS1 **Devoir pour le lundi 14 janvier 2013**

I. Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On note I le centre de la face ABCD.

Soit M un point du segment [BH].

1°) Démontrer que $\text{MA} = \text{MC}$.

2°) On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{AMC}}$.

Le but de la suite de l'exercice est de déterminer la valeur maximale de α.

a) Démontrer que α est maximal lorsque la distance IM est minimale.

On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant :
La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire la position de M pour laquelle α est maximal.

3°) Désormais, on suppose que M occupe la position pour laquelle α est maximal.

a) Calculer la distance IM.
On pourra calculer $\sin \widehat{\text{DBH}}$ de deux manières.

b) Calculer la distance MA.

c) Déterminer α (valeur exacte).

II. « La section impossible » (exercice facultatif)

Soit ABCDEFGH un cube.

On note I un point quelconque de]EF[, J un point quelconque]BC[et K un point quelconque]DH[.

Tracer la section du cube par le plan (IJK).

Aide pour l'exercice II

À ne lire qu'après avoir bien cherché.

On pourra chercher l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (ADEH) en construisant l'intersection des plans (IBJ) et (ADH).

On peut utiliser un logiciel de géométrie dans l'espace.

Corrigé du DM pour le 14-1-2013

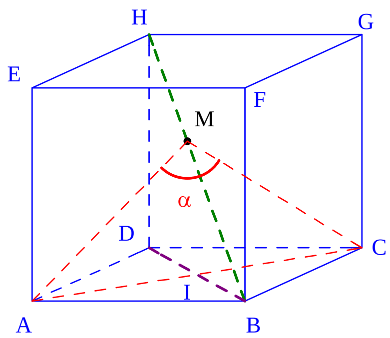
I.

Dans cet exercice, schémas et figures sont les bienvenus.

ABCDEFGH : cube d'arête a $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

I : centre de la face ABCD

M : point quelconque de [BH]



1°) **Démontrons que $MA = MC$.**

Nous savons que (HD) ⊥ (ABC) et (AC) ⊂ (ABC).
On en déduit que (HD) ⊥ (AC).
De plus, (DB) et (AC) sont les diagonales d'un carré donc (DB) ⊥ (AC).
On en déduit que (AC) ⊥ (HDB).
De plus, I est le milieu de [AC].

On en déduit que (HDB) est le plan médiateur de [AC].

Il aurait été possible de dire que (HDB) est le plan médiateur de [AC] car c'est un plan de symétrie du cube.

M ∈ (HDB) donc $MA = MC$.

Autre démarche :

Les segments [AB] et [CD] sont deux arêtes du cube.
On a donc $AB = BC$.

De même, on a : $AD = CD$.

Les segments [AH] et [CH] sont des diagonales respectivement des carrés ADEH et CDGH.
D'où $AH = CH$.

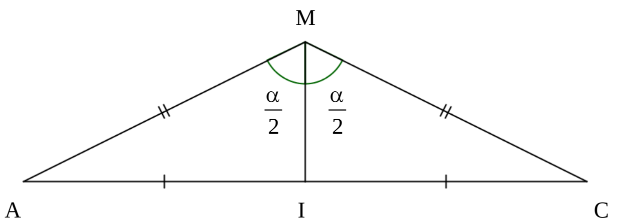
On a démontré que les points B, D et H sont équidistants de A et C.
On en déduit que le plan (BDH) est le plan médiateur de [AC].

Or M ∈ (HDB) car M ∈ (HB).

Ainsi, $MA = MC$.

2°) $\widehat{AMC} = \alpha$ rad

a) **Démontrons que α est maximal lorsque la distance IM est minimale.**



D'après la question 1°), le triangle AMC est isocèle en M.

Donc comme I est le milieu de [AC], on en déduit que (MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.

Donc $\widehat{AMC} = \alpha$ rad donc $\widehat{AMI} = \dfrac{\alpha}{2}$ rad.

D'une part, on a : $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{IA}{IM}$.

D'autre part, on a $\alpha \in \left]0\,;\pi\right[$ d'où $\dfrac{\alpha}{2} \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ (il est important de le dire).

On sait que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On a alors :

α maximal $\Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2}$ maximal

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha}{2}$ maximal

$\Leftrightarrow \dfrac{\text{AI}}{\text{IM}}$ maximal

$\Leftrightarrow$ IM minimale

(car AI est une constante*, c'est-à-dire ne varie pas)

On en déduit que pour que α soit maximal il faut et il suffit que IM soit minimale.

Une condition nécessaire et suffisante pour que α soit maximal est que IM soit minimale.

Donc α est maximal lorsque la distance IM est minimale.

* J'ai trouvé dans des copies des expressions telles que « La longueur AI est figée » ou « La longueur AI est stable ».

On pourrait d'ailleurs écrire : $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\text{IM}}$.

On utilise le fait que la diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$.

On peut faire des remarques du genre : « Si α augmente, alors IM diminue ».

On évite d'écrire des égalités du genre $\widehat{\text{AIM}} = \tan^{-1}\left(\dfrac{\text{AI}}{\text{IM}}\right)$.

On peut dire que $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ est inversement proportionnelle à IM.

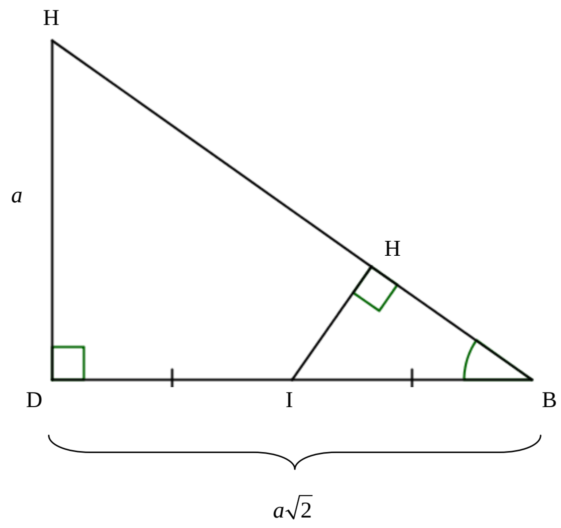
b) **Déduisons-en la position de M pour laquelle α est maximal.**

IM est minimale lorsque (IM) $\perp$ (BH).

3°) Désormais, on suppose que M occupe la position pour laquelle α est maximal.

a) **Calculons la distance IM.**

Calculons $\sin\widehat{\text{DBH}}$ de deux manières.



Dans le triangle rectangle DBH rectangle en D, on a :

$$\sin\widehat{\text{DBH}} = \frac{\text{DH}}{\text{BH}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dans le triangle rectangle IBM rectangle en M, on a :

$$\sin\widehat{\text{IBM}} = \frac{\text{IM}}{\text{BI}} = \frac{\text{IM}}{a\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\text{IM}}{a\sqrt{2}}$$

On a donc $\dfrac{2\text{IM}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ soit $2\text{IM} = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ d'où enfin $\text{IM} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

b) **Calculons la distance MA.**

Le triangle AMC est isocèle en M et I est le milieu de [AC] donc I est le pied de la hauteur issue de M dans ce triangle.
Par suite, le triangle AMI est rectangle en I.

Donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AM^2 = IM^2 + AI^2$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2a^2}{3}$$

On en déduit que $AM = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (car $a > 0$).

c) **Déterminons α.**

1ère méthode :

Calculons $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{IM}{AM}$$

$$= \frac{\frac{a}{\sqrt{6}}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \qquad \text{(il aurait même été plus simple de mettre } IM = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\text{)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Or $\frac{\alpha}{2} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$.

On en déduit que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2e méthode :

On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle AMC isocèle en M.

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2 \times AM \times CM \times \cos\alpha$$

Cette égalité donne successivement les égalités suivantes :

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2 \times \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 2 \times \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \cos\alpha$$

$$2a^2 = 2 \times \frac{2}{3}a^2 - 2 \times \frac{2}{3}a^2 \cos\alpha$$

$$2a^2 - \frac{4}{3}a^2 = -\frac{4}{3}a^2 \cos\alpha$$

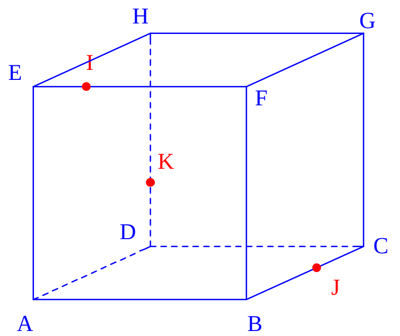
$$\frac{2}{3}a^2 = -\frac{4}{3}a^2 \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

Or α appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$ donc $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

N.B. : On peut écrire $\alpha = \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

II. La section impossible



$I \in]EF[$

$J \in]BC[$

$K \in]DH[$

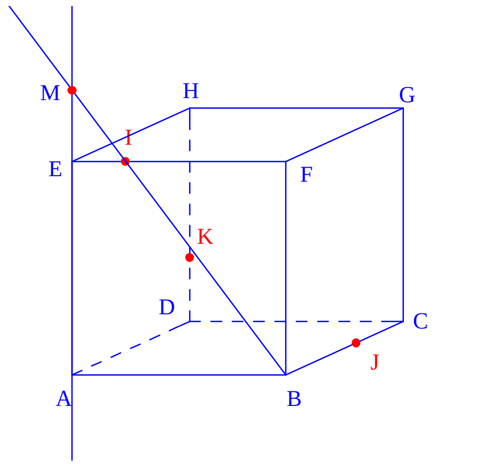
On cherche à tracer la section du cube par le plan (IJK).

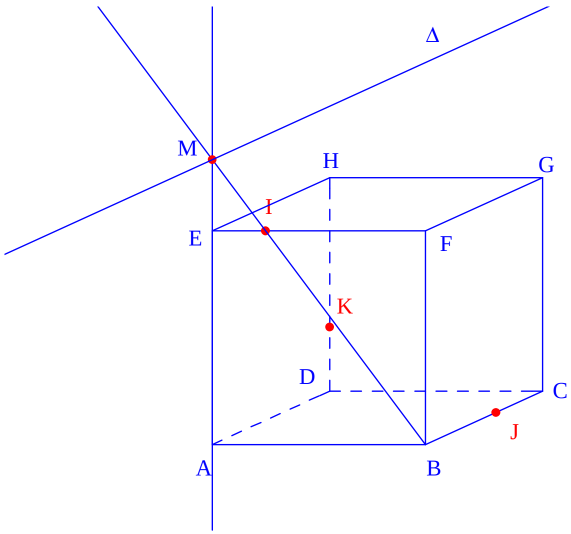
On va chercher selon l'indication donnée l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (ADEH) en construisant l'intersection des plans (IBJ) et (ADH).

On commence donc par déterminer l'intersection des plans (IBJ) et (ADH).

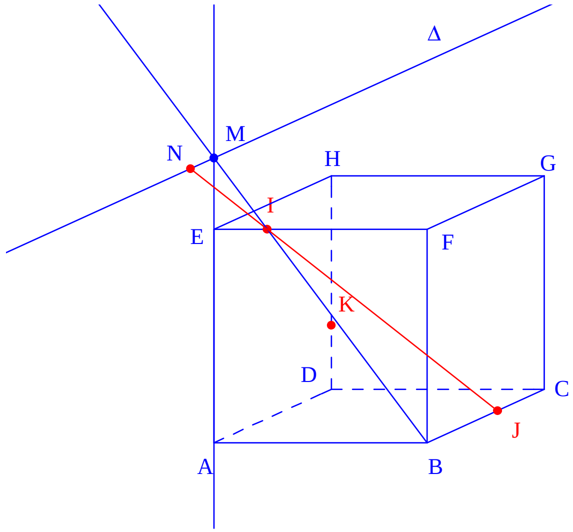
On va construire le point d'intersection M de (BI) et de (AE) (prolongement des droites).

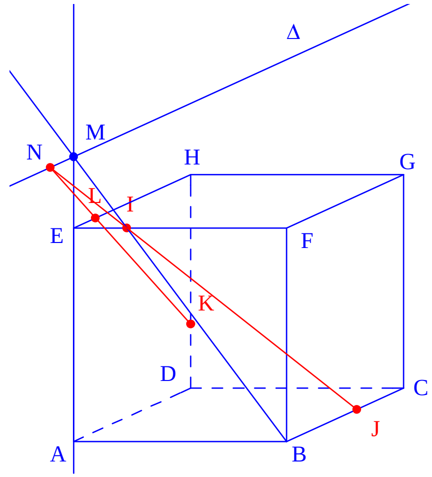
Le théorème du toit permet de dire que l’intersection des plans (IBJ) et (ADH) est la droite passant par M parallèle à (BC).



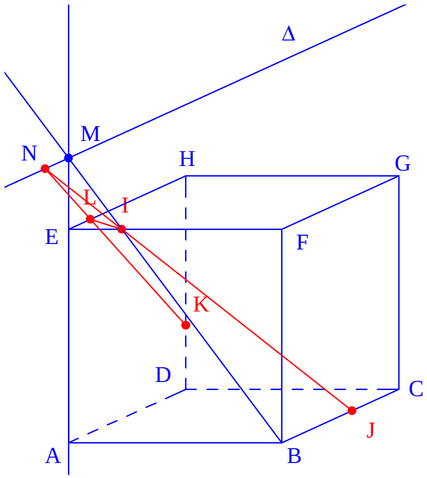


Du coup, on va pouvoir chercher l’intersection de la droite (IJ) et du plan (ADHE).
On construit le point d’intersection N de (IJ) avec Δ.

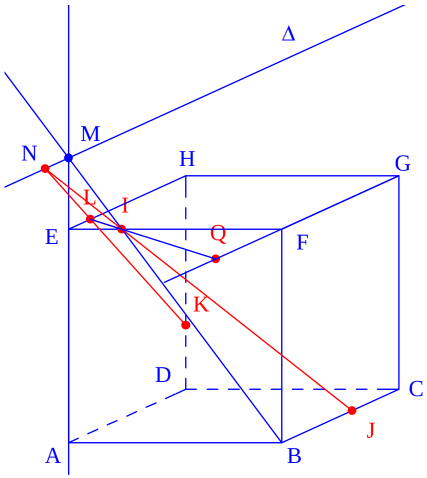




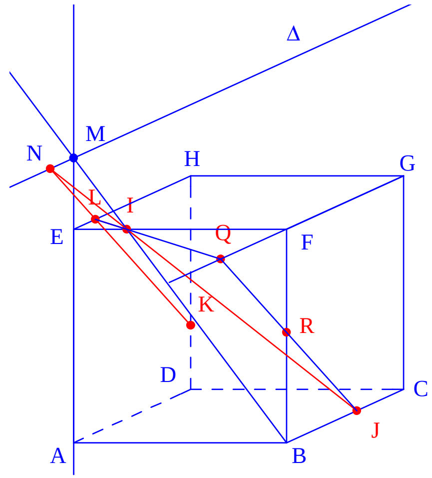
On trace le segment [IL].



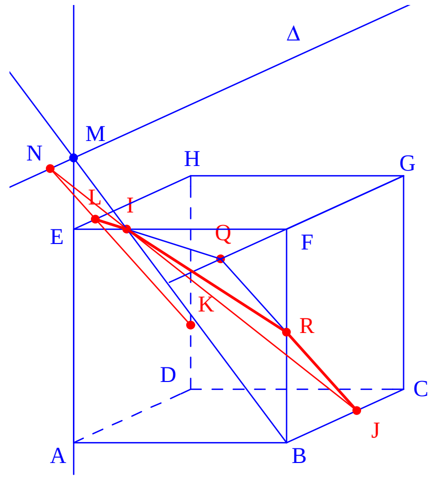
On construit le point d'intersection Q de (IL) et de (FG).



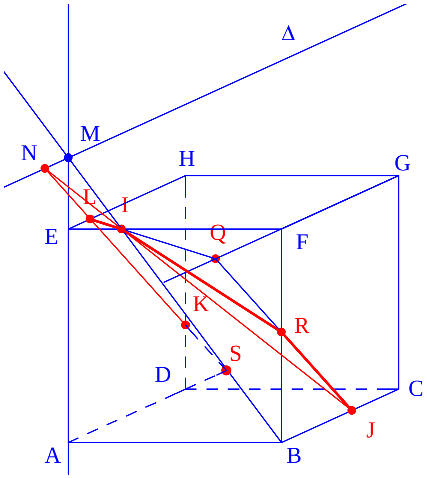
On trace la droite (GJ).
Elle rencontre le segment [BF] en un point R.

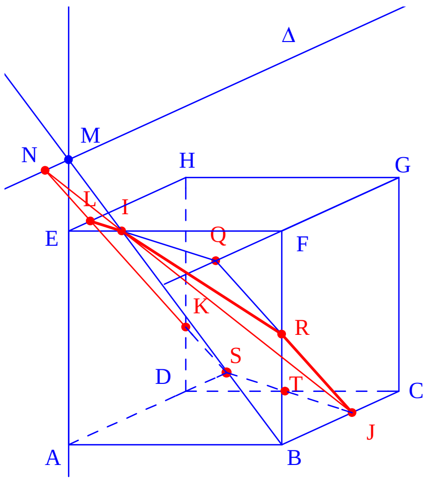


On trace en rouge les segments [IL], [IR] et [RJ].

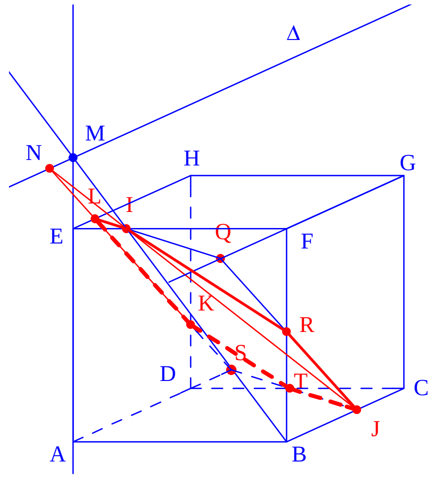


On construit le point de rencontre S des droites (KL) et (AD).





On joint les segments [LK], [KT], [TJ].



La section est l’hexagone ILKTJR.

On peut proposer une représentation en perspective différente. C’est ce qu’a fait Vincent Espérance dans son devoir (2 représentations en perspectives différentes).