TS

La fonction logarithme népérien

Plan du chapitre :

Au XVII[e] siècle, on déterminait la position des grands voiliers par des calculs astronomiques qui étaient facilités par l'usage des tables de « logarithmes ». Ces tables permettaient de « changer » des calculs avec des multiplications en calculs avec des additions.
Le livre dans lequel figuraient ces tables servait ainsi à déterminer et à noter sa position mais aussi à noter d'autres informations : la météo, l'état du navire, le moral de l'équipage… Ce journal de bord s'appelait un « log-book ». On a conservé ce terme et lorsque son support a changé, que ce journal s'est écrit sur Internet, il s'est dénommé « web-log » qui par contraction a donné le mot « blog ».

John Napier (1550-1617) est un mathématicien écossais plus connu sous le nom francisé de Néper.
Il lui a fallu près de 20 ans pour mettre au point sa découverte des logarithmes. Il publie sa découverte en 1614 et donne une table des logarithmes.

Néper

Préface de la merveilleuse règle des Logarithmes

« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. »

Il poursuit :

« Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement. Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ? Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens… »

Les logarithmes de Neper (ce sont en fait des logarithmes de sinus) sont un peu compliqués. Henry Briggs qui a lu l'ouvrage de Néper visite celui-ci et les savants conviennent que le plus pratique est d'avoir $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$.
Ainsi naissent les logarithmes décimaux... Briggs publiera en 1624 une table des logarithmes des nombres de 1 à 100 000 avec 14 décimales...

I. Rappels

1°) Définition

On a démontré dans le chapitre sur la fonction exponentielle que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et que $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

D'après la version généralisée du théorème des valeurs intermédiaires qui sera vue plus tard, on peut donc dire que pour tout réel $y > 0$, il existe un unique réel x tel que $\mathrm{e}^x = y$.

Ce nombre x est appelé le **logarithme népérien** de y. On le note **ln *y***.

2°) Exemples

$\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln 1 = 0$.

$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln \mathrm{e} = 1$.

e est appelé le *nombre de Néper* ou la *base du logarithme népérien*.

Pour d'autres valeurs, on utilise la calculatrice (qui donne en général des valeurs approchées).

On n'utilise pas de parenthèses lorsque l'on a un nombre seul.

3°) Remarque

Le logarithme népérien d'un réel négatif ou nul n'existe pas dans $\mathbb{R}$ (la calculatrice affiche un message d'erreur du type « erreur : non real answer » lorsque l'on est en mode réel ; néanmoins, lorsque l'on est mode complexe, la calculatrice affiche un résultat complexe lorsqu'on lui demande le calculer le logarithme d'un réel strictement négatif*, ce résultat sera interprété beaucoup plus tard dans le supérieur lors de l'étude des fonctions complexes). Ce résultat est un nombre complexe qui sera interprété plus tard dans le supérieur avec les fonctions complexes.

*Par exemple, le calcul de $\ln(-1)$ sur la calculatrice en mode réel donne « erreur : non real answer ».

4°) Exercice

Donner l'ensemble de définition des fonctions :

$f : x \mapsto \ln(3-x)$ $\qquad$ $g : x \mapsto \ln\left[(x-1)(x+4)\right]$

- $f(x)$ existe $\Leftrightarrow 3-x>0$

  $\Leftrightarrow x<3$

$\mathrm{D}_f = \left]-\infty\,;3\right[$

- $g(x)$ existe $\Leftrightarrow (x-1)(x+4)>0$

  $\Leftrightarrow x<-4$ ou $x>1$ (tableau de signes non utile)

$\mathrm{D}_g = \left]-\infty\,;-4\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$

Il est intéressant de tracer les courbes représentatives des fonctions f et g ; on peut ainsi vérifier d'une certaine manière, les ensembles de définition que l'on a trouvé précédemment.

5°) Vocabulaire

La fonction exp établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Cela signifie que tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction exp.

La fonction ln est la bijection réciproque de la fonction exp ; elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$x \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} y$$

La fonction ln « renverse » les flèches.

On peut déjà observer graphiquement sur l'écran de la calculatrice que les courbes des fonctions exponentielles et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la première bissectrice dans le plan muni d'un repère normé (a fortiori orthonormé). Cette propriété est générale pour une bijection et sa bijection réciproque.

II. Commentaires

1°) Aspect historique

Historiquement, la fonction logarithme népérien est apparue avant la fonction exponentielle. La fonction logarithme népérien est apparue au XVII$^{\text{e}}$ siècle avec Néper et Briggs. La fonction exponentielle est apparue au XVIII$^{\text{e}}$ siècle avec Euler.

La fonction ln a été inventée à la fin du XVI$^{\text{e}}$ siècle pour aider les astronomes dans leurs calculs à une époque où les moyens de calcul étaient très limités (il n'y avait pas de calculatrice !) : elle permettait de transformer toute multiplication en addition comme nous le verrons avec la propriété fondamentale.

John Néper publie son ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* en 1614.
L'ouvrage a un retentissement considérable dans le monde scientifique.
Néper a mis vingt ans pour calculer ses tables de logarithmes.

2°) Expression

Nous admettrons que, comme la fonction exp*, la fonction ln n'admet pas d'expression à l'aide des symboles usuels.

*Remarque : Avec les limites, il existe pourtant une « expression » : $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{x^k}{k!}$ mais cette « formule » n'est pas considérée comme une formule explicite.
On dit que la fonction ln est une fonction *transcendante*. Elle n'a pas de formule explicite par opposition aux fonctions algébrique (les mathématiciens ont démontré qu'il n'existe pas de formule explicite, résultat difficile).

C'est ce qui fait la complexité de cette fonction (et ce qui explique qu'elle ne soit étudiée qu'à partir de la terminale). Les mathématiciens ont certainement été troublés par cela.

On retiendra que la fonction ln fait partie de la famille des fonctions transcendantes comme les fonctions sinus, cosinus, tangente, Arccosinus, Arcsinus, Arctangente…

Nous verrons plus tard dans le cours que la fonction ln a pour dérivée la fonction « inverse » $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$ qui, elle, est algébrique et même rationnelle (ce qui est remarquable). On dit qu'elle fait partie de la famille des fonctions transcendantes à dérivée rationnelle.

3°) Calculatrice et logarithme népérien

La calculatrice utilise un algorithme de calcul (algorithme C.O.R.D.I.C.) pour donner le début de l'écriture décimale du logarithme népérien d'un réel.

4°) Utilisation

La fonction logarithme népérien, comme la fonction exponentielle, est une fonction d'une très grande importance.
Les fonctions logarithme népérien et exponentielle ont de nombreuses applications aussi bien en mathématiques (primitives, calculs d'aires…) qu'en sciences physiques (radioactivité, pH d'une solution…). Les applications mathématiques de la fonction logarithme népérien et exponentielle seront vues dans la suite du cours.

III. Propriétés immédiates (conséquences de la définition)

1°) Propriété 1 [équivalence fondamentale]

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x$$

2°) Propriété 2

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathrm{e}^{\ln x} = x$$

On dit, en mauvais langage, que le e « annule » le ln.

Cette propriété permet de simplifier des expressions.

Exemple :

$\mathrm{e}^{\ln 2} = 2$

3°) Propriété 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln \mathrm{e}^x = x$$

On dit, en mauvais langage, que le ln « annule » le e.
Cette propriété permet de simplifier des expressions.

Exemple :

$\ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$

IV. Propriété liée à l'ordre

1°) Propriété

$$\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \quad \begin{aligned} &\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \\ &\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \end{aligned}$$

2°) Démonstration

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b}$ (propriété de la fonction exponentielle)

$\Leftrightarrow a = b$

$\ln a < \ln b \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln a} < \mathrm{e}^{\ln b}$

$\Leftrightarrow a < b$

3°) Interprétation

La deuxième inégalité de la propriété permet de dire que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous le reverrons avec la dérivée dans le paragraphe **VII**.
Cette propriété est liée à la notion de bijection.

4°) Application aux équations et inéquations avec ln

• Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x = 2 \quad (1)$.

Condition d'existence :

On doit avoir $x > 0$.

On résout donc l'équation (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2$ qui convient car $\mathrm{e}^2 > 0$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \left\{\mathrm{e}^2\right\}$

• Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x-1) = \ln(5-x) \quad (2)$.

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$ soit enfin $\dfrac{1}{2} < x < 5$.

On résout l'équation (2) dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;5\right[$.

$(2) \Leftrightarrow 2x-1 = 5-x$

$\Leftrightarrow 3x = 6$

$\Leftrightarrow x = 2$ qui convient car $2 \in \left]\dfrac{1}{2}\,;5\right[$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2=\{2\}$

• Exemple 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln\left(x^2+1\right)\geqslant \ln(x+3)$ (3).

Conditions d'existence :

On doit avoir $\begin{cases} x^2+1>0 & \text{(toujours vrai)} \\ x+3>0 & \end{cases}$ soit $x>-3$.

On résout l'inéquation (3) dans l'intervalle $]-3\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow x^2+1\geqslant x+3 \\ &\Leftrightarrow x^2-x-2\geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x\leqslant -1 \text{ ou } x\geqslant 2\end{aligned}$$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3=]-3\,;-1]\cup[2\,;+\infty[$

• Exemple 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2+2\ln x-8=0$ (4).

Conditions d'existence :

On résout l'équation (4) dans l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $X=\ln x$.

(4) s'écrit $X^2+2X-8=0$ $(4')$.

$(4')\Leftrightarrow X=-4$ ou $X=2$

Or $X=\ln x$.

Donc :

$$\begin{aligned}(4) &\Leftrightarrow \ln x=-4 \text{ ou } \ln x=2 \\ &\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-4} \text{ ou } x=\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4=\left\{\mathrm{e}^{-4}\,;\mathrm{e}^2\right\}$

• Exemple 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(\ln x)^2+2\ln x-8>0$ (5).

Conditions d'existence :

On résout l'inéquation (5) dans $\mathbb{R}_+^*$.

On pose $X=\ln x$.

(5) s'écrit $X^2+2X-8>0$ (5').

(5') $\Leftrightarrow$ $X<-4$ ou $X>2$

Or $X=\ln x$.

Donc :

$$\begin{aligned}(5) &\Leftrightarrow \ln x<-4 \text{ ou } \ln x>2 \\ &\Leftrightarrow x<\mathrm{e}^{-4} \text{ ou } x>\mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_5=\left]0\,;\mathrm{e}^{-4}\right[\cup\left]\mathrm{e}^2\,;+\infty\right[$

Bilan :

On retiendra que pour les équations et inéquations avec ln on doit commencer par chercher l'ensemble de résolution.
On fera bien la distinction entre la notion d'ensemble de résolution d'une équation avec la notion d'ensemble de définition d'une fonction (même s'il y a une similitude entre les deux).

5°) Signe du logarithme népérien d'un nombre

• Si $x>1$, alors $\ln x>0$.
• Si $0<x<1$, alors $\ln x<0$.
• Si $x=1$, alors $\ln x=0$.

Signes d'expression : $\ln x-1$
On peut utiliser deux inéquations et une équation ou utiliser le signe d'une expression de la forme $f(x)-f(a)$ ou $f(a)-f(x)$ où *f* est une fonction strictement monotone sur un intervalle *I* et *a* est un élément de *I*.

tableaux de signes de $\ln x$ et de $\ln x-2$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ (attention : $\ln x-2$ désigne $(\ln x)-2$).

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	||	–	0	+	

x	0		e^2		$+\infty$
Signe de $\ln x-2$	||	–	0	+	

Le signe de $\ln x$ est donné dans le cours.

V. Propriétés algébriques

1°) Propriété 1 (propriété fondamentale)

• Énoncé

$$\boxed{\forall (a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \quad \ln(ab)=\ln a+\ln b}$$

On dit que le logarithme népérien transforme les produits en sommes (alors que l'exponentielle transforme les sommes en produits).

• Exemple

$\ln 3+\ln 4=\ln(3\times 4)=\ln 12$

On peut utiliser la propriété dans les deux sens.

• ⚠ en exercice

Vérifier que $a>0$ et $b>0$.

Si $a<0$ et $b<0$, alors ab est strictement positif et $\ln(ab)=\ln\left[(-a)(-b)\right]=\ln(-a)+\ln(-b)$.

On peut dire que pour a et b non nuls de même signe (strictement positif ou strictement négatif),
$\ln ab=\ln|\,ab\,|=\ln|\,a\,|+\ln|\,b\,|$.

On a la même chose pour la racine carrée d'un produit :
Pour a et b de même signe (positifs ou nuls ou négatifs ou nuls), on a $\sqrt{ab}=\sqrt{|\,ab\,|}=\sqrt{|\,a\,|}\times\sqrt{|\,b\,|}$.

$\ln(ab)$ existe dans le cas où $ab>0$ c'est-à-dire dans les deux cas suivants :
- $a>0$ et $b>0$;
- $a<0$ et $b<0$.

Il faut prendre garde que $\ln(ab)$ n'existe pas dans le cas où $ab\leqslant 0$ c'est-à-dire dans les deux cas suivants :
- $a\leqslant 0$ et $b\geqslant 0$;
- $a\geqslant 0$ et $b\leqslant 0$.

Il est important de bien prendre conscience de ce point.

• Démonstration

$e^{\ln(ab)}=ab$

$e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab$

D'après la propriété d'égalité de deux exponentielles, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

• Généralisation

$$\forall (a,b,c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3 \quad \ln(abc)=\ln a+\ln b+\ln c$$

$$\forall (a_1,a_2,\dots,a_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n \quad \ln(a_1a_2\ \dots\ a_n)=\ln a_1+\ln a_2+\ \dots\ +\ln a_n$$

Le lundi 8 novembre 2021

Calculatrice Numworks

$\ln(100)$
La calculatrice transforme en $2\ln 5+2\ln 2$.
$\ln 100=2\ln 5+2\ln 2$

$\ln(45)$
Elle met $\ln 5+2\ln 3$.
$\ln 45=\ln 5+2\ln 3$

$\ln(1000)$
$\ln 1000=3\ln 5+3\ln 2$

2°) Propriété 2

• Énoncé

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

• Exemple

$$\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

• Démonstration

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1$$

$$\downarrow \text{prop. 1} \qquad \downarrow \text{propriété}$$

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$$

On en déduit que $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

3°) Propriété 3

• Énoncé

$$\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

• Exemple

$$\ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$$

• ⚠ en exercice

Vérifier que $a > 0$ et $b > 0$.

Si $a < 0$ et $b < 0$, alors $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(\frac{-a}{-b}\right) = \ln(-a) - \ln(-b)$

• Démonstration

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

$$= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$$

$$\downarrow \text{prop. 1}$$

$$= \ln a + \ln \frac{1}{b}$$

$$\downarrow \text{prop. 2}$$

$$= \ln a - \ln b$$

4°) Propriété 4

• Énoncé

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln\left(a^n\right) = n \ln a$$

• Exemple

$$\ln 9 = \ln\left(3^2\right) = 2 \ln 3$$

• Démonstration

1^er^ cas : $\boxed{n > 0}$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$\ln\left(a^n\right) = \ln\left(a \times a \times \ldots \times a\right)$$

$$\downarrow \text{prop. 1}$$

$$= \underbrace{\ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{n \text{ termes}}$$

$$= n \ln a$$

2^e^ cas : $\boxed{n < 0}$

On pose : $m = -n$.

On a $m > 0$.

$$a^n = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$\ln\left(a^n\right) = \ln\left(\dfrac{1}{a^m}\right)$

prop. 2

$= -\ln a^m$

$m > 0$ donc le 1er cas s'applique.

$= -m\ln a$

$= n\ln a$

3e cas : $\boxed{\boldsymbol{n=0}}$

$a^0 = 1$ (par définition)

$\ln\left(a^0\right) = \ln 1 = 0$

On peut donc écrire : $\ln\left(a^0\right) = 0\ln a$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln\left(a^n\right) = n\ln a$

5°) Propriété 5

• Énoncé

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$$

• Exemples

$\ln\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\ln 3$

$a > 0$ et $b > 0$

$\ln\sqrt{a+b} = \dfrac{1}{2}\ln(a+b)$

• Démonstration

On a $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc, par passage au logarithme népérien,

$\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right] = \ln a$

prop. 4

$2\ln\sqrt{a} = \ln a$ ce qui donne immédiatement $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

N.B. : Nous verrons plus tard que pour tout réel $a > 0$, on a : $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

La propriété de ce paragraphe est une généralisation de la règle donnée au 4°) pour les exposants entiers relatifs.

Généralisation aux racines *n*-ièmes :

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 et a réel strictement positif, on a $\ln\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n}\ln a$.

6°) Formulaire récapitulatif

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln a$$

$$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

7°) Application aux puissances du nombre e

$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln \mathrm{e}^n = n\ln \mathrm{e} = n$

$\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}} = -1$

$\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}$

8°) Application à la résolution d'inéquations avec des puissances (fonction logarithme et valeur seuil)

Exemple :

Déterminons les entiers naturels n tels que $(0,9)^n \leqslant \dfrac{1}{2} \quad (1)$.

Méthode :

On « prend » le logarithme népérien des deux membres.

On a l'impression que l'on complexifie mais en fait on simplifie le problème (comme souvent en mathématiques, on complexifie pour simplifier).

$(1) \Leftrightarrow \ln\left[(0,9)^n\right] \leqslant \ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow n\ln 0,9 \leqslant \ln\frac{1}{2}$

$: \ln 0,9 \quad (\ln 0,9 < 0 \text{ car } 0 < 0,9 < 1)$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\ln 0,9}$

Avec la calculatrice, on trouve $\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\ln 0,9} = 6,578...$ (on peut démontrer que c'est un nombre irrationnel).

Or $n \in \mathbb{N}$.
Donc les entiers naturels *n* cherchés sont supérieurs ou égaux à 7.

Une idée qui n'aboutit pas : $(1) \Leftrightarrow 0,9 \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$.

VI. Dérivée de la fonction logarithme népérien

1°) Rappel [définition d'une fonction dérivable en un réel et du nombre dérivé]

On dit qu'une fonction *f* est dérivable en *a* lorsque le quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque *x* tend vers *a*.
Dans ce cas, la limite est appelée le nombre dérivé de *f* en *a*.
On la note $f'(a)$.

Le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé taux de variation de *f* entre *a* et *x*.

2°) Démonstration

$f(x) = \ln x$

On considère un réel *a* fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.

On forme le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où *x* est un réel strictement positif avec $x \neq a$.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$$

$$= \frac{y-b}{x-a} \quad \text{en posant } y = \ln x \text{ et } b = \ln a$$

$$= \frac{y-b}{e^y - e^b}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{e^y - e^b}{y-b}}$$

Lorsque *x* tend vers *a*, *y* tend vers *b* (obtenu grâce à la continuité de la fonction logarithme népérien qui est admise cette année).

$\dfrac{e^y - e^b}{y-b} \xrightarrow[y \to b]{} \exp'(b)$ car la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en *b*.
Or $\exp' = \exp$ (la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même).

Donc $\exp'(b) = \exp(b) = e^b = a$.

Donc $\dfrac{e^y - e^b}{y-b} \xrightarrow[y \to b]{} a$ et par suite, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{a}$.
Comme le résultat de la limite est finie, on en déduit que la fonction ln est dérivable en *a* et que le nombre dérivé de ln en *a* est $\dfrac{1}{a}$.

Ainsi, $\ln'(a) = \dfrac{1}{a}$

Autres démonstrations :

- Dans le supérieur, on verra le théorème de dérivation d'une bijection réciproque qui permet de démontrer plus rapidement que la fonction ln est strictement croissante et dérivable.

- En admettant que la fonction ln est dérivable et en utilisant la relation $(\ln \circ \exp)(x) = x$.

3°) Propriété

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Il est surprenant de voir qu'une fonction aussi compliquée que la fonction logarithme népérien (fonction transcendante) puisse avoir une dérivée aussi simple (la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction rationnelle.

Il existe d'autres fonctions transcendantes dont la dérivée est rationnelle.
C'est le cas par exemple le cas de la fonction Arctangente qui sera étudiée dans le supérieur.

Sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

VII. Étude de la fonction logarithme népérien

1°) Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction $f : x \mapsto \ln x$.

2°) Domaine de définition

$\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{lll} \text{On peut noter } f : & \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} & \text{« à valeurs dans » (sans talon)} \\ & x \longmapsto \ln x & \text{« a pour image » (avec talon)} \end{array}$$

3°) Dérivée

Nous avons démontré que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

4°) Tableau de variation

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	
Variation de la fonction f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5°) Limite en $+\infty$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

Démonstration :

On se donne un réel A.
On pose $B = \mathrm{e}^A$.

Si $x > B$, alors $\ln x > \ln B$ c'est-à-dire $\ln x > A$.

Par définition, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

6°) Limite en 0^+

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

Démonstration :

On effectue un **changement de variable**.

On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$

$(x \to 0^+) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$\ln x = \ln \dfrac{1}{X}$

$\downarrow$ prop. 2

$\ln x = -\ln X$

$\lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\infty$ (d'après le 5°))

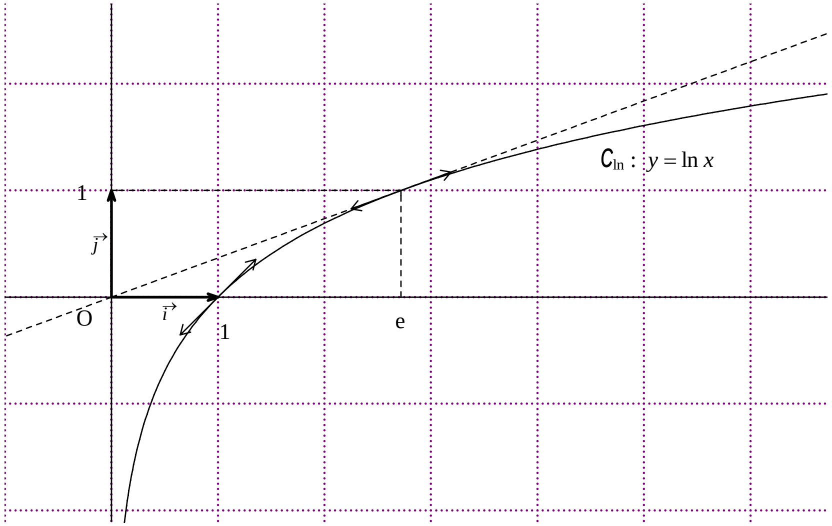
D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Conséquence graphique : La courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet la droite d'équation $x = 0$ c'est-à-dire l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

7°) Tableau de valeurs (avec la calculatrice)

x	0,1	0,5	1	2	3	4	5
$\ln x$ (valeurs arrondies au dixième)	– 2,3	– 0,7	0	0,7	1,1	1,4	1,6

8°) Représentation graphique



9°) Tangente particulière au point d'abscisse 1

$$(\ln)'(1)=\frac{1}{1}=1$$

La tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 1.

10°) Tangente particulière au point d'abscisse e

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse e s'écrit :

$$y=(\ln)'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})+\ln \mathrm{e}$$

$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1$$

$$y=\frac{x}{\mathrm{e}}-1+1$$

$$y=\frac{x}{\mathrm{e}}$$

Cette tangente passe donc par l'origine du repère.
D'où le tracé de la tangente (on joint l'origine du repère au point d'abscisse e).

11°) Symétrie

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (ou normal, c'est-à-dire dont les deux vecteurs de base ont la même norme), les courbes $C_{\exp}$ et $C_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Rappel : Dans un repère normal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, la droite Δ d'équation $y = x$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$ (qui est un angle aigu ou obtus).

Rappel :
Un angle admet deux bissectrices : une bissectrice intérieure (celle étudiée en 6[e]), droite qui est un axe de symétrie de l'angle et une bissectrice extérieure, orthogonale à la première qui n'est pas un axe de symétrie.

Démonstration :

Pour tout réel a strictement positif, on a : $\mathrm{e}^{\ln a} = a$.
Donc les points $\mathrm{M}(a\,;\ln a)$ et $\mathrm{N}(\ln a\,;a)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ et appartiennent respectivement aux courbes représentatives de la fonction ln et de la fonction exp.

Cette propriété est à relier au fait que les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.
Il en est de même des courbes des fonctions « carré » et « racine carrée » sur $[0\,;+\infty[$.

VIII. Limites de référence

1°) 1[ère] limite de référence (croissance comparée)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$$

Démonstration :

On rencontre une F.I. du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », on va utiliser une méthode par changement de variable.

On pose $y=\ln x \Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{y}$

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (y \to +\infty)$

$$\frac{\ln x}{x}=\frac{y}{\mathrm{e}^{y}}=\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{y}}{y}}$$

D'après le cours sur la fonction exponentielle (2), on a : $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{y}}{y}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Interprétation graphique :

La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ permet de dire que la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

2°) 2[e] limite de référence

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0}$$

Démonstration :

On rencontre une F.I. du type « $0 \times \infty$ ».

1[ère] méthode :

On va utiliser une méthode par changement de variable.

On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$

$(x \to 0^+) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

Réécriture : $x \ln x = \dfrac{1}{X} \ln \dfrac{1}{X}$

$= \dfrac{1}{X}(-\ln X)$

$= -\dfrac{\ln X}{X}$

$$\lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X}\right) = 0$$

D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$

2[e] méthode :

On pose $y = \ln x \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y$

$(x \to 0^+) \Leftrightarrow (y \to -\infty)$

$x \ln x = y\mathrm{e}^y$

D'après le cours sur la fonction exponentielle, on a : $\lim\limits_{y \to -\infty} (y\mathrm{e}^y) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$.

3°) 3[e] limite de référence : utilisation du nombre dérivé de la fonction ln en 1

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$$

On rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

Démonstration :

On procède par une méthode par taux de variation.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x$.

On effectue une réécriture.

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{f(1+h)}{h}$$

Or $\ln 1 = 0$.

On l'introduit de force pour faire apparaître un taux de variation.

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Or comme la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, par définition du nombre dérivé de f en 1, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1).$$

Or $\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

donc $f'(1) = 1$

Conclusion : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

On peut aussi retenir $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

IX. Fonctions associées à la fonction logarithme népérien

On considère une fonction $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$) dérivable telle que $\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) > 0$ (on dit que u est à valeurs strictement positives).

On s'intéresse à la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

$x \mapsto \ln[u(x)]$

1°) Propriété (découle de la formule de dérivée d'une composée)

Énoncé :

> u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in \mathrm{I} \quad u(x) > 0$.
>
> La fonction $f : x \mapsto \ln[u(x)]$ est définie et dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
>
> On retient : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

On pourra noter que $f = \ln \circ u$.

Démonstration :

Rappel de la formule de dérivation d'une composée.

> *u* et *v* sont deux fonctions définies et dérivables sur des intervalles.
> On note *f* la fonction définie par $f(x) = v\left[u(x)\right]$.
> On suppose que *f* est définie sur un intervalle I.
> La fonction *f* est alors dérivable sur I et la dérivée de *f* est donnée par $f'(x) = u'(x) \times v'\left[u(x)\right]$.

On prend ici pour *v* la fonction ln.

On sait que *v* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On en déduit que $\forall x \in \text{I} \quad f'(x) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)}$ soit $\forall x \in \text{I} \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2°) Vocabulaire

Le quotient $\dfrac{u'}{u}$ est appelé la **dérivée logarithmique** de *u* (vieux nom, que l'on utilisait beaucoup autrefois en sciences physiques avec les calculs d'erreurs en particulier).

On n'oubliera pas que *u* désigne une fonction dans cette formule.

3°) Exemple

$f : x \mapsto \ln\left(x^2 + x + 1\right)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + 1 > 0$ (en effet, $x^2 + x + 1$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est égal à – 3 donc strictement négatif, et par conséquent, toujours du signe de x^2 c'est-à-dire strictement positif) donc *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

D'après la règle, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

4°) Cas particulier

> *a* et *b* sont deux réels tels que $a \neq 0$.
>
> On note *f* la fonction définie par $f(x) = \ln(ax+b)$.
>
> ($f(x)$ existe si et seulement si $ax + b > 0$)
>
> La fonction *f* est dérivable sur son intervalle de définition et $\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$.

On retiendra $\boxed{\left[\ln(ax+b)\right]' = \dfrac{a}{ax+b}}$.

5°) Extension à un cas plus général

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in \text{I} \quad u(x) \neq 0$.

$f : x \mapsto \ln\left|u(x)\right|$

f est définie sur I.
Comme *u* est dérivable sur I, *u* est continue sur I, donc *u* est de signe constant sur I (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires).

1er cas : $\forall x \in \text{I} \quad u(x) > 0$

$\forall x \in \text{I} \quad f(x) = \ln\left[u(x)\right]$

$\forall x \in \text{I} \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

2e cas : $\forall x \in \text{I} \quad u(x) < 0$

$\forall x \in \text{I} \quad f(x) = \ln\left[-u(x)\right]$

On pose $v(x) = -u(x)$.

$f = \ln \circ v$

On applique le 1°).

$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$

$= \dfrac{-u'(x)}{-u(x)}$

$= \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

On remarque que, dans les deux cas, on obtient la même expression sans valeur absolue.

$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

On retient : $\left(\ln \circ |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$ ou $\left(\ln |u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

6°) Cas particuliers

• $f : x \mapsto \ln|x|$

$D_f = \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

(Faute à ne pas faire : $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$)

• $f : x \mapsto \ln|ax+b|$ (où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$)

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{a}\right\} \quad f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$

• **Attention**

S'il n'y a pas de ln, on a un problème pour la dérivée de la fonction $f : x \mapsto |x^2-1|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 \text{ si } x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[\\ -x^2+1 \text{ si } x \in [-1\,;1] \end{cases}$$

On se place sur $\left]-\infty\,;-1\right[$, $\left]-1\,;1\right[$ et $\left]1\,;+\infty\right[$.
On étudie ensuite directement la dérivabilité en 1 et en – 1.

X. Fonctions logarithmes de base quelconque

1°) Définition

a est un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.

On appelle **fonction logarithme de base *a*** la fonction $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

On a donc : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Sur calculatrice :

• Numworks : Boîte à outils log(x,a) logarithme de base a

• TI 83 Premium CE

Propriété [équivalence fondamentale d'égalités de deux logarithmes]

a est un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
x et y sont deux réels strictement positifs.
$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

2°) Cas particuliers

• $\boldsymbol{a = \mathrm{e}}$ $\quad \ln \mathrm{e} = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_{\mathrm{e}} x = \dfrac{\ln x}{\ln \mathrm{e}} = \ln x$

La **fonction logarithme de base e** est la fonction logarithme népérien.
Le nombre de Néper e s'appelle d'ailleurs aussi la base du logarithme népérien.

• $\boldsymbol{a = 10}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

$\log_{10} x$ est noté $\log x$.

(logarithme décimal de *x*)

$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

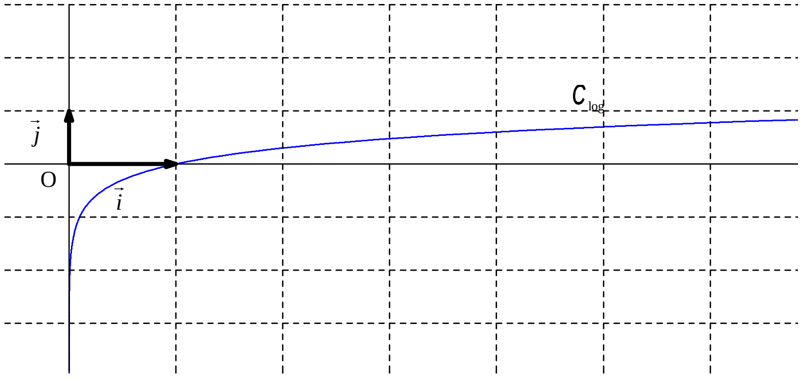
La calculatrice fournit $\ln 10 = 2,3025850929...$.
Un théorème hors du programme de terminale permet d'affirmer que ln 10 est un nombre irrationnel.

Sur calculatrice, on utilise la touche de calcul $\boxed{\log}$.

Application en chimie :

Le potentiel hydrogène d'une solution aqueuse est défini par $\text{pH} = -\log\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]$, la concentration en ions hydronium devant être exprimée en mol.L^{-1}.

Représentation graphique de la fonction log :



3°) Propriété [puissances de *a*]

• Énoncé :

On a : $\log_a(a) = 1$.
Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \log_a\left(a^n\right) = n$.

• Démonstration :

$$\log_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

$$\log_a\left(a^n\right) = \frac{\ln a^n}{\ln a} = \frac{n\cancel{\ln a}}{\cancel{\ln a}} = n$$

• Cas particulier du logarithme décimal :

On retiendra que $\log 10 = 1$ et que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \log\left(10^n\right) = n$.

3°) Propriétés algébriques

***x* et *y* sont deux réels strictement positifs.**
$n \in \mathbb{Z}$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(x^n\right) = n\log_a x$$

$$\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_a x$$

Exemple de démonstration :

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

N.B. : On peut remplacer *a* par n'importe quel nombre strictement positif différent de 1.

4°) Exercice

Résoudre l'équation $\log_2 x = 3 \quad (1)$.

Conditions d'existence : On doit avoir $x > 0$. On résout l'équation (1) dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Résolution :

1ère méthode :

On utilise l'équivalence fondamentale de deux logarithmes de base 2.

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2\left(2^3\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln x = 3\ln 2$$
$$\Leftrightarrow x = 2^3$$
$$\Leftrightarrow x = 8$$

2^{e} méthode :

On repasse par la définition du logarithme de base 2 à l'aide du logarithme népérien.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2}=3\\ &\Leftrightarrow \ln x = 3\ln 2\\ &\Leftrightarrow \ln x=\ln 2^3\\ &\Leftrightarrow x=8\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\{\ 8\ \}$

5°) Sens de variation

• Si $a>1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Si $0<a<1$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6°) Une application du logarithme décimal

Le but de ce paragraphe est de trouver une formule donnant le nombre de chiffres d'un entier naturel.

Les nombres entiers naturels à 1 chiffre sont compris entre 10^0 (large) et 10^1 (strict).
Les nombres entiers naturels à 2 chiffres sont compris entre 10^1 (large) et 10^2 (strict).

....

Les nombres entiers naturels à n chiffres sont compris entre 10^{n-1} (large) et 10^n (strict).

Par exemple, $10^3 \leqslant 2317 < 10^4$.

On considère un entier naturel non nul A à n chiffres ($n\geqslant 1$).

On a : $10^{n-1}\leqslant \text{A} < 10^n$ (1).

On peut utilise la fonction ln ou la fonction log ou n'importe quelle fonction logarithme de base quelconque.

(1) donne $\log\left(10^{n-1}\right)\leqslant \log \text{A} < \log 10^n$ car la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc : $n-1\leqslant \log \text{A} < n$ (2).

(2) permet de dire que $n-1=\text{E}(\log\ \text{A})$ d'où $n=\text{E}(\log\ \text{A})+1$.
On retiendra le résultat suivant dont il demandé de retenir la démonstration :

Le nombre de chiffres de l'écriture en base dix d'un entier naturel A non nul est égal à $\text{E}(\log \text{A})+1$.

Exemples d'utilisation :

① $\text{A}=25^{40}$

$$\begin{aligned}\log \text{A} &= 40\log 25\\ &=55{,}9176\ldots\end{aligned}$$

Le nombre de chiffres de A est égal à $55+1=56$.

On aurait pu obtenir ce résultat avec la calculatrice.
En effet, avec la calculatrice, on obtient l'affichage suivant pour le calcul de A : $8.271806126*10^{55}$.
Il suffit d'ajouter 1 pour trouver qu'il y a 56 chiffres.

② $\text{B}=2^{2013}$

$$\begin{aligned}\log \text{B} &= 2013\ \log 2\\ &=605{,}9733\ldots\end{aligned}$$

Le nombre de chiffres de B est égal à $605+1=606$.

Pour B, il n'est pas possible d'utiliser la calculatrice pour trouver le nombre de chiffres de l'écriture en base dix de B. Celle-ci est en dépassement de capacité.

Généralisation pour une base quelconque :

Soit *b* un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le nombre de chiffres de l'écriture en base *b* d'un entier naturel A non nul est égal à $\text{E}(\log_b \text{A})+1$.

Exercice :

1°) Quel est le nombre de chiffres (0 ou 1) noté $\delta(n)$ du développement d'un entier naturel $n\geqslant 1$ en base deux ?
2°) Exemple : Calculer $\delta(2021)$. Vérifier en donnant l'écriture en base deux de 2021.

Solution :

1°) On applique directement la propriété donnant le nombre de chiffres de l'écriture dans une base quelconque sans refaire la démonstration : $\forall n\geqslant 1\quad \delta(n)=\text{E}(\log_2 n)+1$.

2°) On applique le résultat du 1°) : $\delta(2021)=\text{E}(\log_2 2021)+1$

On utilise la calculatrice en se rappelant que, par définition, $\log_2 2021=\dfrac{\ln 2021}{\ln 2}$.

On obtient $\delta(2021)=10+1=11$.

En effectuant des divisions euclidiennes successives par 2, on obtient : $2021=\overline{11111100101}^{(2)}$.

L'écriture en base deux de 2021 comporte bien 11 chiffres.

XI. Puissances réelles

1°) Définition

Pour tout $a>0$ et tout réel b, on note a^b le réel $\exp(b\ln a)$ soit $\mathrm{e}^{b\ln a}$.

On retiendra que : $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$.

2°) Exemples

• 2^π

Par définition, $2^\pi=\mathrm{e}^{\pi\ln 2}$.

Avec la calculatrice en utilisant directement la touche d'exposant, on trouve : $2^\pi=8,8249...$

• $(-2)^\pi$

La formule n'est pas applicable car $-2<0$ donc $\ln(-2)$ n'existe pas ; $(-2)^\pi$ n'existe pas.

La calculatrice donne une réponse complexe qui ne peut pas être comprise en Terminale.

• La définition permet de définir en particulier des exposants fractionnaires (par exemple, $x^{\frac{1}{3}}$ ou $x^{\frac{5}{7}}$ pour $x>0$). Cela sera revu dans le cours sur les racines n-ièmes.

En particulier, pour $x>0$, on a : $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

3°) Cas des exposants entiers, lien avec la définition de 4e

n est un entier relatif quelconque.

$$\exp(n\ln a)=\mathrm{e}^{n\ln a}=\underset{\substack{\uparrow\\ n\in\mathbb{Z}}}{\mathrm{e}^{\ln a^n}}=a^n$$

Pour un entier relatif, la définition du 1°) coïncide avec la définition connue.

4°) Signe d'une puissance réelle

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\quad a^b>0}$$

5°) Logarithme népérien d'une puissance

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\quad \ln\left(a^b\right)=\ln\left(\mathrm{e}^{b\ln a}\right)=b\ln a}$$

6°) Cas particuliers

• $a=\mathrm{e}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^x$ (« e puissance x avec la définition du 1°) ») $=\exp(x\ln\mathrm{e})=\exp(x)$

• $a=1$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad 1^x$ (« 1 puissance x avec la définition du 1°) ») $=\exp(x\times\ln 1)=\exp(x\times 0)=\exp 0=1$

7°) Propriétés algébriques

***a* et *b* sont deux réels strictement positifs.**
***x* et *y* sont deux réels quelconques.**

$a^x\times a^y=a^{x+y}$

$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$

$(ab)^x=a^xb^x$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

$\dfrac{1}{a^x}=a^{-x}$

$\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

Démonstration de la 1ère propriété :

$$\begin{aligned}a^x\times a^y&=\mathrm{e}^{x\ln a}\times\mathrm{e}^{y\ln a}\\&=\mathrm{e}^{x\ln a+y\ln a}\\&=\mathrm{e}^{(x+y)\ln a}\\&=a^{x+y}\end{aligned}$$

8°) Lien avec le logarithme de base a

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{ 1 \}$

$$\begin{aligned} \log_a x = y &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln a} = y \\ &\Leftrightarrow y \ln a = \ln x \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln\left(a^y\right) \\ &\Leftrightarrow x = a^y \end{aligned}$$

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y}$$

($x = \ln y \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^x$)

Les fonctions $\log_a$ et $x \mapsto a^x$ sont réciproques l'une de l'autre.

Cas particulier

$a = 10$

$$\boxed{y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y}$$

Application en chimie :

Le potentiel hydrogène d'une solution aqueuse est défini par $\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$, la concentration en ions hydronium devant être exprimée en $\mathrm{mol.L^{-1}}$.

On a donc $-\mathrm{pH} = \log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$. Par suite, $\left[\mathrm{H_3O^+}\right] = 10^{-\mathrm{pH}}$.

Application à la résolution d'équations

Résoudre l'équation $\log_2 x = 3 \quad (1)$.

On doit avoir $x > 0$. On résout l'équation (1) dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

On utilise alors directement l'équivalence :

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x = 2^3 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$