TS

Les fonctions cosinus et sinus

Revoir :

cercle trigonométrique, mesures en radians d'un angle orienté, modulo 2π, mesure principales, valeurs remarquables des cosinus, sinus et tangentes, formules de trigonométrie (y compris formules d'addition et de duplication), équations et inéquations trigonométriques

Le mercredi 18-12-2019

Les fonction cosinus et sinus n'ont pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Les fonctions cosinus, sinus, tangente sont des fonctions transcendantes.

Le mercredi 18-11-2019

Solstice

Étymologie : sol, solis : le soleil / stare = rester immobile (racine présente dans les mots statue, station, stationner, stationnaire…

Équinoxe : moment où la nuit est égale au jour

https://www.youtube.com/watch?v=XY6XWt2HRLA
Equinoxe, Solstice et marée
5 oct. 2009
theRealDysko

https://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux/video/les-changements-de-saisons.html

https://www.youtube.com/watch?v=-kgkLR3gwJA
Le système solaire 1 : la rotation de la Terre
•29 déc. 2017

Les idées froides

I. Dérivées des fonctions cosinus et sinus

1°) Formules (démontrées dans le paragraphe V)

- La fonction $u : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$.
- La fonction $v : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = \cos x$.

2°) Autre écriture

$$(\cos)'(x) = -\sin x$$

$$(\sin)'(x) = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

3°) Remarque

$$(\cos)'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin)'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Avec la notation de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

(souvent en Physique, $\frac{\mathrm{d}\cos t}{\mathrm{d}t} = -\sin t$ et $\frac{\mathrm{d}\sin t}{\mathrm{d}t} = \cos t$)

4°) Application à la dérivée de la composée d'une fonction affine suivie de la fonction sinus ou cosinus

• Rappel

a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.
u est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = u(ax+b)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \underline{\underline{a}} \times u'(ax+b)$.

• Application

La fonction $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\,a \times \sin(ax+b)$.

La fonction $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = a \times \cos(ax+b)$.

On retient :

$$\left[\cos(ax+b)\right]' = -\,a \times \sin(ax+b)$$

$$\left[\sin(ax+b)\right]' = a \times \cos(ax+b)$$

• Généralisation

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Les fonctions cos u et sin u sont dérivables sur I et les dérivées sont données par :

$$(\cos u)' = -\,u' \times \sin u$$

$$(\sin u)' = u' \times \cos u$$

5°) Remarque d'écriture (très utiles pour les dérivées)

$f : x \mapsto \cos^3 x$

Calculons $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (\cos x)^3$ (réécriture)

On pose : $u(x) = \cos x$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left[u(x)\right]^3$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= 3 \times u'(x) \times \left[u(x)\right]^2 \\ &= 3 \times (-\sin x) \times (\cos x)^2 \\ &= -\,3 \times \sin x \times \cos^2 x \end{aligned}$$

II. Fonctions périodiques

1°) Définition

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
T est un réel strictement positif.

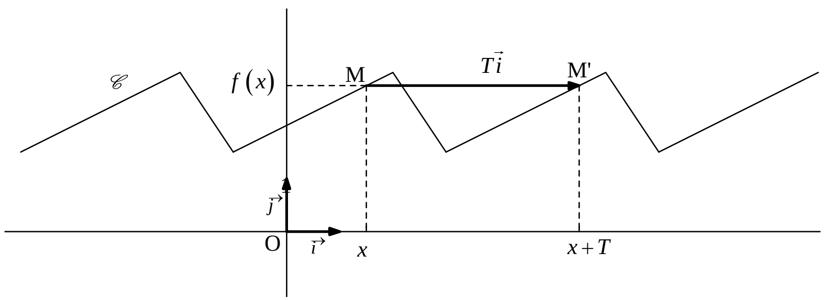
On dit que f est **périodique de période T** pour exprimer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.
(On dit alors que T est une période de f).

2°) Représentation graphique

• Propriété

La représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f périodique de période T est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{u} = T\vec{i}$.

• Démonstration



On note M un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et M' le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x+T$.

$$\text{M}\left|\begin{array}{l} x_{\text{M}} = x \\ y_{\text{M}} = f(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \text{M}'\left|\begin{array}{l} x_{\text{M}'} = x + T \\ y_{\text{M}'} = f(x+T) = \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ périodique de période } T}}{f(x)} \end{array}\right.$$

Donc $\overrightarrow{\text{MM}'}\left|\begin{array}{l} T \\ 0 \end{array}\right.$ d'où $\overrightarrow{\text{MM}'} = T\vec{i}$.

Par suite, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} = T\vec{i}$.

3°) Exercice

$f : x \mapsto \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

Démontrer que f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) &= f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right] \\
&= \cos\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\underbrace{3x + \frac{\pi}{4}}_{X} + 2\pi\right) \\
&= \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Donc f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

4°) Une règle à savoir (en exercice, on refait la démonstration)

> a et b sont deux réels tels que $a > 0$.
>
> Les fonctions $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{a}$.

Plus généralement, on a la propriété suivante :

> a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.
>
> Les fonctions $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

Cette propriété reste valable pour les fonctions $f : x \mapsto A\cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto A\sin(ax+b)$ où A, a, b sont des réels tels que $A \neq 0$ et $a \neq 0$.

5°) Remarque

Lorsqu'une fonction est périodique de période T, on peut limiter l'étude sur **une période** c'est-à-dire sur un intervalle d'amplitude T.

III. Étude des fonctions cosinus et sinus

1°) Définition

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \cos x$	$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \sin x$

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ mais sont à valeurs dans $[-1\,;1]$.

2°) Périodicité

> ***u* et *v* sont périodiques de période 2π.**

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi) \\
&= \cos x \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad v(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi) \\
&= \sin x \\
&= v(x)
\end{aligned}$$

On peut donc étudier *u* et *v* sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

3°) Parité

***u* est paire.**	***v* est impaire.**
• $\mathscr{D}_u = \mathbb{R}$ centré en 0. • $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(-x) = \cos(-x) = \cos x = u(x)$	• $\mathscr{D}_v = \mathbb{R}$ centré en 0. • $\forall x \in \mathbb{R} \quad v(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -v(x)$

On peut donc étudier u et v sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

4°) Variations

• La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$.

x	0		π
SGN de $u'(x)$	0	$-$	0
Variations de u	1	$\searrow$	-1

$u(0) = \cos 0 = 1$

$u(\pi) = \cos \pi = -1$

• La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = \cos x$.

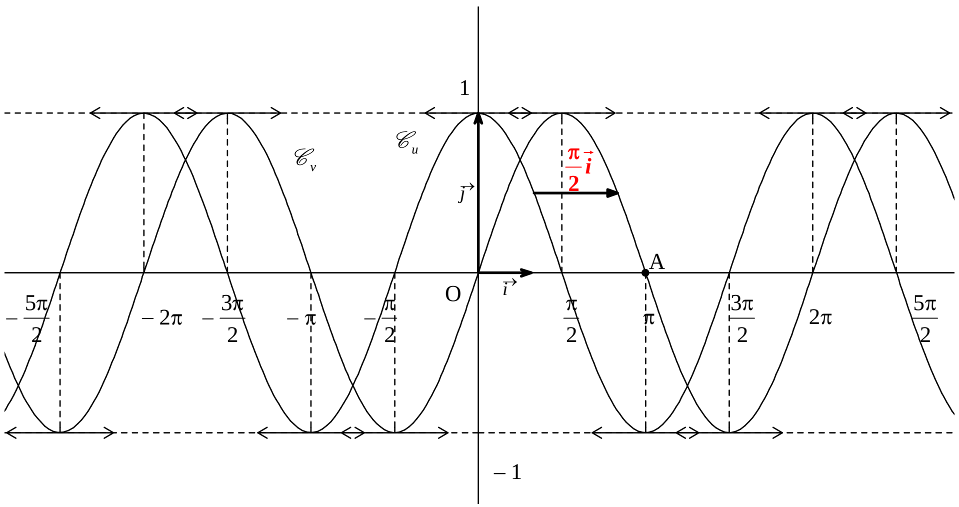
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
SGN de $v'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de v	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$v(0) = \sin 0 = 0$

$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$v(\pi) = \sin \pi = 0$

5°) Représentations graphiques



Les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont **« sinusoïdes »**.

Il y a deux tangentes horizontales : les droites d'équations $y = 1$ et $y = -1$.

6°) Justification des symétries

• $\mathscr{C}_u$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie dans le plan muni d'un repère orthogonal car u est paire.

• $\mathscr{C}_v$ admet l'origine O du repère pour centre de symétrie car la fonction car v est impaire.

• $\mathscr{C}_v$ est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin x$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$u\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = v(x)$$

Rappel :

Soit f une fonction définie sur un domaine D.
On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x-a)$.
On a $\mathscr{C}_g = t_{a\vec{i}}\left(\mathscr{C}_f\right)$.

• $\mathscr{C}_v$ admet la droite d'équation réduite $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

• $\mathscr{C}_u$ admet le point $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}\,;0\right)$ pour centre de symétrie.

IV. Quelques limites à connaître

1°) Une limite fondamentale

On s'intéresse $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \sin x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \\ x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{array}\right\} \text{ donc on rencontre une forme indéterminée du type « } \frac{0}{0} \text{ ».}$$

On va lever l'indétermination.

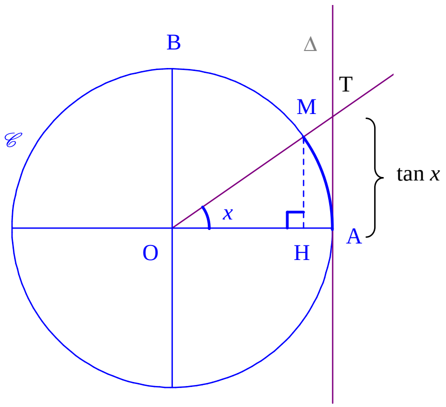
• **Un encadrement de $\dfrac{\sin x}{x}$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$**

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
On note A un point fixé de $\mathscr{C}$.
On note Δ la tangente en A à $\mathscr{C}$.

Soit x un réel quelconque de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On note A un point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{\text{AOM}} = x$.

On note T le point d'intersection de la droite (OM) et de la droite Δ et H le projeté orthogonal de M sur (OA).



Rappels de formules :

① $\boxed{\text{longueur d'un arc de cercle} = R \times \alpha}$ où R désigne le rayon du cercle et α la mesure en radian de l'angle au centre associé.

② $\boxed{\text{aire d'un secteur circulaire} = \dfrac{R^2 \times \alpha}{2}}$ où R désigne le rayon du cercle et α la mesure en radian de l'angle au centre associé.

On démontre cette formule en utilisant le fait que l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à la mesure en radians de l'angle au centre associé.

On peut effecteur une vérification pour $\alpha = 2\pi$.
On obtient que l'aire du secteur circulaire vaut πR^2 qui correspond bien à l'aire d'un disque de rayon R.

③ $\boxed{\text{aire d'un triangle ABC quelconque} = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{\text{A}}}$ où b désigne la longueur AC, c la longueur AB et $\widehat{\text{A}}$ l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

$\mathscr{A}(\text{secteur } \widehat{\text{OAM}}) = \dfrac{x \times R^2}{2} = \dfrac{x \times 1^2}{2} = \dfrac{x}{2}$

$\mathscr{A}(\text{triangle OAT}) = \dfrac{\text{OA} \times \text{AT}}{2} = \dfrac{\tan x}{2}$

$\mathscr{A}(\text{triangle OAM}) = \dfrac{\text{OA} \times \text{HM}}{2} = \dfrac{1 \times \sin x}{2} = \dfrac{\sin x}{2}$

Graphiquement, on a : $\mathscr{A}$(triangle OAM) < $\mathscr{A}$(secteur $\widehat{\text{OAM}}$) < $\mathscr{A}$(triangle OAT).

D'où $\dfrac{\sin x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\tan x}{2}$

D'où $\overbrace{\sin x < x}^{(1)} \underbrace{< \tan x}_{(2)}$

L'inégalité $\sin x < x$ (1) donne $\dfrac{\sin x}{x} < 1$ (tout est positif).

L'inégalité $x < \tan x$ (2) donne $x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$ soit $\cos x < \dfrac{\sin x}{x}$ (tout est positif).

On en déduit que $\forall x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\quad \cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

Autre méthode :

L'encadrement $\sin x < x < \tan x$ peut être obtenu directement en comparant la longueur du segment [HM], de l'arc $\overset{\frown}{\text{AM}}$, du segment [AT].

$\text{HM} < \text{long}\ \overset{\frown}{\text{AM}} < \text{AT}$

Donc $\sin x < x < \tan x$.

Autre méthode :

On peut se passer du cercle $\mathscr{C}$.

Soit OAT un triangle rectangle en A tel que $\text{OA} = 1$.
Le cercle de centre O et de rayon 1 coupe le segment [OT] en un point M.

• **Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures** (c'est-à-dire en restant strictement positif ; on écrit $x \to 0^+$)

$\left.\begin{array}{l}\cos x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1\\ 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1\end{array}\right\}$ donc $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ (théorème des gendarmes pour les fonctions).

• **Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures** (c'est-à-dire en restant strictement négatif ; on écrit $x \to 0^-$)

$x \to 0^- \quad \Leftrightarrow \quad x \to 0^+$

$\forall x \neq 0 \quad \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$

Donc $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$

• **Conclusion : $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$**

On retiendra :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

• **Interprétation :**

$\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ donc l'égalité $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ permet de dire que la fonction sinus est dérivable en 0 et le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 est 1.

On retiendra que le résultat de la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 est à relier au nombre dérivé de la fonction sinus en 0.

2°) Deux autres limites importantes qui se déduisent de la limite fondamentale

• $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

Démonstration :

1ère méthode :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$
$$= \frac{2\times\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

2e méthode :

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1+\cos x}$$

$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\dfrac{1}{1+\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$ donc par limite d'un produit $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$.

• **Conséquence :** $\dfrac{1-\cos x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Démonstration :

$$\frac{1-\cos x}{x} = x \times \frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

V. Démonstrations des dérivées de fonctions cosinus et sinus

1°) Dérivée de la fonction cosinus

On considère un réel x_0 fixé.

On désire étudier la dérivabilité de la fonction cosinus en x_0.

h est un réel non nul.

$$\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} = \frac{\cos x_0 \times \cos h - \sin h \times \sin x_0 - \cos x_0}{h}$$

$$= \cos x_0 \times \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{0} - \sin x_0 \times \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -\sin x_0$$

On en déduit que la fonction cosinus est dérivable en x_0 et $\cos'(x_0) = -\sin x_0$

2°) Dérivée de la fonction sinus

On considère un réel x_0 fixé.

On désire étudier la dérivabilité de la fonction sinus en x_0.

h est un réel non nul.

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \frac{\sin x_0 \times \cos h + \sin h \times \cos x_0 - \sin x_0}{h}$$

$$= \sin x_0 \times \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x_0 \times \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x_0$$

On en déduit que la fonction sinus est dérivable en x_0 et $\sin'(x_0) = \cos x_0$.

VI. Arccosinus et Arcsinus d'un réel

1°) Arccosinus d'un réel

• **Définition :**

x	0	x	π
$\cos x$	1	y	-1

D'après le corollaire du TVI, pour tout réel $y \in [-1;1]$, il existe un unique réel $x \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos x = y$ ($\forall\, y \in [-1;1] \quad \exists\,!\; x \in [0\,;\pi] \;/\; \cos x = y$).

Ce réel x est appelé **« Arccosinus de y »**. On note **x = Arccos y**.

Il est possible de donner une formulation de cette propriété en utilisant le mot « antécédent ».

• **Calculatrice TI-83 Premium CE :** touche $\boxed{\text{trig}}$ choisir $\cos^{-1}$ (mode radian)

• **Exemples :**

$\text{Arccos}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ ($\dfrac{\pi}{3}$ est l'unique réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ dont le cosinus est égal à $\dfrac{1}{2}$).

$\text{Arccos}\;0,4 = 1,15927948...$ (avec la calculatrice)

On n'utilise pas à l'écrit la notation « $\cos^{-1}$ » de la calculatrice.

Si on cherche à calculer l'Arccosinus d'un réel hors de l'intervalle $[-1;1]$ avec la calculatrice, celle-ci affiche un message d'erreur.

On ne peut pas calculer un Arccosinus à la main. La calculatrice utilise l'algorithme Cordic.

Autrefois, lecture inverse des tables trigonométriques.

2°) Arcsinus d'un réel

• **Définition**

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	x	$\dfrac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	y	1

D'après le corollaire du TVI, pour tout réel $y \in [-1\,;1]$, il existe un unique réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = y$

$\left(\forall y \in [-1\,;1] \quad \exists\,!\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] / \sin x = y\right)$.

Ce réel x est appelé **« Arcsinus de *y* »**. On note **$x = \text{Arcsin}\, y$** .

• **Calculatrice TI-83 Premium CE :** touche $\boxed{\text{trig}}$ choisir $\sin^{-1}$ (mode radian)

• **Exemple :** $\text{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

3°) Commentaires

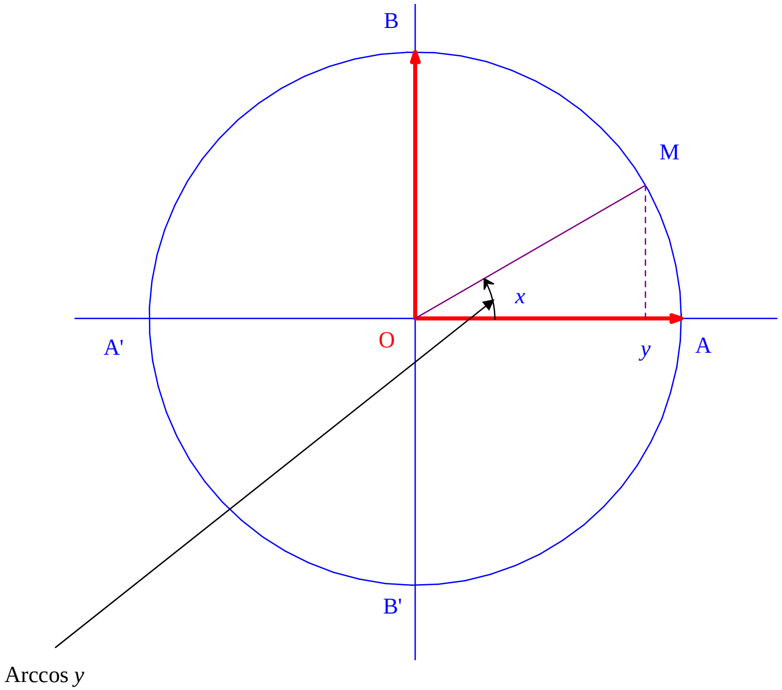
Les fonctions Arcsinus et Arccosinus sont des fonctions importantes. Elles seront étudiées l'année prochaine.

Leur étude sera complétée par la fonction Arctangente.

Les fonctions Arccosinus, Arcsinus, Arctangente seront définies en termes de bijection.

Ce sont des fonctions transcendantes ; on ne peut pas les exprimer à l'aide des symboles usuels.

4°) Illustration



5°) Exemples pour comprendre les définitions

$\text{Arccos}\,\frac{3}{4}$ est l'unique réel α de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

$\text{Arcsin}\,\frac{3}{4}$ est l'unique réel α de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

6°) Exemple d'utilisation

Imaginons que dans un exercice on ait besoin du réel $\alpha \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

Comme $\frac{3}{4}$ n'est pas le cosinus d'une valeur connue, on peut définir α comme l'arccosinus de $\frac{3}{4}$.

C'est même l'unique manière de définir α.

On écrira $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{3}{4}$.

Cette égalité définit complètement α ; $\text{Arccos}\,\frac{3}{4}$ est la seule écriture de la valeur exacte de α.

$\text{Arccos}\,\frac{3}{4}$ est l'unique réel α de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

La calculatrice est indispensable pour obtenir le début de l'écriture décimale de α.

Il est possible de construire très facilement sur le cercle trigonométrique le point M image de α et donc de faire apparaître α comme mesure en radian d'un angle orienté.

VII. Rappels sur les équations trigonométriques

1°) Équations du type $\cos x = a$

$a \in \mathbb{R}$ fixé

On s'intéresse à l'équation $\cos x = a \quad (1)$.

1[er] cas : $|a| \leqslant 1$

On note x_0 un réel tel que $\cos x_0 = a$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -x_0 + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

2[e] cas : $|a| > 1$

L'équation (1) n'a pas de solution.

2°) Équations du type $\sin x = a$

$a \in \mathbb{R}$ fixé
On s'intéresse à l'équation $\sin x = a \quad (1)$.

1

1^{er} cas : $|a| \leqslant 1$

On note x_0 un réel tel que $\sin x_0 = a$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - x_0 + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

2^{e} cas : $|a| > 1$

L'équation (1) n'a pas de solution.

VIII. Conséquence de la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 : approximations du sinus et de la tangente au voisinage de 0

1°) Propriété

Pour x « proche » de 0, on a $\sin x \approx x$ et $\tan x \approx x$.

2°) Démonstration

La tangente en O à la courbe de la fonction sinus a pour équation $y = x$ (démonstration facile).
Au voisinage de O, la courbe de la fonction sinus est donc quasiment confondue avec la droite d'équation $y = x$.

3°) Utilisation

• Ces approximations sont utilisées en physique (cf. calcul du rayon de la terre selon la méthode d'Ératosthène, diffraction des ondes).

• Elles sont relativement peu utilisées en mathématiques, du moins sous cette forme.
Elles seront en revanche reprises sous une autre forme dans le supérieur.
On peut toutefois mentionner une application évidente au calcul mental pour la détermination du sinus ou de la tangente d'un réel proche de 0 sans calculatrice.

• L'énoncé n'est pas très précis. Que veut dire en effet « x proche de 0 » ?
Tout ce que l'on peut dire c'est que plus x est proche de 0, plus l'approximation est bonne.
En physique, les conditions d'approximation sont précisées dans les énoncés.

4°) Remarques

• On peut retrouver ces approximations géométriquement très simplement en considérant la longueur d'un arc d'un cercle de rayon 1 intercepté par un angle au centre de x radians.

• Il s'agit d'approximations linéaires (affines). Dans l'enseignement supérieur, on verra des approximations polynomiales plus précises (approximations d'ordre supérieur ou égal à 2 : $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ …).

IX. Utilisation en physique

En physique, on utiliser couramment des fonctions trigonométriques associées aux fonctions cosinus et sinus de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \mathrm{A}\sin(\omega t + \varphi)$ où A, ω et φ sont des réels tels que $\mathrm{A} > 0$ et $\omega > 0$.

Ce sont des fonction composées de la fonction affine $t \mapsto \omega t + \varphi$ et des fonctions cosinus et sinus.

Ces fonctions sont périodiques de période $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (on retrouve la formule bien connue en physique liant la pulsation ω et la période T.
Elles sont à valeurs dans l'intervalle $[-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}]$. Leur maximum est A et leur minimum est – A.

Ces fonctions interviennent dans deux nombreux domaines : ondes, électricité, oscillateurs harmoniques, marées, durée du jour (cf. solstice et équinoxe)…

Appendices :

Appendice 1

À propos de la périodicité des fonctions du type $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$

• Propriété générale [composée d'une fonction affine suivie d'une fonction périodique]

> Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ de période $\mathrm{T} > 0$.
> Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
>
> La fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est périodique de période $\mathrm{T}' = \dfrac{\mathrm{T}}{|a|}$.

• Démonstration très facile laissée en exercice.

• L'application de cette propriété donne immédiatement que les fonctions $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ sont périodiques de période $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

• Autre propriété générale sur les fonctions périodiques

> Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ de période T $(\mathrm{T} > 0)$.
> Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a $f(x+k\mathrm{T}) = f(x)$.

Appendice 2

À propos des unités dans les formules de longueur d'un arc et de l'aire d'un secteur.

① $\boxed{\text{longueur d'un arc de cercle} = R \times \alpha}$ où R désigne le rayon du cercle et α la mesure en radian de l'angle au centre associé.

• α est toujours en radian.

• La longueur de l'arc est dans la même unité de longueur que R.
Par exemple, si R est exprimé en centimètres, la longueur sera exprimée en centimètres.

Que se passe-t-il lorsque « l'on n'a pas d'unité » ?

C'est le cas ici, où l'on considère le cercle trigonométrique a pour rayon 1.
On sait que, par définition, le cercle trigonométrique a pour rayon 1.
Cela signifie qu'il a pour rayon 1 pour l'unité de longueur choisie.

② $\boxed{\text{aire d'un secteur circulaire} = \dfrac{R^2 \times \alpha}{2}}$ où R désigne le rayon du cercle et α la mesure en radian de l'angle au centre associé.

• α est toujours en radian.

• L'aire du secteur circulaire est dans l'unité d'aire correspondant à l'unité de longueur dans laquelle est exprimée R. L'unité d'aire est égale à l'unité de longueur au carré.

Par exemple, si R est exprimé en centimètres, l'aire du secteur circulaire sera exprimée en cm^2.

Appendice 3

Question d'Alliette Ravillion le 9-1-2015

« Ça fait quoi qu'une fonction soit paire ou impaire ? »

Réponse :

Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on limite (réduit) l'étude à la « partie positive » de son ensemble de définition.

Appendice

La cycloïde

$$\mathscr{C}\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Calcul de l'aire d'une arche de cycloïde.

On observe que *y* est la dérivée de *x*.

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} y(t)\,x'(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\ \mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\ \mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)\ \mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\ \mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)\ \mathrm{d}t$$

$$\mathscr{A} = \frac{3}{2}\times 2\pi - 0$$

$$\mathscr{A} = 3\pi \quad \text{u. a.}$$

On peut écrire $\mathscr{A} = \int_{\mathscr{C}^+} y\ \mathrm{d}x$ (intégrale curviligne de la forme différentielle *y* d*x*).