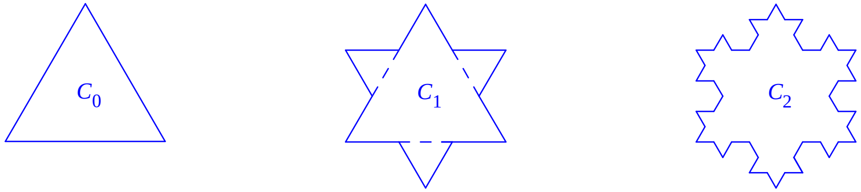
TS1 Devoir pour le lundi 17 décembre 2012

I. Le flocon de neige ou courbe de Von Koch

L'unité de longueur est le centimètre.
On réalise une suite de polygones C_n de la manière suivante. On part d'un triangle équilatéral C_0 de côté 1.
Sur chaque côté, on considère les deux points qui partagent ce segment en trois segments de même longueur.
Sur le segment central, on construit alors vers l'extérieur un triangle équilatéral et l'on supprime le segment central.



Pour le polygone C_n, on note x_n le nombre de côtés, l_n la longueur de chaque côté, P_n le périmètre (en centimètres) et A_n l'aire en cm^2.

Partie A

1°) Déterminer la nature de (x_n) ; en déduire x_n en fonction de n.
2°) Même question avec la suite (l_n).
3°) Exprimer P_n en fonction de n puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

Partie B

1°) Exprimer l'aire S d'un triangle équilatéral en fonction de son côté a.
2°) Calculer A_0.
3°) En remarquant que, pour k entier naturel fixé, on construit sur chaque côté de C_k un triangle équilatéral de côté l_{k+1}, établir l'égalité $A_{k+1} = A_k + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

Cette égalité s'écrit aussi $A_{k+1} - A_k = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

4°) Soit n un entier naturel non nul fixé.
À l'aide de la méthode de télescopage, en présentant convenablement, démontrer l'égalité
$$A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right].$$
(**N.B. :** si on préfère, on peut aussi utiliser le symbole Σ.)

En déduire que $A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

5°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$. Comparer avec le résultat de la question 3°) de la **partie A**.
Commenter.

Il s'agit d'une **courbe fractale**. Les fractales ont été découvertes et étudiées par un mathématicien français, Benoît Mandelbrot, mort en 2010. Ces courbes apparaissent dans la nature ainsi que le suggère le titre de l'exercice.

II. Facultatif

On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
On pose $S = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On suppose dans cette question que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartiennent à l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
Démontrer que l'on a $|S| \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

2°) Démontrer que l'on a $S = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$ avec $s_i = \sum\limits_{k=i}^{n} x_k$.

Corrigé du DM pour le 17-12-2012

I. Le flocon de neige ou courbe de Von Koch

Von Koch est un mathématicien suédois né en 1870 et mort en 1924. On a donné son nom à l'une des premières fractales (courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes impliquant une homothétie interne) : le flocon de Koch.

Partie A

1°)

• Déterminons la nature de (x_n).

Chaque côté du polygone C_n est remplacé dans C_{n+1} par 4 côtés.
Or x_n désigne le nombre de côtés de C_n.
Donc le nombre de côtés de C_{n+1} est égal à $4x_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = 4x_n$.

Par suite, (x_n) est une suite géométrique de premier terme $x_0 = 3$ et de raison 4.

• Déduisons-en x_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = 3 \times 4^n$

2°)

• Déterminons la nature de (l_n).

Un côté de C_n a pour longueur l_n.

On le divise en trois segments de longueurs égales, donc de longueur $\frac{l_n}{3}$. Deux de ces trois segments deviennent des côtés de C_{n+1}, le troisième sert de base à un triangle équilatréal dont les deux autres côtés deviennent aussi des côtés de C_{n+1}.

Donc tous les côtés de C_{n+1} ont pour longueur $l_{n+1} = \frac{l_n}{3}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad l_{n+1} = \frac{l_n}{3}$.

Par suite, (l_n) est une suite géométrique de premier terme $l_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$.

• Déduisons-en l_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3°)

• Exprimons P_n en fonction de n.

Le périmètre du polygone C_n est égal à son nombre de côtés, x_n, multiplié par la longueur de chaque côté, l_n.

Donc

$$\begin{aligned} P_n &= x_n \times l_n \\ &= 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \end{aligned}$$

• Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\frac{4}{3} > 1$

$3 > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$.

Partie B

1°) **Exprimons l'aire S d'un triangle équilatéral en fonction de son côté a.**

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Donc l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\dfrac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

On peut aussi utiliser la formule donnant l'aire d'un triangle quelconque en fonction de la longueur de deux côtés et de l'angle qu'ils forment : $\dfrac{a \times a \times \sin\frac{\pi}{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2°) **Calculons A_0.**

C_0 est un triangle équilatéral de côté 1.

Donc $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

3°) **Établissons l'égalité $A_{k+1} = A_k + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.**

Sur chaque côté de C_k, on construit un triangle équilatéral de côté l_{k+1}
Donc on construit x_k triangle équilatéraux de côté l_{k+1} dont les aires vont s'ajouter à l'aire de C_k.

Donc :

$$A_{k+1} = A_k + x_k \times \frac{{l_{k+1}}^2 \times \sqrt{3}}{4}$$

$$= A_k + 3\times 4^k \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right]^2$$

$$= A_k + 3\times 4^k \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{k+1}$$

$$= A_k + 3\times 4^k \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^{k+1}}$$

$$= A_k + 3\times 4^k \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9^k} \times \frac{1}{9}$$

$$= A_k + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

4°) $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

• Démontrons que $A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$.

D'après la question précédente, on a : $A_{k+1} - A_k = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

Donc

$$\cancel{A_1} - A_0 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\cancel{A_2} - \cancel{A_1} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9}$$

$$\vdots$$

$$A_n - \cancel{A_{n-1}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Par somme,

$$A_n - A_0 = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right) + \ldots + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} ;$$

$$A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

• Déduisons-en que $A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

On a : $1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ (somme des puissances consécutives d'un même nombre différent de 1)

Donc $A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$

$$= A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

5°)

• Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{4}{9} < 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

• Comparons avec le résultat de la question 3°) de la partie A.

Dans la question 3°) de la partie A, on avait trouvé $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$.

• Commentons.

Le résultat est un peu surprenant car on obtient une suite de figures dont le périmètre tend vers + ∞ et l'aire tend vers un nombre fini.

II.

$S = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n$.

1°) $\forall\ i \in \{1\ ;2\ ;\ \ldots\ ;n\}\quad x_i \in [-1;1]$

Démontrons que l'on a $|\ S\ | \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$

$-1 \leqslant x_2 \leqslant 1$

$\vdots$

$-1 \leqslant x_n \leqslant 1$

Donc

$-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$

$-2 \leqslant 2x_2 \leqslant 2$

$\vdots$

$-n \leqslant nx_n \leqslant n$

En additionnant membre à membre ces inégalités qui sont toutes de même sens, on obtient :

$-1-2-\ldots-n \leqslant S \leqslant 1+2+\ldots+n$

soit $-\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant S \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$

Donc $|\ S\ | \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2°) $s_i = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} x_k$

Démontrons que l'on a $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i$ avec $s_i = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} x_k$.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
s_2 &= \phantom{x_1 +{}} x_2 + \ldots + x_n \\
&\ \vdots \\
s_n &= \phantom{x_1 + x_2 + \ldots + {}} x_n
\end{aligned}
$$

Par somme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = S$

Donc $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i$.