

La continuité des fonctions (3) (Extension du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Plan du chapitre :

I. Rappel du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

II. Généralisation du corollaire

III. Exemple d'utilisation

IV. Une application fondamentale du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : la définition du logarithme népérien

I. Rappel du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

1°) Énoncé

On pose $I = [a; b]$ ($a < b$).

On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que f est continue et strictement monotone sur I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

2°) Rappel

Il n'y a pas de lien entre continuité et stricte monotonie.
Il s'agit de deux notions séparées.

3°) Vocabulaire et notation

On peut dire que l'ensemble des images des réels de l'intervalle I est l'intervalle fermé borné d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$.

Cet intervalle est noté $f(I)$ et est appelé **image de l'intervalle I par f** .

On peut dire que $f(I)$ est l'ensemble des valeurs prises par f .

Plus précisément,

$f(I) = [f(a); f(b)]$ si f est strictement croissante :

$f(I) = [f(b); f(a)]$ si f est strictement décroissante.

On peut dire que f est à valeurs dans $f(I)$.

Il est à noter que les résultats restent valables si l'on suppose seulement que f est continue et monotone sur I :

$f(I) = [f(a); f(b)]$ si f est continue et croissante ;

$f(I) = [f(b); f(a)]$ si f est continue et décroissante.

II. Généralisation du corollaire

Nous allons généraliser le corollaire au cas d'une fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle quelconque en utilisant les limites.

1°) Propriété (admise sans démonstration)

f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $]a; b[$

où a désigne soit un réel soit $-\infty$;

b désigne soit un réel soit $+\infty$.

On suppose que f admet des limites en a et b , finies ou infinies.

Pour tout réel k de l'intervalle $] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ ou $] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$ (suivant la monotonie de f), il existe un unique réel $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = k$.

2°) Extension à d'autres cas

On a une propriété semblable sur un intervalle semi-ouvert :

• $]a; b[$ pour $k \in [f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$
ou $k \in] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a)]$

• $]a; b]$ pour $k \in] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b)]$
ou $k \in [f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

On observera que l'on a une image pour la borne fermée et une limite pour la borne ouverte.

III. Exemple d'utilisation

On considère la fonction $f: x \mapsto x^3 + 3x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

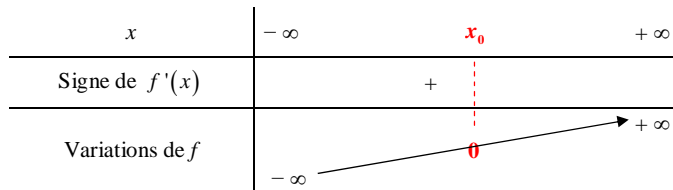
Démontrer qu'il existe un unique réel dont l'image par f est égale à 0.

f est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 3$$

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .



On obtient les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ en appliquant les règles d'opérations.

On traduit les informations contenues dans le tableau de variations, notamment la flèche qui signifie la stricte croissance et la continuité.

C_1 : La fonction f est continue sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme.

C_2 : f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

C_3 : 0 appartient à l'intervalle défini par les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition c'est-à-dire $] -\infty ; +\infty [$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires dans sa version généralisée, il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

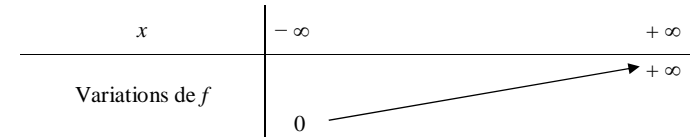
Remarque :

On s'appuiera le plus possible sur des tableaux de variations.

Dans notre cas, on peut écrire $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

IV. Une application fondamentale du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : la définition du logarithme népérien

$f: x \mapsto e^x$ définie sur \mathbb{R}



f est

- définie
- continue sur \mathbb{R} .
- strictement croissante

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut noter que $\exp(\mathbb{R}) =]0 ; +\infty [$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (forme généralisée),

$$\forall x \in]0 ; +\infty [\quad \exists ! y \in \mathbb{R} \text{ tel que } e^y = x.$$

Le réel y est appelé **logarithme népérien** de x (et noté $\ln x$).