1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 10 décembre 2012 (30 min)

Prénom et nom : …………………………………………… **Note : ……../ 20**

- Ne rien écrire sur le sujet en dehors de ce qui est demandé.
- Tirer tous les traits de fractions à la règle.

I. (9 points)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes.
On effectuera les calculs au brouillon.
Donner l'expression de la dérivée sous la forme précisée à chaque fois.

1°) $f(x)=x\sqrt{3}-1$ $\qquad f'(x)=$ ……………………………………………………

2°) $f(x)=(2x-3)(x^2+4x-1)$ $\qquad f'(x)=$ …………………………………………………… *

3°) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+x+3}$ $\qquad f'(x)=$ …………………………………………………… **

4°) $f(x)=(1-2x)^6$ $\qquad f'(x)=$ …………………………………………………… ***

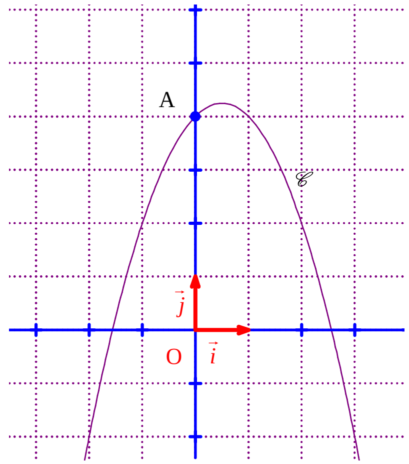
5°) $f(x)=\dfrac{5}{3x^2+1}$ $\qquad f'(x)=$ …………………………………………………… **

* Expression développée, réduite et ordonnée.

** Numérateur développé réduit ; dénominateur factorisé.

*** Expression factorisée.

II. (3 points)
On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2+x+4$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x)=$ ……………………………….. (écrire une seule expression)

2°) On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

Compléter la phrase :

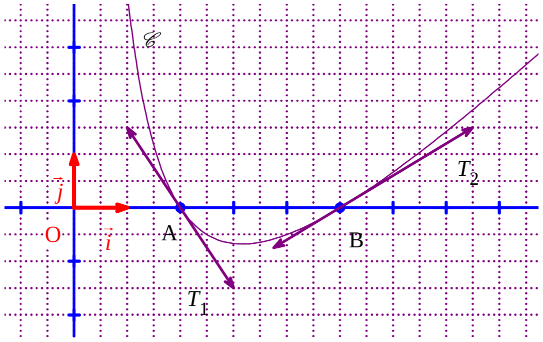
Le coefficient directeur de T est égal à : ……… (écrire une seule valeur).

Tracer T sur le graphique ci-dessus (au stylo ou au crayon) sous la forme d'une double flèche.

III. (8 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - 7 + \dfrac{10}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On donne sur le graphique ci-dessous la partie de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Les points A et B ont pour coordonnées respectives (2 ; 0) et (5 ; 0) ; T_1 et T_2 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et B.



1°) Lire graphiquement les coefficients directeurs de T_1 et T_2.

Le coefficient directeur de T_1 est égal à : ……….. .

Le coefficient directeur de T_2 est égal à : ……….. .

2°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) =$ .... (écrire une seule expression)

3°) Grâce à la question 2°), retrouver par le calcul les résultats de la question 1°).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

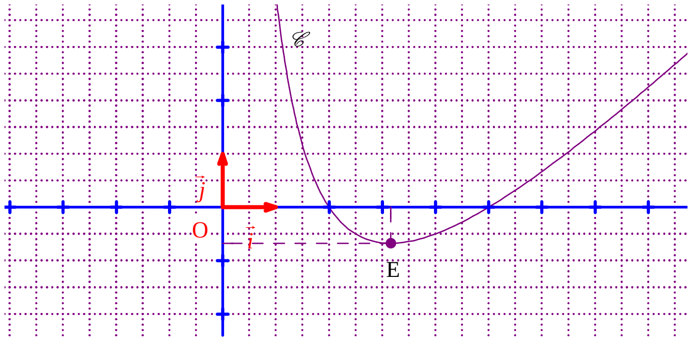
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) Déterminer les équations réduites de T_1 et T_2.

T_1 : ………………………………….. T_2 : …………………………………..

5°) La tangente à $\mathscr{C}$ au point E sur le graphique ci-dessous est horizontale.



Déterminer les coordonnées de E (valeurs exactes sous la forme la plus simple possible).

E(……………. ; ………….)

Reporter les valeurs des coordonnées sur les axes et tracer la tangente en E sous la forme d'une double flèche.

6°) **Question bonus à traiter à la fin s'il reste du temps.**

Les tangentes T_1 et de T_2 se coupent en un point I.

Calculer les coordonnées de I.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 10-12-2012

I. Calculs de dérivées

1°) $f(x)=x\sqrt{3}-1$ $\quad$ $f'(x)=\sqrt{3}$

2°) $f(x)=(2x-3)(x^2+4x-1)$ $\quad$ $f'(x)=6x^2+10x-14$

3°) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+x+3}$ $\quad$ $f'(x)=\dfrac{-2x^2-10x+1}{(x^2+x+3)^2}$

4°) $f(x)=(1-2x)^6$ $\quad$ $f'(x)=-12(1-2x)^5$

5°) $f(x)=\dfrac{5}{3x^2+1}$ $\quad$ $f'(x)=-\dfrac{30x}{(3x^2+1)}$

Calculs détaillés :

1°) $f(x)=x\sqrt{3}-1$

$f'(x)=1\times\sqrt{3}-0$

$=\sqrt{3}$

2°) $f(x)=(2x-3)(x^2+4x-1)$

$f'(x)=2\times(x^2+4x-1)+(2x-3)\times(2x+4)$

$=6x^2+10x-14$

3°) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+x+3}$

$$f'(x)=\frac{2\times(x^2+x+3)-(2x+5)\times(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x+6-(4x^2+12x+5)}{(x^2+x+3)^2}$$ (sous-dérivées à calculer)

$$=\frac{-2x^2-10x+1}{(x^2+x+3)^2}$$

4°) $f(x)=(1-2x)^6$

$f'(x)=6\times(-2)\times(1-2x)^5$

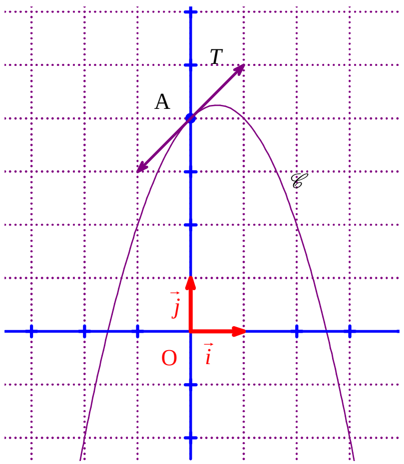
$=-12(1-2x)^5$

5°) $f(x)=\dfrac{5}{3x^2+1}$

$$f'(x)=5\times\left[-\frac{3\times 2x}{(3x^2+1)^2}\right]$$ (sous-dérivée au dénominateur à calculer)

$$=-\frac{30x}{(3x^2+1)^2}$$

II. $f: x\mapsto -x^2+x+4$



1°) **Calculons $f'(x)$.**

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad$ $f'(x)=-2x+1$

2°) T : tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0

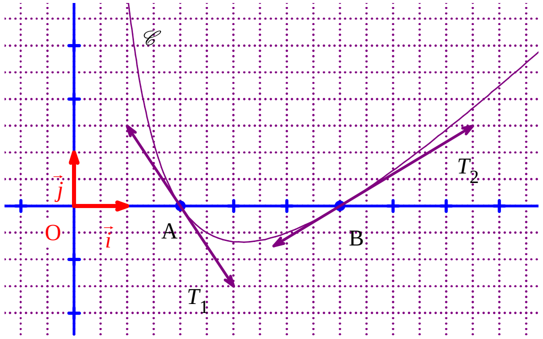
Le coefficient directeur de T est égal à $f'(0)=-2\times 0+1=1$.

On peut effectuer le tracé de T sur le graphique sous la forme d'une double flèche.

On vérifie ce tracé sur la calculatrice graphique.

III. $f : x \mapsto x - 7 + \dfrac{10}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

$\mathscr{C}$: courbe représentative dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$



1°) **Lectures graphiques des coefficients directeurs de T_1 et T_2.**

Le coefficient directeur de T_1 est égal à : $-\dfrac{3}{2}$.

Le coefficient directeur de T_2 est égal à : $\dfrac{3}{5}$.

Attention à bien prendre les bons points qui permettant une lecture précise.

2°) **Calculons $f'(x)$.**

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = 1 - \frac{10}{x^2}$$

3°) **Retrouvons par le calcul les résultats de la question 1°).**

On calcule le coefficient directeur des tangentes grâce à la dérivée qui vient d'être calculée ($f'(x) = 1 - \dfrac{10}{x^2}$).

$$f'(2) = 1 - \frac{10}{2^2} = 1 - \frac{10}{4} = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f'(5) = 1 - \frac{10}{5^2} = 1 - \frac{10}{25} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

On retrouve bien les valeurs qui ont été lues graphiquement.

4°) **Déterminons les équations réduites de T_1 et T_2.**

On applique la formule permettant de trouver l'équation d'une tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$T_1 : y = -\dfrac{3}{2}(x-2) + 0$

$y = -\dfrac{3}{2}x + 3$

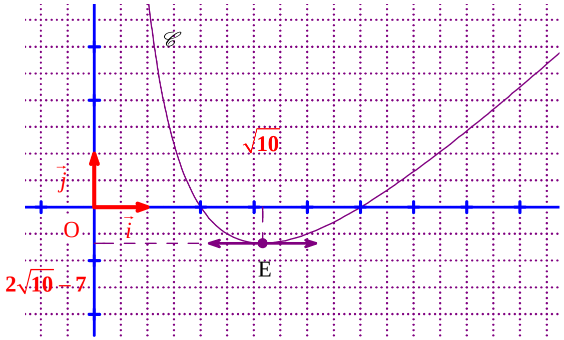
$T_2 : y = \dfrac{3}{5}(x-5) + 0$

$y = \dfrac{3}{5}x - 3$

$T_1 : y = -\dfrac{3}{2}x + 3$ $\qquad$ $T_2 : y = \dfrac{3}{5}x - 3$

On peut vérifier ces équations grâce à la calculatrice.

5°) La tangente à $\mathscr{C}$ au point E est horizontale.



Déterminons les coordonnées de E.

La tangente en E est horizontale donc son coefficient directeur est nul.

On cherche donc en quels réels la dérivée s'annule.

On résout l'équation $f'(x) = 0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$1 - \dfrac{10}{x^2} = 0$

$x^2 = 10$

$x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$

Comme E appartient à la partie de la courbe $\mathscr{C}$ sur $]0\,;+\infty[$, on a : $x_E = \sqrt{10}$.

Comme $E \in \mathscr{C}$, $y_E = f\left(\sqrt{10}\right) = \sqrt{10} - 7 + \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} - 7 + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} - 7$

$E(\sqrt{10}\ ;\ 2\sqrt{10} - 7)$

On reporte les valeurs des coordonnées sur les axes et l'on trace la tangente en E sous la forme d'une double flèche.

Remarque :

Le point E correspond au minimum de la fonction f sur $\left]0\,;+\infty\right[$.
Grâce à cette remarque, on peut aisément déterminer des valeurs approchées des coordonnées de E grâce à la calculatrice (commande spéciale).

6°) **Question bonus**

$T_1 \cap T_2 = \{\ \mathrm{I}\ \}$

Calculons les coordonnées de I.

On a $-\dfrac{3}{2}x_{\mathrm{I}}+3=\dfrac{3}{5}x_{\mathrm{I}}-3$

$$\frac{3}{5}x_{\mathrm{I}}+\frac{3}{2}x_{\mathrm{I}}=6$$

$$\frac{21}{10}x_{\mathrm{I}}=6$$

$$\frac{7}{10}x_{\mathrm{I}}=2$$

$$x_{\mathrm{I}}=\frac{20}{7}$$

$$\begin{aligned}
y_{\mathrm{I}} &= -\frac{3}{2}x_{\mathrm{I}}+3\\
&= -\frac{3}{2}\times\frac{20}{7}+3\\
&= 3-\frac{30}{7}\\
&= -\frac{9}{7}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{I}\left(\dfrac{20}{7}\,;-\dfrac{9}{7}\right)$.