TS # L'espace muni d'un repère orthonormé

Plan du chapitre :

Le 20-6-2023

T spé
Questions rapides :
Nature de l'ensemble

- $x = z$
- x^2+y^2+z^2=4

On note E l'ensemble des points de l'espace et $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

I. Repères orthonormés de l'espace et bases orthonormées de l'ensemble des vecteurs de l'espace

1°) Repère orthonormé de l'espace

Définition :

On dit qu'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace E est **orthonormé** s'il vérifie les conditions suivantes :

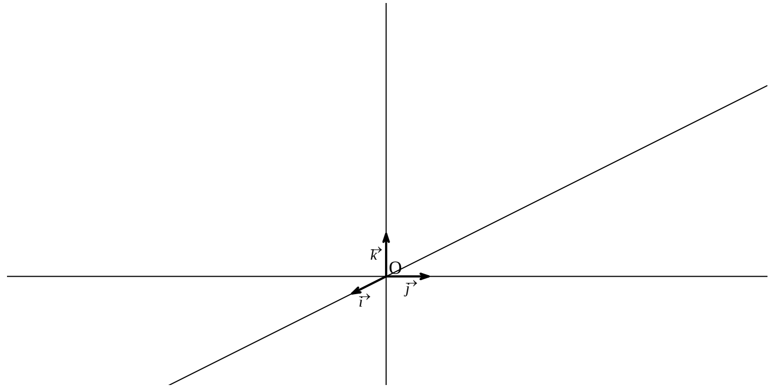
C_1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$

C_2 : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

Les vecteurs de base sont orthogonaux et de norme 1 (on dit qu'ils sont normés ou unitaires).

2°) Représentation en perspective cavalière

Rappel de la disposition des axes dans l'espace :



(N. B. : Le symbole d'orthogonalité $\perp$ s'emploie pour des vecteurs, pour des droites et pour des plans de l'espace ; on parle de vecteurs orthogonaux et non de vecteurs perpendiculaires).

3°) Base orthonormée de l'ensemble des vecteurs de l'espace

Définition :

On appelle **base orthonormée** de l'ensemble $\vec{E}$ des vecteurs de l'espace tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs vérifiant les conditions suivantes :

C_1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$

C_2 : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

On peut démontrer que si trois vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, alors ils ne sont pas coplanaires.

4°) Repères orthonormés associés à un cube et à un pavé droit

Il s'agit de l'analogue dans l'espace des repères orthonormés associés à un carré ou à un rectangle dans le plan.

Rappel de définition [vecteur normé] :

On dit qu'un vecteur de $\vec{E}$ est normé pour exprimer que sa norme est égale à 1.

On parle aussi de vecteur unitaire.
On retiendra « vecteur normé = vecteur de norme 1 ».

Cela justifie l'appellation de repère orthonormé : il est orthogonal et les trois vecteurs de base sont normés.

Propriété [vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur non nul] :

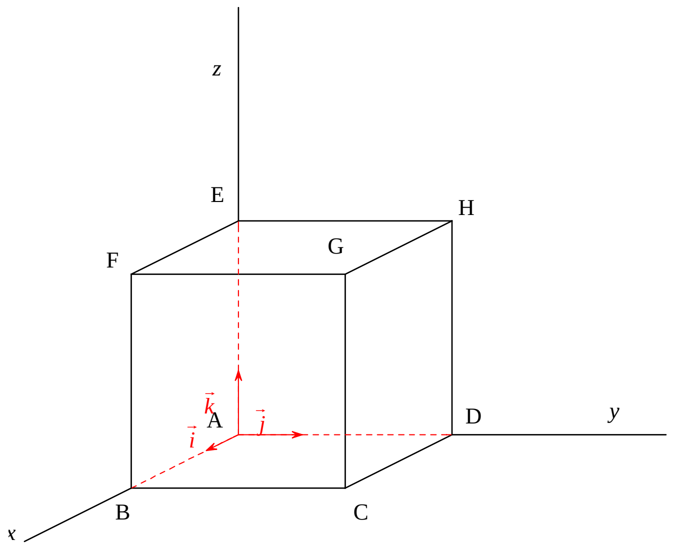
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\vec{E}$. Il existe deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$: le vecteur $\vec{v}=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ (vecteur colinéaire et de même sens que $\vec{u}$) et le vecteur $\vec{v}'=-\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ (vecteur colinéaire et de sens contraire de $\vec{u}$).

① Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

On pose $\vec{i}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et unitaires.

Le repère $\left(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est donc un repère orthonormé de l'espace.



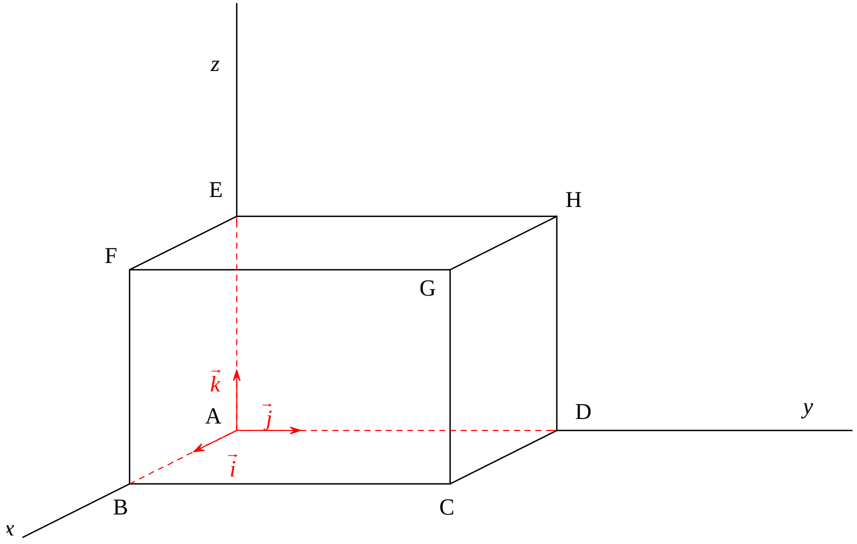
On peut prendre n'importe quel sommet du cube pour origine du repère.

② Soit ABCDEFGH un pavé droit. On pose $\text{AB} = a$, $\text{AD} = b$, $\text{AE} = c$.

On pose $\vec{i} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{AB}}$, $\vec{j} = \dfrac{1}{b}\overrightarrow{\text{AD}}$, $\vec{k} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{\text{AE}}$.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et unitaires.

Le repère $\left(\text{A}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est donc un repère orthonormé de l'espace.



Dans toute la suite du chapitre, on suppose que l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

II. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée

1°) Formule fondamentale [expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs de l'espace]

$\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{E}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

2°) Démonstration

La démonstration est analogue à celle qui a été faite dans une base orthonormée du plan.

Il est important de la comprendre et de savoir la refaire.

On décompose les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, c'est-à-dire qu'on exprime chacun des deux vecteurs en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right) \\ &= \left(x\vec{i}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right) + \left(x\vec{i}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right) + \left(x\vec{i}\right)\cdot\left(z'\vec{k}\right) + \left(y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right) + \left(y\vec{j}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right) + \left(y\vec{i}\right)\cdot\left(z'\vec{k}\right) + \left(z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right) \\ &\qquad + \left(z\vec{k}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right) + \left(z\vec{k}\right)\cdot\left(z'\vec{k}\right)\end{aligned}$$

(développement scalaire)

$= xx'\vec{i}^{\,2} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + xz'\vec{i} \cdot \vec{k} + \ldots$ (on utilise la bilinéarité du produit scalaire)

Tous les carrés scalaires $\vec{i}^{\,2}$, $\vec{j}^{\,2}$, $\vec{k}^{\,2}$ sont égaux à 1 puisque, la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ étant orthonormée, tous les vecteurs de base ont pour norme 1.

Tous les produits scalaires $\vec{i} \cdot \vec{j}$, $\vec{j} \cdot \vec{k}$, $\vec{i} \cdot \vec{k}$ sont égaux à 0 puisque, la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ étant orthonormée, les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.

On obtient l'expression finalement $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

On retient :

produit scalaire de deux vecteurs = produit des abscisses + produit des ordonnées + produit des cotes

3°) Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}(3,-1,0)$ et $\vec{v}(2,0,5)$ dans une base orthonormée de $\vec{E}$.
Calculer leur produit scalaire.

On a intérêt à écrire les coordonnées des vecteurs sous forme de vecteurs colonnes : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$.

Cela facilite le calcul du produit scalaire.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=3\times2-1\times0+0\times5$

$=6$

4°) Complément : expression analytique du produit scalaire dans un repère quelconque

On suppose que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est quelconque.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\left(x\vec{i}\right)\bullet\left(x'\vec{i}\right)+\left(x\vec{i}\right)\bullet\left(y'\vec{j}\right)+\left(x\vec{i}\right)\bullet\left(z'\vec{k}\right)+\left(y\vec{j}\right)\bullet\left(x'\vec{i}\right)+\left(y\vec{j}\right)\bullet\left(y'\vec{j}\right)+\left(y\vec{i}\right)\bullet\left(z'\vec{k}\right)+\left(z\vec{k}\right)\bullet\left(x'\vec{i}\right)$$
$$+\left(z\vec{k}\right)\bullet\left(y'\vec{j}\right)+\left(z\vec{k}\right)\bullet\left(z'\vec{k}\right)$$

On peut poursuivre en utilisant les normes des vecteurs de base et les angles entre les vecteurs de base.
On obtient l'expression analytique du produit scalaire dans une base quelconque.

① On suppose que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthogonale.
Il reste 3 termes.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'\left\|\vec{i}\right\|^2+yy'\left\|\vec{j}\right\|^2+zz'\left\|\vec{k}\right\|^2$

On obtient l'expression analytique du produit scalaire dans une base orthogonale.

② On suppose que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'\times1+yy'\times1+zz'\times1$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

5°) Lien avec les matrices

Il s'agit de l'unique coefficient du produit matriciel $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ [matrice 1 × 1].

Le 26-1-2021

On part d'une base quelconque $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
- Si la base est orthogonale, il reste trois termes.
- Si la base est quelconque, il faut tenir compte des normes des vecteurs et des angles qu'ils forment deux à deux.

6°) Utilisation de la calculatrice Numworks

Le lundi 7 mars 2022

Calculatrice Numworks

Aller dans « Calculs » puis boîte à outils rubrique « Matrices et vecteurs » puis Vecteurs

dot(U,V) Produit scalaire

En anglais, le produit scalaire est appelé dot product (dot = point en anglais, en référence au point qui sert à noter un produit scalaire) ou scalar product.

On rentre les deux vecteurs avec les matrices lignes ou colonnes de leurs coordonnées.
À chaque fois, on doit retourner dans Matrices.

Exemple : $\text{dot}\left(\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\end{bmatrix}\right)$ ou $\text{dot}\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\5\end{bmatrix}\right)$

III. Normes et distances

1°) Expression analytique de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs de l'espace

Formule

$\vec{u}(x\,;y\,;z)$ est un vecteur quelconque de $\vec{E}$.
$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

La norme est exprimée dans l'unité de longueur choisie.

Démonstration :

Il s'agit d'une conséquence directe de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Remarques :

Carré de la norme d'un vecteur : On peut retenir que $\left\|\vec{u}\right\|^2=x^2+y^2+z^2$.
La carré de la norme d'un vecteur dans une base orthogonale est égale à la somme des carrés des coordonnées.

Lien avec les matrices : C'est l'unique coefficient du produit matriciel $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ [matrice 1 × 1].

Cas particulier :

La norme d'un vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une est égale à la valeur absolue de ce réel.

2°) Exemple

On considère le vecteur $\vec{u}(1, 2, 2)$ dans une base orthonormée de $\vec{E}$.
Calculer sa norme.

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{1^2+2^2+2^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Il est préférable de calculer la norme au carré :
$\|\vec{u}\|^2 = 1^2+2^2+2^2 = 9$ donc $\|\vec{u}\| = 3$

2°) Expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé de l'espace

Formule :

$A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ sont deux points quelconques de E.
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

La distance est exprimée dans l'unité de longueur choisie.

Démonstration :

Il s'agit d'une conséquence directe de la formule de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée des vecteurs de l'espace.

Cas particulier :

La distance au carré d'un point M à l'origine du repère dans un repère orthogonal est égale à la somme des carrés des coordonnées de M.

Cas particulier :

La distance d'un point situé sur un axe à l'origine d'une repère est égale à la valeur absolue de la coordonnée non nulle.

3°) Calculatrice Numworks

Aller dans « Calculs » puis boîte à outils rubrique « Matrices et vecteurs » puis Vecteurs

‖ U ‖ Norme

On rentre le vecteur avec la matrice ligne ou colonne de ses coordonnées.

Par exemple, l'affichage à l'écran pour calculer la norme de $\vec{u}$ doit être : $\left\|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right\|$ ou $\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\|$.

Aller dans « Calculs » puis boîte à outils rubrique « Matrices et vecteurs » puis « Vecteurs »

IV. Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux vecteurs

1°) Propriété

$\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{E}$.
$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$

2°) Démonstration

La démonstration découle directement de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs de l'espace et de la condition nécessaire et suffisante de l'orthogonalité de deux vecteurs à l'aide du produit scalaire (« Deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est égal à 0 »).

3°) Mise en application

Pour savoir si deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux, on calcule leur produit scalaire.

Si le résultat est égal à 0, alors les vecteurs sont orthogonaux.

Si le résultat n'est pas égal à 0, alors les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

V. Cosinus de l'angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls

1°) Propriété [cosinus de l'angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls]

$\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ sont deux vecteurs quelconques non nuls de $\vec{E}$.
$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

2°) Démonstration

La formule découle directement de l'expression $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$.

Elle ne nécessite donc aucun effort de mémoire particulier.

VI. Coordonnées d'un vecteur orthogonal à deux autres vecteurs

1°) Propriété

On considère deux vecteurs $\vec{u}\left(x\,;y\,;z\right)$ et $\vec{v}\left(x'\,;y'\,;z'\right)$ de $\vec{E}$.

Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\left(yz'-zy',\,zx'-xz',\,xy'-yx'\right)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

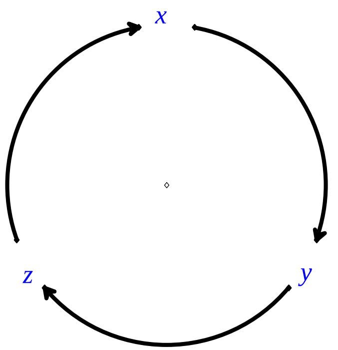
On peut aussi écrire les coordonnées de ce vecteur à l'aide de déterminants sous la forme
$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$.

2°) Notations

Pour appliquer la formule, il est plus commode de travailler avec des coordonnées écrites en colonnes :
$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

On peut poser $p = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $q = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$, $r = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
Avec ces notations, le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $\left(p, q, r\right)$.

On observera la permutation circulaire des lettres *x*, *y*, *z* permettant de passer du déterminant *p* au déterminant *q*, et du déterminant *q* au déterminant *r*.



Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{w}$ est non nul.
En effet, nous avions vu dans le chapitre sur les coordonnées que les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les déterminants *p*, *q*, *r*.

3°) Démonstration

On calcule les produits scalaires $\vec{w}\bullet\vec{u}$ et $\vec{w}\bullet\vec{v}$ en utilisant les coordonnées des vecteurs.
Les calculs sont un peu longs.
Dans les deux cas, on obtient 0.

$$\vec{w}\bullet\vec{u} = x_{\vec{w}} \times x_{\vec{u}} + y_{\vec{w}} \times y_{\vec{u}} + z_{\vec{w}} \times z_{\vec{u}}$$

$$= p \times x + q \times y + r \times z$$

$$= x \times \left(yz'-zy'\right) + y \times \left(zx'-xz'\right) + z \times \left(xy'-yx'\right)$$

$$= xyz'-xzy'+yzx'-yxz'+zxy'-zyx'$$

$$= 0$$

$$\vec{w}\bullet\vec{u} = x_{\vec{w}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{w}} \times y_{\vec{v}} + z_{\vec{w}} \times z_{\vec{v}}$$

$$= \ldots$$

Le vecteur $\vec{w}$ est donc bien orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4°) Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}\left(2, 4, -3\right)$ et $\vec{v}\left(1, -2, 1\right)$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{w}\left(-2, -5, -8\right)$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5°) Calculatrice Numworks

Aller dans « Calculs » puis boîte à outils rubrique « Matrices et vecteurs » puis Vecteurs

cross(U,V) Produit vectoriel

On rentre les vecteurs avec les matrices lignes ou colonnes de leurs coordonnées.

Exemple :

Pour les vecteurs $\vec{u}\left(2, 4, -3\right)$ et $\vec{v}\left(1, -2, 1\right)$, on doit faire afficher à l'écran : $\text{cross}\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

Le 17-1-2023

Récapitulatif commandes Numworks

CALCUL
Boîte à outils
↲ Vecteurs (flèche dans l'autre sens)
→ dot(u,v)
→ cross(u,v)
→ norm(u)

Projetés orthogonaux d'un point sur les plans de coordonnées

Il s'agit de l'application de la propriété du cours suivante que l'on retrouve facilement en faisant un graphique.

Propriété :

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

- Le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) a pour coordonnées $(x\,;y\,;0)$.
- Le projeté orthogonal de M sur le plan (yOz) a pour coordonnées $(0\,;y\,;z)$.
- Le projeté orthogonal de M sur le plan (xOz) a pour coordonnées $(x\,;0\,;z)$.

La propriété est valable dans un repère orthogonal.

La distance de A au plan (xOy) est la distance AΩ. Elle est égale à 4 (évident, c'est la valeur absolue de la cote de A).

La propriété reste valable si le repère est orthogonal.

Cas particulier :

La distance d'un point situé sur un axe du repère au plan de base ne contenant pas cet axe est égale à la valeur absolue de la coordonnée non nulle.

II. Équations cartésiennes de plans

1°) Théorème

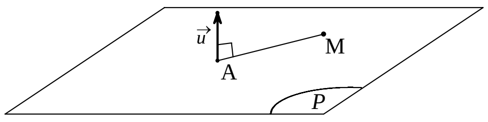
- Tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
- **Réciproquement,** l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ de E tels que $ax+by+cz+d=0$ $\big((a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\big)$ est un plan admettant le vecteur $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ pour **vecteur normal**.

On se réfère à la notion générale de vecteur normal à un plan dans l'espace vue dans le chapitre sur le produit scalaire dans l'espace.

2°) Démonstration de la partie directe

• Hypothèses

P est un plan de l'espace.
$\mathrm{A}(x_0\,;y_0\,;z_0)$ est un point de *P*.
$\vec{u}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à *P*.



• Démonstration

Soit M un point quelconque de E de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M}\in P \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ (orthogonalité des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$) $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$

On pose $d=-ax_0-by_0-cz_0$.

• Conclusion

P admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$.

En multipliant ou en divisant tous les coefficients par un réel non nul, on obtient une autre équation du plan *P*.
Un plan de l'espace admet une infinité d'équations cartésiennes.

3°) Démonstration de la partie réciproque

• Hypothèses

$(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$

$P=\{\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in E\,/\,ax+by+cz+d=0\}$

• Démonstration

On raisonne en deux temps.

1ère étape : On démontre d'abord que *P* est non vide.

En effet, on sait que l'un au moins des trois réels *a*, *b*, *c* est non nul puisque $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.

si $a\neq0$, $\mathrm{A}\left(-\dfrac{d}{a}\,;0\,;0\right)\in P$ car $a\times\left(-\dfrac{d}{a}\right)+b\times0+c\times0+d=-d+d=0$.

si $b\neq0$, $\mathrm{A}\left(0\,;-\dfrac{d}{b}\,;0\right)\in P$ car $a\times0+b\times\left(-\dfrac{d}{b}\right)+c\times0+d=-d+d=0$.

si $c\neq0$, $\mathrm{A}\left(0\,;0\,;-\dfrac{d}{c}\right)\in P$ car $a\times0+b\times0+c\times\left(-\dfrac{d}{c}\right)+d=-d+d=0$.

2e étape : On considère un point $\mathrm{A}(x_0\,;y_0\,;z_0)$ fixé de *P*.

$\mathrm{A}\in P$ donc $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ d'où $d=-ax_0-by_0-cz_0$.

Soit M un point quelconque de *E* de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in P &\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0\\ &\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0\\ &\Leftrightarrow (x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c=0\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\bullet\vec{u}=0 \text{ avec } \vec{u}(a\,;b\,;c)\end{aligned}$$

• Conclusion

P est le plan passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ pour vecteur normal.

Exemple :

$P:\ x-y+2z-1=0$

> On peut écrire : « $P:\ x-y+2z-1=0$ ».
> Les deux points signifie « a pour équation ».

P admet le vecteur $\vec{u}(1;-1;2)$ pour vecteur normal.

> Comme pour les équations de droites ou de courbes dans le plan, le terme d'équation est un terme malheureux.
> On l'utilise car, historiquement, c'est ce terme qui a été utilisé par les mathématiciens.
> Il ne s'agit pas d'une équation au sens ordinaire mais plutôt d'une égalité liant les coordonnées *x*, *y*, *z* d'un point quelconque de l'espace de manière à exprimer son appartenance à *P*.

P admet aussi pour équation cartésienne $3x-3y+6z-3=0$ (multiplication par 3), $-x+y-2z+1=0$ (multiplication par – 1) etc.

En revanche, une forme équivalente telle que $x-y+2z=1$ est bien une équation de *P*, mais n'est pas cartésienne.

On peut multiplier ou diviser par un même nombre non nul tous les coefficients d'une équation cartésienne de plan.

4°) Exemple de détermination d'une équation cartésienne de plan

Déterminons une équation cartésienne du plan *P* passant par le point $\mathrm{A}(5\,;-2\,;1)$ et admettant le vecteur $\vec{u}(3\,;4\,;4)$ pour vecteur normal.
Même démarche que pour une droite dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1ère méthode :

Soit M un point quelconque de *E* de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M}\in P \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sont orthogonaux [ligne facultative]

$\Leftrightarrow \vec{u}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ [ligne indispensable à écrire] $\quad\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}\quad\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\\z-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 3\times(x-5)+4\times(y+2)+4\times(z-1)=0$

$\Leftrightarrow 3x+4y+4z-11=0$

Une équation cartésienne de *P* s'écrit donc $3x+4y+4z-11=0$.

2e méthode :

$\vec{u}(3\,;4\,;4)$ est un vecteur normal à *P* donc *P* admet une équation cartésienne de la forme $3x+4y+4z+d=0$ où *d* est un réel.
$\mathrm{A}\in P$ donc $3x_{\mathrm{A}}+4y_{\mathrm{A}}+4z_{\mathrm{A}}+d=0$ soit $15-8+4+d=0$ d'où $d=-11$.
Donc une équation cartésienne de *P* s'écrit $3x+4y+4z-11=0$.

Utilisation de la calculatrice Numworks pour déterminer des équations cartésiennes de plans

Exemple :

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $\mathrm{A}(5, 1, -1)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\ (1, 2, 3)$ pour vecteur normal.

On utilise la « technique du π ». On remplace x par π, y par π^2, z par π^3 : $\text{dot}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\pi-5\\\pi^2-1\\\pi^3+1\end{bmatrix}\right)$.

On obtient l'affichage suivant : $3\pi^3+2\pi^2+\pi-4 \approx 111{,}89963$

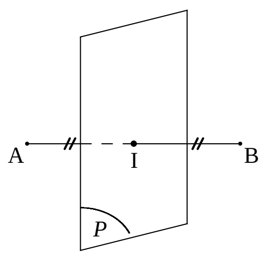
Le résultat permet de dire que P admet pour équation cartésienne $3z+2y+x-4=0$, ou encore, en ordonnant les x, y, z : $x+2y+3z-4=0$.

Autres possibilités :
π, ln 2 et e
e, e^2, e^3
ln 2, ln 3, ln 5
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

5°) Cas particulier : équation cartésienne d'un plan médiateur

P : plan médiateur de [AB] **(** $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ **)**.

• Définition d'un plan médiateur :
Le plan médiateur d'un segment est un plan passant le milieu d'un segment et orthogonal à ce segment.



• Propriété caractéristique :
Un point M appartient au plan médiateur d'un segment si et seulement si il est équidistant des extrémités du segment.

• 1$^{\text{ère}}$ méthode :

Soit M un point quelconque de E de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

$\Leftrightarrow \ldots$

• 2$^{\text{e}}$ méthode :

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$\mathrm{M} \in P \Leftrightarrow \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2$

$\Leftrightarrow \ldots$

6°) Plans de coordonnées ; plans parallèles aux plans de coordonnées (rappels)

plan $(x\mathrm{O}y)$: $z=0$ (repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$)	plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$: $z=\alpha$
plan $(x\mathrm{O}z)$: $y=0$ (repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{k})$)	plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}z)$: $y=\beta$
plan $(y\mathrm{O}z)$: $x=0$ (repère $(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k})$)	plan parallèle au plan $(y\mathrm{O}z)$: $x=\gamma$

7°) Comment passer d'une équation cartésienne à un système d'équations paramétriques de plan

Exemple :

On considère le plan P : $x-y+2z-1=0$.

On isole x que l'on exprime en fonction de y et z : $x=y-2z+1$.

On peut considérer le système $\begin{cases} x=y-2z+1 \\ y=y \\ z=z \end{cases}$ (on rajoute deux équations qui sont toujours vraies $y=y$ et $z=z$.

On va considérer y et z comme des paramètres en posant $y=t$ et $z=t'$.

On peut donc écrire le système d'équations paramétriques du plan P : $\begin{cases} x=t-2t'+1 \\ y=t \\ z=t' \end{cases} \quad (t\,;t') \in \mathbb{R}^2$

P a pour repère $(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\mathrm{A}(1\,;0\,;0)$, $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(-2\,;0\,;1)$.

8°) Condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires

P : $ax+by+cz+d=0 \quad ((a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0))$

P' : $a'x+b'y+c'z+d'=0 \quad ((a'\,;b'\,;c') \neq (0\,;0\,;0))$

$$\boxed{P \perp P' \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0}$$

Démonstration :

On utilise un vecteur normal de chacun des deux plans.

9°) Un cas particulier intéressant d'équation de plan : plan défini par trois points distincts situés sur les trois axes du repère

Soit a, b, c trois réels non nuls.
On donne les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.
(ABC) a pour équation $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ce résultat est similaire à celui du plan.

Démonstration :

Soit P le plan d'équation $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

On a $\dfrac{x_A}{a}+\dfrac{y_A}{b}+\dfrac{z_A}{c}=\dfrac{a}{a}+\dfrac{0}{b}+\dfrac{0}{c}=1$ donc $A \in P$

On a $\dfrac{x_B}{a}+\dfrac{y_B}{b}+\dfrac{z_B}{c}=1$ donc $B \in P$.

On a $\dfrac{x_C}{a}+\dfrac{y_C}{b}+\dfrac{z_C}{c}=1$ donc $C \in P$.

On en déduit que $P=(ABC)$.

Complément :

De manière générale, étant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, on peut considérer l'ensemble S des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient $f(x, y, z)=0$.
On dit que c'est la surface de niveau 0 de f.

On dit que l'égalité $f(x, y, z)=0$ est une équation cartésienne de S (avec les mêmes commentaires sur le mot « équation » que pour les équations de plans).

Cet ensemble peut être vide.

Nous avons déjà vu également le cas de la sphère.

L'étude des surfaces est faite dans le supérieur.

Intersection d'une surface avec les axes du repère :

On cherche à déterminer les points d'intersection de S avec les axes du repère.

Intersection de S avec l'axe des abscisses : On résout l'équation $f(x,0,0)=0$.
Intersection de S avec l'axe des ordonnées : On résout l'équation $f(0, y,0)=0$.
Intersection de S avec l'axe des cotes : On résout l'équation $f(0,0, z)=0$.

Projetés orthogonaux d'un point sur les plans de coordonnées

Il s'agit de l'application de la propriété du cours suivante que l'on retrouve facilement en faisant un graphique.

Propriété :

Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.
- Le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy) a pour coordonnées $(x\,;y\,;0)$.
- Le projeté orthogonal de M sur le plan (yOz) a pour coordonnées $(0\,;y\,;z)$.
- Le projeté orthogonal de M sur le plan (xOz) a pour coordonnées $(x\,;0\,;z)$.

La propriété est valable dans un repère orthogonal.

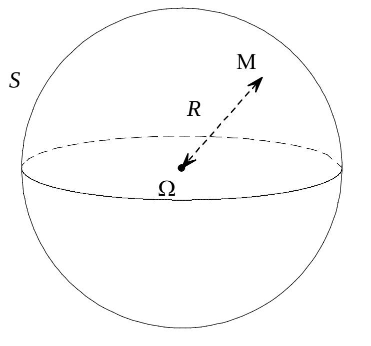
La distance de A au plan (xOy) est la distance AΩ. Elle est égale à 4 (évident, c'est la valeur absolue de la cote de A).

La propriété reste valable si le repère est orthogonal.

III. Équations cartésiennes de sphères dans un repère orthonormé

1°) Théorème

Une équation de la sphère S de centre $\Omega \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et de rayon $R>0$ s'écrit
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (équation sous **forme canonique** ou sous **forme normale**).



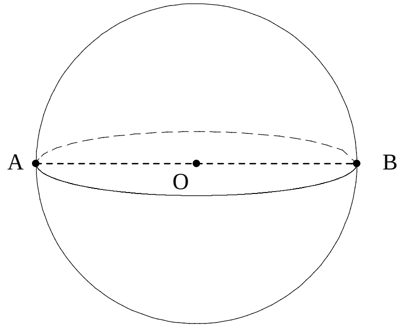
L'égalité $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ provient de l'équivalence suivante pour un point $M(x\,;y\,;z)$.

$$M \in S \Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$$

En développant le premier membre et en transposant le R^2 dans le premier membre, on obtient une équation de la forme $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ où α, β, γ, δ sont des constantes.
Une telle équation est appelée **équation cartésienne** de *S*.

2°) Équation cartésienne d'une sphère définie par un diamètre

S : sphère de diamètre [AB] ($A \neq B$)



On utilise l'<u>orthogonalité</u>.

Soit M un point quelconque de *E* de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned} M\in S &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\ &\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0 \quad \text{(à ne pas apprendre)}\end{aligned}$$

3°) Utilisation de la calculatrice Numworks

On peut remplacer *x* par π, *y* par π^2, *z* par π^3.

4°) Intersection d'une sphère et d'un plan [rappels]

S : sphère de centre O et de rayon *R*
P : plan de l'espace
H : projeté orthogonal de O sur *P*
On pose $d=\text{OH}=\text{d}(\text{O}, P)$.

1^{er} cas : $\boxed{d<R}$

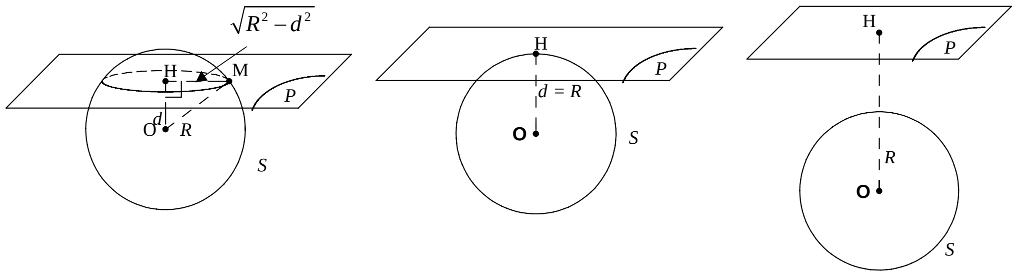
S et *P* sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$
$S\cap P=\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$: cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ (théorème de Pythagore)

2^e cas : $\boxed{d=R}$

S et *P* sont tangents en H ($S\cap P=\{\text{H}\}$)

3^e cas : $\boxed{d>R}$

S et *P* n'ont aucun point commun ($S\cap P=\varnothing$)



5°) Boule

• La boule fermée de centre $\Omega\left|\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}\right.$ et de rayon $R>0$ est caractérisé par l'inéquation
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$ (traduction de $\Omega M^2\leqslant R^2$).

• La boule fermée de diamètre [AB] ($A\neq B$) est caractérisé par l'inéquation
$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)\leqslant 0$ (traduction de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}\leqslant 0$).

IV. Système d'équations paramétriques de droites

1°) Définition (rappel)

$A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ est un point fixé et $\vec{u}\left(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma\right)$ est un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases}$ $\left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$ est appelé **système d'équations paramétriques** de la droite *D* passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

(système de 3 équations paramétriques ; même λ dans les 3 équations).

⚠ Pas d'équations cartésiennes de droites dans l'espace.

On ne parle pas de vecteur normal à une droite *D* car il existe une infinité de vecteurs non nuls orthogonaux à la direction de *D*.
On parle uniquement de vecteur normal pour un plan.

2°) Exercice-type (très important) [intersection d'une droite et d'un plan]

$$D\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases} \quad \left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$$

[*D* est la droite passant par le point $A\left(-1\,;1\,;4\right)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\left(3\,;-2\,;1\right)$ pour vecteur directeur.]

$P:\ x+y+2z-5=0$

Déterminer $D \cap P$.

Le plan *P* admet le vecteur $\vec{v}\left(1\,;1\,;2\right)$ pour vecteur normal.

$\vec{u}\bullet\vec{v} = 3-2+2 = 3$

$\vec{u}\bullet\vec{v} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
On en déduit que *D* n'est pas parallèle à *P* (cf. paragraphe suivant).
Par conséquent, ils sont sécants en un point I.
Le paramètre λ du point I (paramètre de I sur la droite *D*) vérifie l'équation $-1+3\lambda+1-2\lambda+2\left(4+\lambda\right)-5=0$ $\left(1\right)$.

$\left(1\right) \Leftrightarrow 3\lambda+3=0$

$\Leftrightarrow \lambda=-1$

On en conclut $D \cap P = \left\{I\left(-4\,;3\,;3\right)\right\}$.

On peut aussi résoudre le système $\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 4+\lambda \\ x+y+2z-5=0 \end{cases}$ (système linéaire de 4 équations à 4 inconnues).

La résolution peut se faire avec la calculatrice.

3°) Systèmes d'équations qui caractérisent les axes du repère

Axe $\left(Ox\right)$ (repère $\left(O, \vec{i}\right)$) : $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$	Axe $\left(Oy\right)$(repère $\left(O, \vec{j}\right)$) : $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$	Axe $\left(Oz\right)$(repère $\left(O, \vec{k}\right)$) : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

4°) Exercice-type [intersection de deux plans]

$P:\ 2x+y-z+2=0$

$P':\ x+2y-z+1=0$

Les plans *P* et P' sont-ils sécants ou parallèles ?
S'ils sont sécants, déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection Δ.

Le vecteur $\vec{u}\left(2\,;1\,;-1\right)$ est un vecteur normal à *P*.

Le vecteur $\vec{u'}\left(1\,;2\,;-1\right)$ est un vecteur normal à P'.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans *P* et P' sont sécants selon une droite Δ.

Pour déterminer un système d'équations paramétriques de Δ, on considère le système $\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

Comme le nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations, on effectue une transformation pour se ramener à un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.

Ce système est équivalent à $\begin{cases} 2x+y=z-2 & \left(1\right) \\ x+2y=z-1 & \left(2\right) \end{cases}$.

On pose $z=t \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Les équations $\left(1\right)$ et $\left(2\right)$ donnent alors les équations $2x+y=t-2 \quad \left(1'\right)$ et $x+2y=t-1 \quad \left(2'\right)$.

On résout alors le système linéaire $\begin{cases} \left(1'\right) \\ \left(2'\right) \end{cases}$ de deux équations à deux inconnues avec le paramètre *t*.

Le déterminant est non nul donc le système admet un unique couple solution.

On peut utiliser la méthode des multiplicateurs ou la méthode matricielle ou même appliquer directement les formules de Cramer.

$$\begin{cases} 2x+y=t-2 \\ x+2y=t-1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times(-1) \end{array} \right| \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=t-3 \\ 3y=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{t}{3}-1 \\ y=\dfrac{t}{3} \end{cases}$$

Un système d'équations paramétriques de Δ s'écrit $\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}-1 \\ y=\dfrac{t}{3} \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Il est possible de poser $t=3\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. On peut aussi directement remplacer t par $3t$ dans le système d'équations paramétriques.

Un autre système d'équations paramétriques de Δ s'écrit $\begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$.

On peut effectuer la résolution du système $\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$ directement à l'aide de la calculatrice.

À partir d'un système d'équations paramétriques de Δ, on peut trouver un repère de Δ.

Variante pour la résolution matricielle du système $\begin{cases} (1') \\ (2') \end{cases}$:

On écrit le système en utilisant les matrices sous la forme $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-2 \\ t-1 \end{pmatrix}$.

Le 13-2-2023

Utilisation de la calculatrice Numworks : astuce du π

$$\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

La calculatrice affiche le message : « infinité de solutions ».

Dans équations, lorsque l'on a 3 inconnues, remplacer z par π ou e.

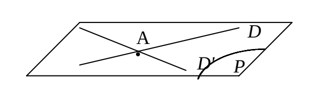
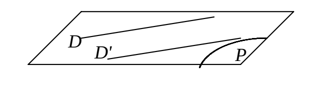
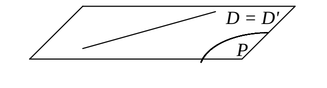
Ainsi, en remplaçant z par π, on obtient le système $\begin{cases} 2x+y-\pi+2=0 \\ x+2y-\pi+1=0 \end{cases}$ que l'on fait résoudre par la calculatrice.

On obtient $\begin{cases} x=\dfrac{\pi-3}{3} \\ y=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$.

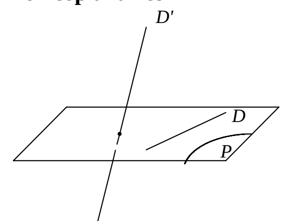
V. Positions relatives de droites et de plans (rappels)

1°) Position relative de deux droites

• **Coplanaires**

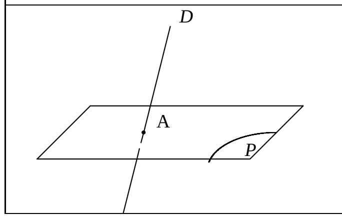
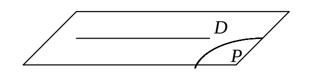
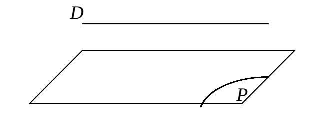
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sécantes</td><td>strictement parallèles</td><td>confondues</td></tr>
</table>

• **Non coplanaires**

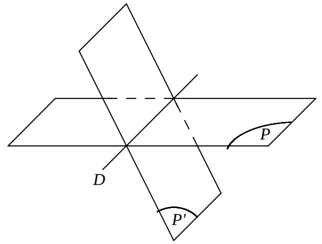
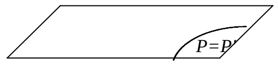
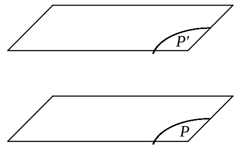


On retiendra que :
• 2 droites sécantes sont coplanaires ;
• 2 droites parallèles sont coplanaires.

2°) Position relative d'une droite et d'un plan

<table>
<tr><th>sécants</th><th colspan="2">parallèles</th></tr>
<tr><td></td><td>$D\subset P$</td><td>strictement parallèles</td></tr>
</table>

3°) Position relative de deux plans de l'espace

sécants	**parallèles**	
		
	confondus	**strictement parallèles**

VI. Orthogonalité de droites et de plans (rappels et compléments)

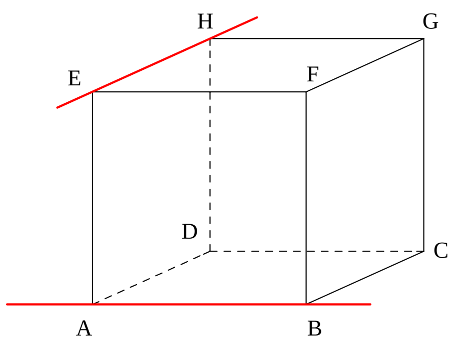
1°) Définition de deux droites orthogonales

On dit sur deux droites de l'espace sont **orthogonales** lorsque leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

Exemple :

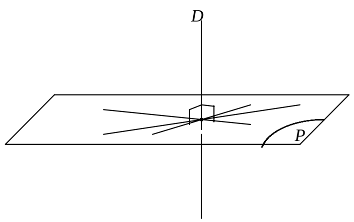
ABCDEFGH est un cube.

$(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{EH})$



2°) Définition d'une droite orthogonale à un plan

On dit qu'une droite D est **orthogonale** à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



3°) Propriété

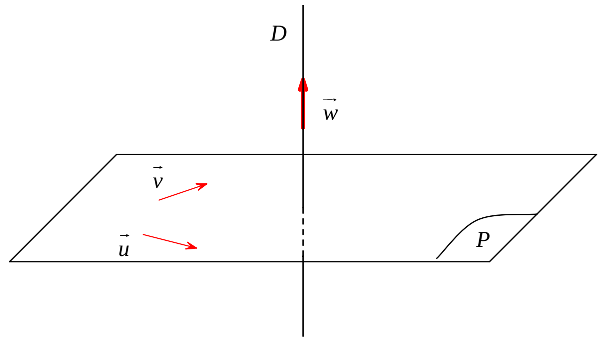
Si une droite D est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P, alors elle est orthogonale à ce plan.

Application pratique :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de P.
$\vec{w}$ est un vecteur directeur de D.

$D \perp P \Leftrightarrow \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$D \perp P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \bullet \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \end{cases}$$



4°) Propriété (caractérisation de plans perpendiculaires à l'aide de vecteurs normaux)

P_1 et P_2 sont deux plans quelconques de l'espace.
$\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal à P_1 et $\overrightarrow{n_2}$ est un vecteur normal à P_2.
P_1 et P_2 sont **perpendiculaires** si et seulement si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2} = 0$.

On démontre aisément que cette définition ne dépend pas des vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ choisis pour P_1 et P_2.

VII. Distance d'un point à un plan

1°) Rappels

● Définition :

On appelle distance d'un point à un plan la distance de ce point à son projeté orthogonal sur le plan.

● Propriété :

La distance d'un point à un plan est la plus courte distance de ce point à un point quelconque du plan (distance minimale).

2°) Formule

P : $ax+by+cz+d=0$ $\left((a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\right)$
$\mathrm{A}(x_0\,;y_0\,;z_0)$

La **distance du point A au plan *P*** (distance de A à son projeté orthogonal H sur *P*) est donnée par la formule :

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ (notation : d'abord le point, ensuite le plan).

On notera la présence de barres de valeur absolue au numérateur.

Dans la notation $\mathrm{d}(\mathrm{A}, P)$, la lettre d n'a pas de rapport avec le coefficient *d* de l'équation cartésienne de *P*.
Pour éviter toute confusion, on devrait peut-être noter $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, P)$.

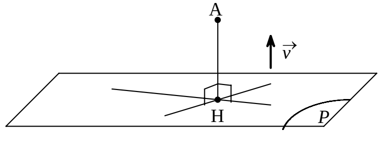
La formule est analogue à celle donnée dans le plan pour la distance d'un point à une droite dont on connaît une équation cartésienne.

3°) Démonstration (à étudier et à savoir refaire)

Hypothèses

P : $ax+by+cz+d=0$ $\left((a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)\right)$
$\mathrm{A}(x_0\,;y_0\,;z_0)$

H : projeté orthogonal de A sur le plan *P*



On sait que le vecteur $\vec{v}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal à *P*.

Idée : On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\vec{v}$ de deux manières différentes (sans calculer les coordonnées de H).

① Calculons $\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\vec{v}$ grâce aux coordonnées.

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\vec{v}=(x_0-x_{\mathrm{H}})\times a+(y_0-y_{\mathrm{H}})\times b+(z_0-z_{\mathrm{H}})\times c$$

$$=ax_0+by_0+cz_0-(ax_{\mathrm{H}}+by_{\mathrm{H}}+cz_{\mathrm{H}})$$

Or $\mathrm{H}\in P$ donc $ax_{\mathrm{H}}+by_{\mathrm{H}}+cz_{\mathrm{H}}+d=0$ d'où $-(ax_{\mathrm{H}}+by_{\mathrm{H}}+cz_{\mathrm{H}})=d$.
Donc en remplaçant : $\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\vec{v}=ax_0+by_0+cz_0+d$.

② Exprimons $\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\vec{v}$ à l'aide des normes (on va plutôt utiliser la valeur absolue).

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $\left|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\vec{v}\right|=\left\|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$.

③ On réutilise le résultat du ①.

$$|ax_0+by_0+cz_0+d|=\mathrm{HA}\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Conclusion :

$$\mathrm{AH}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4°) Remarques

Nous admettrons sans démonstration que la distance d'un point A à un plan *P* est la distance minimale du point A à un point de *P*.

Nous ne verrons pas cette année de formule pour la distance d'un point à une droite dans l'espace.

La distance d'un point A à une droite *D* est la distance AH avec H projeté orthogonal du point A sur la droite *D* (même définition que dans le plan).
Nous admettrons sans démonstration que la distance d'un point A à une droite *D* est la distance minimale du point A à un point de *D* (même propriété que dans le plan).

5°) Exemple

P : $x+4y+8z+2=0$

$A(5\,;2\,;-3)$

$$d(A, P)=\frac{|x_A+4y_A+8z_A+2|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}$$

$$=\frac{|5+4\times 2+8\times(-3)+2|}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}$$ (formule de la distance d'un point à un plan)

$$=\frac{|5+8-24+2|}{\sqrt{81}}$$

$$=\frac{9}{9}$$

$$=1$$

VIII. Demi-espaces

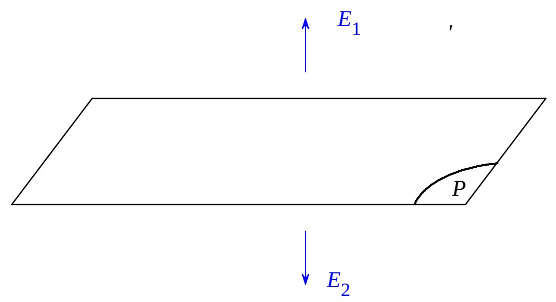
Rappel :

Dans le plan, une droite D définit deux demi-plans.
Ces deux demi-plans ont pour frontière D.

On dit qu'un demi-plan est fermé pour exprimer que la frontière est contenue, ouvert lorsque la frontière n'est pas contenue.

Définition :

Un plan de l'espace partage l'espace en 2 **demi-espaces ouverts de frontière *P*** (ouverts signifie que P n'est pas contenu dans ces demi-espaces).

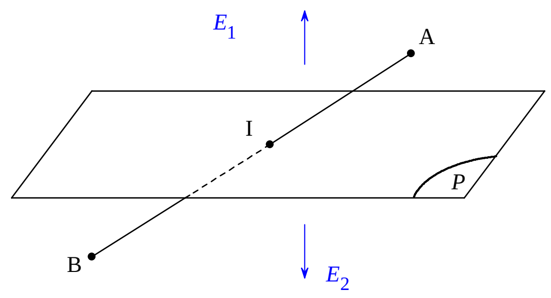


À quoi sert la notion de demi-espace ?

On a la propriété (ou plutôt l'axiome suivant) :

On note E_1 et E_2 les deux demi-espaces ouverts de frontière P.

Soit A un point quelconque de E_1 et B un point quelconque de E_2.
Le segment $[AB]$ coupe le plan P en un unique point I.



1°) Théorème de régionnement de l'espace

$P : ax+by+cz+d=0 \quad ((a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0))$

Le plan P partage l'espace en 2 **demi-espaces ouverts de frontière P**

- l'un est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $ax+by+cz+d>0$
- l'autre est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $ax+by+cz+d<0$

2°) Démonstration

Identique à celle du plan.

3°) Même notion que dans le plan : demi-espace fermé (la frontière est contenue dans le demi-espace), caractérisé par une inéquation large

$ax+by+cz+d \geqslant 0$

$ax+by+cz+d \leqslant 0$

Il est difficile de se représenter un demi-espace dans l'espace.

Exemple :

L'inéquation $z \geqslant 0$ caractérise le demi-espace fermé de frontière le plan (xOy) contenant la demi-droite [Oz).

Bilan (à retenir grâce à des figures)

①

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit D' une droite de vecteur directeur $\vec{u}'$.

$D \,//\, D' \Leftrightarrow \vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}'$

$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}'$ (c'est-à-dire que le produit scalaire est égal à 0)

②

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Soit P un plan de vecteur normal $\vec{v}$.

$D \,//\, P \Leftrightarrow \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ (c'est-à-dire que le produit scalaire est égal à 0)

$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$

D est sécante à $P \Leftrightarrow \vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{v}$ (c'est-à-dire que le produit scalaire est différent de 0)

③

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{v}$.
Soit P' un plan de vecteur normal $\vec{v}'$.

$P \,//\, P' \Leftrightarrow \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{v}'$

$P \perp P' \Leftrightarrow \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}'$

Appendice 1

● Comment passer d'une équation cartésienne de plan à un système d'équations paramétriques ?

C'est assez simple comme nous allons le voir sur l'exemple suivant.

Exemple :

$P: \ 2x+y+3z-2=0$

On transforme en isolant l'un des lettres x, y, z que l'on exprime en fonction des deux autres.
Ici, le plus simple est d'exprimer y en fonction de x et z.
Ainsi, on obtient : $y=-2x-3z+2$.

On prend x et z comme paramètres.

On obtient :

$$\begin{cases} x=\lambda \\ z=\mu \\ y=-2\lambda-3\mu+2 \end{cases}$$

● Comment passer d'un système d'équations paramétriques de plan à une équation cartésienne de plan ?

C'est plus compliqué.

Exemple :

$$P: \begin{cases} x=1+2t+t' \\ z=2+3t+2t' \\ y=t+t' \end{cases}$$

On prend deux « équations ».
On résout le système d'équations en inconnues t et t'.
On reporte dans l'équation non encore utilisée pour trouver une relation entre x et y indépendante de t et t'.

Appendice 2

Déterminer une équation cartésienne de plan défini par trois points non points.

Exemple :

$A(1;1;1)$
$B(1;2;-1)$
$C(2;1;0)$

On vérifie sans peine que A, B, C ne sont pas alignés.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

1ère méthode :

Le plan (ABC) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ $\big((a;b;c)\neq(0;0;0)\big)$.
Les coordonnées de A, B et C vérifient cette équation.

On peut donc écrire $\begin{cases} a\times1+b\times1+c\times1+d=0 \\ a\times1+b\times2+c\times(-1)+d=0 \\ a\times2+b\times1+c\times0+d=0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues.
Il y a plus d'inconnues que d'équations.

On va prendre l'une des inconnues, par exemple d, comme paramètre.

Le système s'écrit $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a+2b-c+d=0 \\ 2a+b+\phantom{c+{}}d=0 \end{cases}$ en mettant bien les inconnues de même nom les unes en dessous des autres (pour la clarté).

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} a+b+c=-d \\ a+2b-c=-d \\ 2a+b=-d \end{cases}$$

On peut résoudre le système en utilisant la méthode du pivot de Gauss (combinaisons linéaires).

$$\begin{cases} a+b+c=-d & (L_1) \\ 2a+3b=-2d & (L_1)+(L_2)\to(L'_2) \\ 2a+b=-d & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=-d & (\mathrm{L}_1) \\ 2a+3b=-2d & (\mathrm{L'}_2) \\ 2b=-d & (\mathrm{L'}_2-\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

Rappel de la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} * \quad * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L}_1) \\ * \quad * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L}_2) \\ * \quad * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{*} \quad * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L}_1) \\ \quad\;\; * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L'}_2) \leftarrow *(\mathrm{L}_1)+*(\mathrm{L}_2) \\ \quad\;\; * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L'}_3) \leftarrow *(\mathrm{L}_1)+*(\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} * \quad * \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L}_1) \\ \quad\;\; \boxed{*} \quad * \quad = \quad * & (\mathrm{L'}_2) \\ \qquad\quad\; * \quad = \quad * & (\mathrm{L''}_3) \leftarrow *(\mathrm{L'}_1)+*(\mathrm{L'}_3) \end{cases}$$

Remplacer toutes les étoiles par des sortes de lettres gamma minuscule : ɣ.

$$\begin{cases} b=-\dfrac{1}{2}d \\ a=-\dfrac{1}{4}d \\ \mathrm{c}=-\dfrac{1}{4}d \end{cases}$$

Par exemple avec $d=-4$, on obtient $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=-4 \end{cases}$.

Donc (ABC) a pour équation $x+2y+z-4=0$.

On vérifie

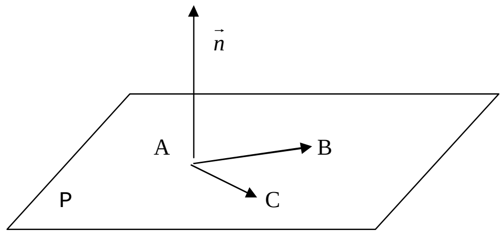
$$\begin{cases} 1+2\times1+1-4=0 \\ 1+2\times2-1-4=0 \\ 2+2\times1+0-4=0 \end{cases}$$

2^e^ méthode :

On cherche un vecteur $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ normal au plan (ABC).

Les réels *a*, *b*, *c* sont non tous nuls.

$$\begin{cases} \vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \end{cases}$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(0\,;1\,;-2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(1\,;0\,;-1)$

$\vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \qquad a\times0+b\times1+c\times(-2)=0$

$\vec{n}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0 \qquad a\times0+b\times0+c\times(-1)=0$

On obtient le système $\begin{cases} b-2c=0 \\ a-c=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b=2c \\ a=c \end{cases}$.

Par exemple, avec $c=1$.

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\in(\mathrm{ABC}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\bullet\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\times1+(y-1)\times2+(z-1)\times1=0 \\ &\Leftrightarrow x+2y+z-4=0 \end{aligned}$$

$P:\ x+2y+z-4=0$

3e méthode :

On utilise directement le résultat de cours du **I. 7°) Coordonnées d'un vecteur orthogonal à deux autres vecteurs**.

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$.

On vérifie aisément par le calcul que le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On peut aussi écrire les coordonnées de ce vecteur à l'aide de déterminants sous la forme

$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$.