TS

La continuité des fonctions (3) (Extension du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Plan du chapitre :

I. Rappel du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

1°) Énoncé

On pose $I=[a\,;b]$ ($a<b$).

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et strictement monotone sur I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c)=k$.

2°) Rappel

Il n'y a pas de lien entre continuité et stricte monotonie.
Il s'agit de deux notions séparées.

3°) Vocabulaire et notation

On peut dire que l'ensemble des images des réels de l'intervalle I est l'intervalle fermé borné d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$.
Cet intervalle est noté $f(I)$ et est appelé **image de l'intervalle I par f**.

On peut dire que $f(I)$ est l'ensemble des valeurs prises par f.

Plus précisément,
$f(I)=[f(a)\,;f(b)]$ si f est strictement croissante :
$f(I)=[f(b)\,;f(a)]$ si f est strictement décroissante.

On peut dire que f est à valeurs dans $f(I)$.

Il est à noter que les résultats restent valables si l'on suppose seulement que f est continue et monotone sur I :

$f(I)=[f(a)\,;f(b)]$ si f est continue et croissante ;
$f(I)=[f(b)\,;f(a)]$ si f est continue et décroissante.

II. Généralisation du corollaire

Nous allons généraliser le corollaire au cas d'une fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle quelconque en utilisant les limites.

1°) Propriété (admise sans démonstration)

f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $]a\,;b[$
où a désigne soit un réel soit $-\infty$;
b désigne soit un réel soit $+\infty$.

On suppose que f admet des limites en a et b, finies ou infinies.

Pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$ ou $\left]\lim\limits_{x\to b} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$ (suivant la monotonie de f), il existe un unique réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(c)=k$.

2°) Extension à d'autres cas

On a une propriété semblable sur un intervalle semi-ouvert :

- $[a\,;b[$ pour $k \in \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$
  ou $k \in \left]\lim\limits_{x\to b} f(x)\,;f(a)\right]$

- $]a\,;b]$ pour $k \in \left]\lim\limits_{x\to a} f(x)\,;f(b)\right]$
  ou $k \in \left[f(b)\,;\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

On observera que l'on a une image pour la borne fermée et une limite pour la borne ouverte.

III. Exemple d'utilisation

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe un unique réel dont l'image par *f* est égale à 0.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 3$

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$.

Donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de f	$-\infty$	0	$+\infty$

On obtient les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ en appliquant les règles d'opérations.

On traduit les informations contenues dans le tableau de variations, notamment la flèche qui signifie la stricte croissance et la continuité.

C_1 : La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

C_2 : *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C_3 : 0 appartient à l'intervalle défini par les limites de *f* aux bornes de l'intervalle de définition c'est-à-dire $]-\infty\,;+\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Remarque :

On s'appuiera le plus possible sur des tableaux de variations.

Dans notre cas, on peut écrire $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

IV. Une application fondamentale du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : la définition du logarithme népérien

$f : x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	0	$+\infty$

f est
- définie
- continue
- strictement croissante

sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut noter que $\exp(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (forme généralisée),

$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad \exists!\, y \in \mathbb{R}$ tel que $e^y = x$.

Le réel *y* est appelé **logarithme népérien** de *x* (et noté ln *x*).