TS1

Devoir pour le vendredi 21 décembre 2012

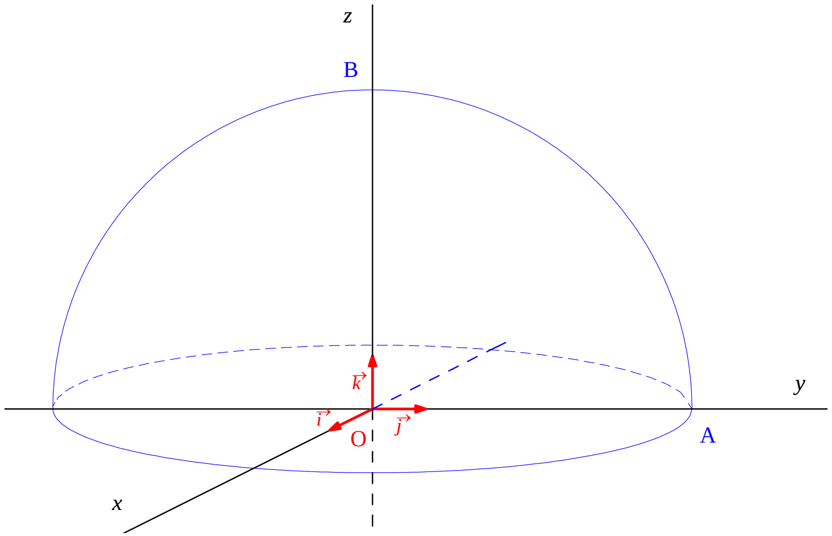
Volume de la boule

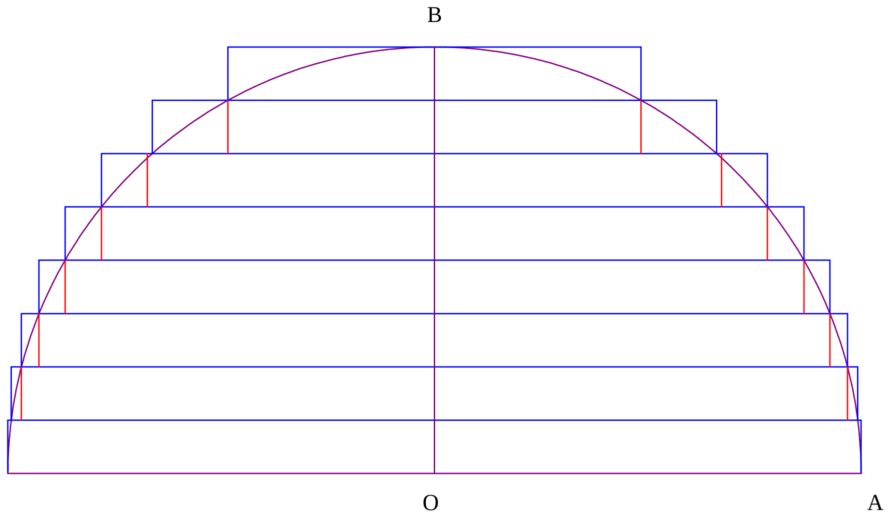
L'objet de ce problème est de déterminer le volume V d'une boule de centre O et de rayon R ($R > 0$).
Pour cela, on commence par déterminer un encadrement du volume de la demi-boule à l'aide de deux suites.

Le principe

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on subdivise le segment [OB] en n segments de même longueur $\frac{R}{n}$.

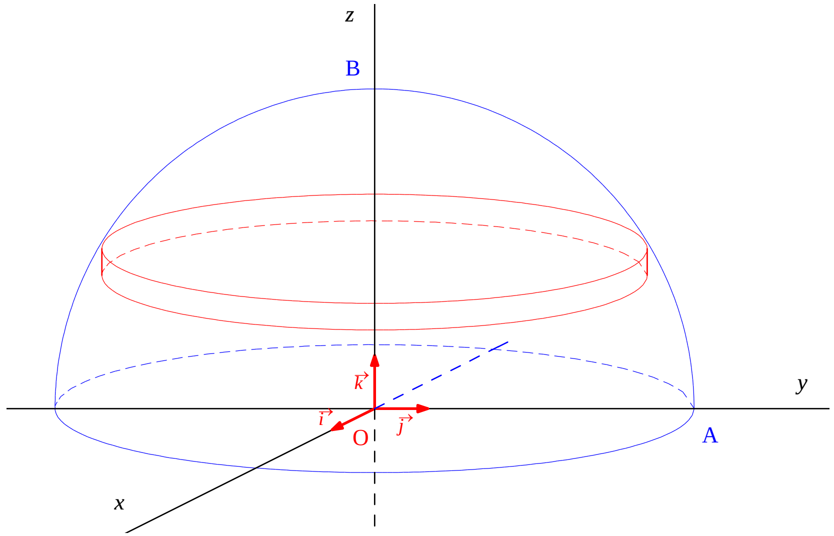
Par commodité (pour mieux voir), on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.



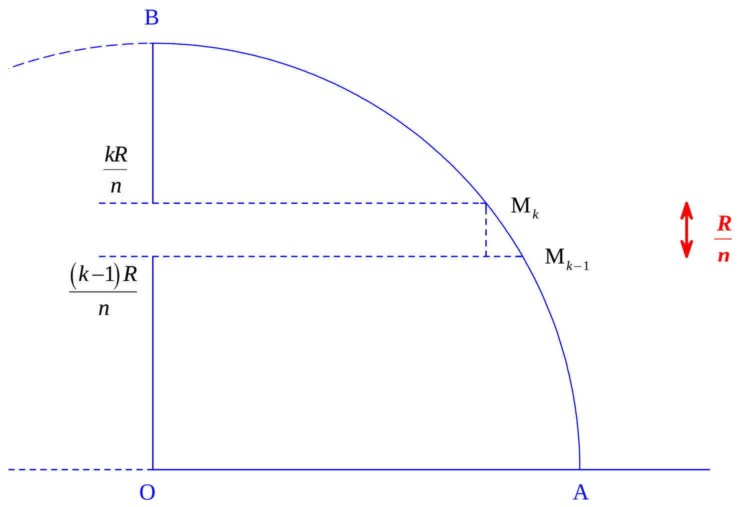


On est alors conduit à considérer n cylindres* extérieurs et $n - 1$ cylindres intérieurs.
On désigne par u_n le volume total des cylindres intérieurs** et par v_n celui des cylindres extérieurs**.

Le volume V vérifie alors $u_n \leqslant \frac{V}{2} \leqslant v_n$.



1°) **Calcul de u_n et v_n**



a) Démontrer que le volume du k-ième cylindre intérieur ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) est égal à : $\left(n^2-k^2\right)\frac{\pi R^3}{n^3}$.

b) Démontrer que l'on a :

$$u_n = \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right] ;$$

$$v_n = \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-0^2\right)+\left(n^2-1^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right].$$

2°) **Passage à la limite**

a) En utilisant l'égalité : $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, démontrer que l'on a :

$u_n = \pi R^3\,\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}$ et $v_n = \pi R^3\,\frac{4n^2+3n-1}{6n^2}$.

b) Étudier les limites de (u_n) et (v_n). Conclure pour la valeur de V.

---

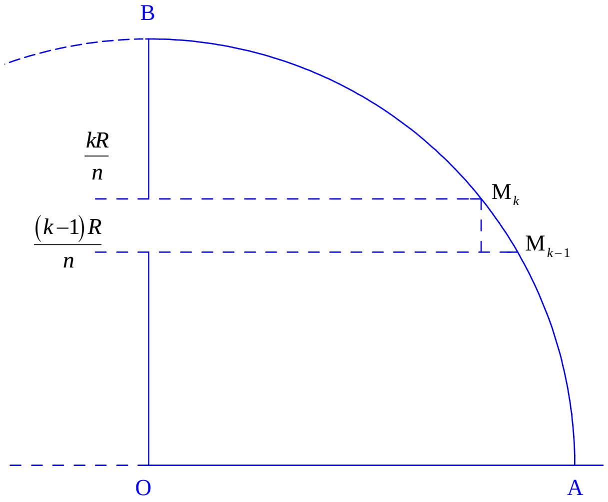
* Dans tout le devoir, il s'agit de cylindres de révolution.

** On nommera cylindre *intérieur* un cylindre situé entièrement à l'intérieur de la boule.
On nommera cylindre *extérieur* un cylindre qui déborde hors de la boule.

On numérotera les cylindres en partant du « bas ».

Corrigé du DM pour le 21-12-2012

1°) **Calcul de u_n et v_n**



a) **Démontrons que le volume du k-ième cylindre intérieur est égal à : $\left(n^2-k^2\right)\frac{\pi R^3}{n^3}$.**

Les cylindres intérieurs sont numérotés en partant du bas.

• Le premier cylindre intérieur est limité par les plans d'équations $z=0$ et $z=\frac{R}{n}$,

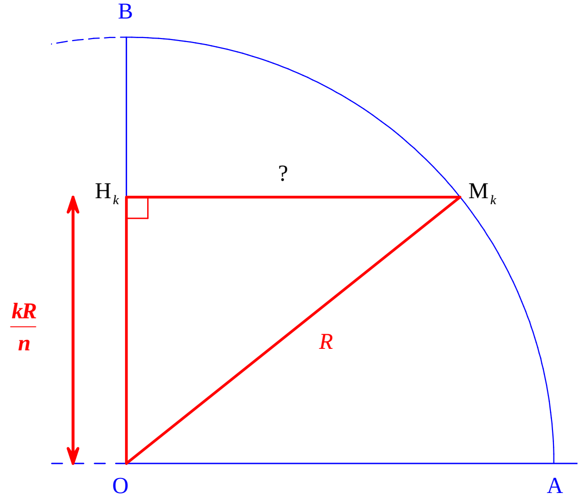
• Le deuxième cylindre intérieur est limité par les plans d'équations $z=\frac{R}{n}$ et $z=\frac{2R}{n}$,

• Le troisième cylindre intérieur est limité par les plans d'équations $z=\frac{2R}{n}$ et $z=\frac{3R}{n}$,

…

• Le k-ième cylindre intérieur est limité par les plans d'équations $z=\frac{(k-1)R}{n}$ et $z=\frac{kR}{n}$,

Soit r_k le rayon de la base du k-ième cylindre intérieur.



D'après le théorème de Pythagore (faire une figure rapide), on a : $r_k^{\ 2}=R^2-\frac{k^2R^2}{n^2}$ soit $r_k^{\ 2}=\frac{\left(n^2-k^2\right)R^2}{n^2}$.

Le volume du k-ième cylindre intérieur est donc égal à

$$a_k=\pi\times\frac{\left(n^2-k^2\right)R^2}{n^2}\times\frac{R}{n}=\pi\times\frac{\left(n^2-k^2\right)R^3}{n^3}.$$

b) **Démontrons que l'on a :**

$$u_n=\frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]\ ;\ v_n=\frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-0^2\right)+\left(n^2-1^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]$$

u_n est la somme des volumes des $n-1$ cylindres intérieurs.

Donc $u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(n^2-k^2\right)\frac{\pi R^3}{n^3}$

$$=\frac{\pi R^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(n^2-k^2\right)$$

$$=\frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]$$

On constate que le volume du k-ième cylindre extérieur est égal à celui du $(k-1)$ - ième cylindre intérieur donc

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{\pi R^3}{n} + \sum_{k=2}^{n}\left(n^2-(k-1)^2\right)\frac{\pi R^3}{n^3}\\
&= \frac{\pi R^3}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(n^2-k^2\right)\frac{\pi R^3}{n^3}\\
&= \frac{\pi R^3}{n} + u_n\\
&= \frac{\pi R^3}{n} + \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-0^2\right)+\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]
\end{aligned}$$

2°) **Passage à la limite**

a) On admet que : $\mathbf{1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

Démontrons que $u_n = \pi R^3\dfrac{4n^2-3n-1}{6n^2}$ et $v_n = \pi R^3\dfrac{4n^2+3n-1}{6n^2}$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[n^2-1^2+n^2-2^2+\ldots+n^2-(n-1)^2\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\underbrace{n^2+n^2+\ldots+n^2}_{(n-1)\text{ termes}}-\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[(n-1)n^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}(n-1)n\left[n-\frac{(2n-1)}{6}\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^2}(n-1)\frac{4n+1}{6}\\
&= \pi R^3\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\left(n^2-0^2\right)+\left(n^2-1^2\right)+\left(n^2-2^2\right)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[\underbrace{n^2+n^2+\ldots+n^2}_{n\text{ termes}}-\left(0^2+1^2+\ldots+(n-1)^2\right)\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}\left[n^3-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^3}n\left[n^2-\frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right]\\
&= \frac{\pi R^3}{n^2}\times\frac{6n^2-(n-1)(2n-1)}{6}\\
&= \frac{\pi R^3}{n^2}\times\frac{6n^2-\left(2n^2-3n+1\right)}{6}\\
&= \frac{\pi R^3}{n^2}\times\frac{4n^2+3n-1}{6}\\
&= \pi R^3\frac{4n^2+3n-1}{6n^2}
\end{aligned}$$

b)

• Étudions les limites de (u_n) et (v_n).

$$\begin{aligned}
u_n &= \pi R^3\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}\\
&= \pi R^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}\right)
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{3n^2}\right)=\dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{2\pi R^3}{3}$.

$$\begin{aligned}
v_n &= \pi R^3\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}\\
&= \pi R^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}\right)=\dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\dfrac{2\pi R^3}{3}$.

• Concluons pour la valeur de V.

On sait que : $\forall\, n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{V}}{2} \leqslant v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{2\pi R^3}{3}$$

On peut considérer la suite constante (w_n) de terme général $\frac{\mathrm{V}}{2}$.

D'après le théorème général, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{2\pi R^3}{3}$.

Or la suite (w_n) est constante donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{\mathrm{V}}{2}$.

Par unicité de la limite d'une suite, on peut donc écrire : $\frac{\mathrm{V}}{2} = \frac{2\pi R^3}{3}$.

Donc $\mathrm{V} = \frac{4\pi R^3}{3}$.

On retrouve la formule bien connue donnant le volume d'une boule.

Pour aller plus loin :

On peut démontrer que :

- la suite (u_n) est croissante ;

- la suite (v_n) est décroissante ;

- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On retiendra le principe de découpage par tranches, principe fondamental datant du XVII^{e} siècle pour calculer le volume de solides.