TS

Les nombres complexes (2)
Module d'un nombre complexe

Plan du chapitre :

Le 21-12-2022

Module d'un nombre complexe en Python

Créer une fonction

```
from math import sqrt

def complexe_modulo(z):
       a = z.real
       b = z.imag
    return math.sqrt(a**2+b**2)
```

avec

`z = 1 + 1.j`

On trouve:

complexe_modulo(z)

`1.4142135623730951`

Utiliser la fonction abs()

On peut aussi utiliser la fonction "built-in" abs() :

```
z = 1 + 1.j
abs(z)
1.4142135623730951
```

Le 21-12-2022

Origine du mot *module*

modulus en latin : mesure (a donné le mot « moule » en français)

Jean-Robert Argand 1768-1822

Publications de 1806 et 1814

Le 29-12-2022

Regarder le programme Python intitulé Mandelbrot préinstallé dans la calculatrice Numworks

I. Généralités

1°) Définition

z est un nombre complexe quelconque.
On pose $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **module** de z le réel positif ou nul $|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On peut retenir : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\,z\,| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}$.

2°) Remarque

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\,z\,| \geqslant 0$

Le module d'un nombre complexe est toujours un réel positif ou nul.

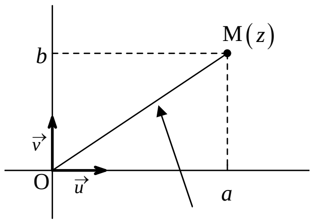
3°) Exemples

$z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$	$z_2 = 1 - 3\mathrm{i}$	$z_3 = -5$	$z_4 = 2\mathrm{i}$
$|\,z_1\,| = \sqrt{3^2 + 2^2}$ $= \sqrt{9+4}$ $= \sqrt{13}$	$|\,z_2\,| = \sqrt{1^2 + (-3)^2}$ $= \sqrt{10}$	$|\,z_3\,| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2}$ $= \sqrt{25}$ $= 5$	$|\,z_4\,| = \sqrt{0^2 + 2^2}$ $= 2$

$|\;\mathrm{i}\;| = 1$

4°) Interprétation géométrique

z est un nombre complexe quelconque.
$z = a + \mathrm{i}b \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$
M est le point d'affixe z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.



module de $z = |\,z\,|$

On sait que $\mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (car la distance de M à l'origine du repère est égal à la racine carrée de la somme des coordonnées).

On a donc $|\,z\,| = \mathrm{OM}$.

5°) Lien avec la valeur absolue d'un réel

$z = a + \mathrm{i}b \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$

$$\underset{\text{module}}{\underset{\uparrow}{|\,z\,|}} \quad \underset{\text{définition}}{\underset{\uparrow}{=}} \quad \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |\,a\,| = \underset{\text{distance}}{\underset{\uparrow}{\mathrm{d}(0\,;a)}} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$$

ou module de $z = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} =$ valeur absolue de a

La notion de module est une généralisation, une extension, de la notion de valeur absolue des réels.

Un nombre réel peut être vu comme complexe et le module est égal à la valeur absolue.

On peut retenir également que le module d'un imaginaire pur est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.

6°) Propriété (une autre expression du module)

● **Énoncé**

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\,z\,| = \sqrt{z\bar{z}}$

Le carré du module d'un nombre complexe est égal au produit de ce nombre complexe par son conjugué.

Le module d'un nombre complexe est égal à la racine carrée du produit de ce nombre complexe par son conjugué.

● **Démonstration**

On pose $z = a + \mathrm{i}b \quad ((a\,;b) \in \mathbb{R}^2)$.

On a alors : $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) \\ &= a^2 - (\mathrm{i}b)^2 \\ &= a^2 + b^2 \quad (\geqslant 0) \end{aligned}$$

Donc $|\,z\,|^2 = z\bar{z}$.

On retiendra au passage que $\forall z \in \mathbb{C} \quad z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$.

• Mise en garde

On ne peut pas écrire : $|z| = \sqrt{z} \times \sqrt{\overline{z}}$.

En effet, z et $\overline{z}$ sont dans $\mathbb{C}$ et on n'a pas le droit de considérer des racines carrées dans les nombres complexes.

En revanche, $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ donc on a bien le droit d'écrire sa racine carrée (on a le droit d'écrire la racine carrée d'un réel positif ou nul).

7°) Propriété (cas de nullité du module)

• Énoncé

$$\boxed{|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0}$$

• Démonstration

Démonstration 1 :

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ ($(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

Démonstration 2 :

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow |z|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

8°) Propriété évidente

Si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$.

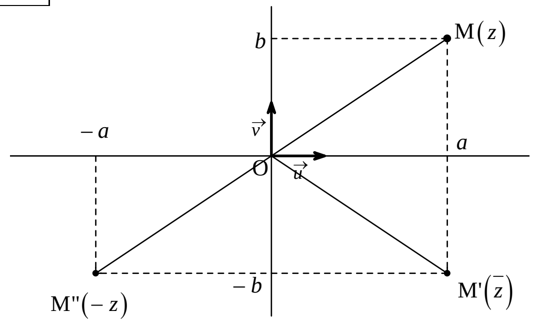
La réciproque est évidemment fausse comme le montre le contre-exemple suivant : $|1| = |\mathrm{i}| = 1$.

II. Propriétés du module

1°) Propriété 1

• Énoncé

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \quad |\overline{z}| = |-z| = |z|}$$



Les symétries de la figure permettent d'écrire : $\mathrm{OM} = \mathrm{OM}' = \mathrm{OM}''$.

On peut coder la figure.

• Démonstration

On pose $z = a + \mathrm{i}b$ ($(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

On a alors :
$\overline{z} = a - \mathrm{i}b$
et
$-z = -a - \mathrm{i}b$.

$$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Autre méthode :

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z} \times \overline{\overline{z}}} = \sqrt{z\overline{z}} = |z|$$

$$|-z| = \sqrt{-z \times \overline{(-z)}} = \sqrt{z\overline{z}} = |z|$$

2°) Propriété 2

● **Énoncé**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |zz'| = |z||z'|$$

● **Démonstration**

On utilise l'expression du module à l'aide du conjugué.

On pose $Z = zz'$.

On sait que $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$.

$Z\overline{Z} = zz'\overline{zz'}$

$Z\overline{Z} = z \times z' \times \overline{z} \times \overline{z'}$ (on utilise la propriété du conjugué d'un produit : « Le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués)

$Z\overline{Z} = z\overline{z} \times z'\overline{z'}$ (on regroupe ensemble z et $\overline{z}$, z' et $\overline{z'}$)

On sait que $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ et que $z'\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$

On utilise ensuite la propriété sur la racine carré d'un produit : $\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

Donc $|Z| = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}}$.

Version plus rapide sans commentaires :

$$|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$$

$$= \sqrt{zz'\overline{zz'}}$$

$$= \sqrt{z \times z' \times \overline{z} \times \overline{z'}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{z\overline{z}}_{\in \mathbb{R}_+} \times \underbrace{z'\overline{z'}}_{\in \mathbb{R}_+}}$$

Or $\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

Donc $|Z| = \sqrt{z\overline{z}} \times \sqrt{z'\overline{z'}}$.

Par conséquent, $|Z| = |z| \times |z'|$.

Une autre démonstration possible serait de passer par l'écriture algébrique de z et z' en posant $z = a + \text{i}b$ ($(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$) et $z' = a' + \text{i}b'$ ($(a'\,;b') \in \mathbb{R}^2$) mais cette méthode nécessiterait davantage de calculs.

● **Généralisation**

$$\forall (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| \times |z_2| \times \dots \times |z_n|$$

● **Exemples**

$|3\text{i}| = |3| \times |\text{i}| = 3 \times 1 = 3$

$|-5\text{i}| = |-5| \times |\text{i}| = 5 \times 1 = 5$

3°) Propriété 3

● **Énoncé**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

● **Démonstration**

On utilise la propriété 2.

Astuce de départ : $\dfrac{z}{z'} \times z' = z$

$$\left|\frac{z}{z'} \times z'\right| = |z|$$

$$\Big\downarrow \text{propriété 2}$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| \times |z'| = |z|$$

$z' \neq 0$ donc $|z'| \neq 0$

D'où : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Autre méthode : On utilise la même méthode que pour démontrer la propriété 2.

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \sqrt{\left(\frac{z}{z'}\right) \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}} = \dots$$

● **Cas particulier**

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

4°) Propriété 4

● **Énoncé**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |z^n| = |z|^n$$

● **Démonstration**

On utilise la généralisation de la propriété 2.

Astuce de départ : $z^n = \underbrace{z \times z \times z \times \ldots \times z}_{n \text{ facteurs}}$

$|z^n| = \underbrace{|z| \times |z| \times |z| \times \ldots \times |z|}_{n \text{ fois}}$ (d'après la généralisation de la propriété 2)

On en déduit que $|z^n| = |z|^n$.

On peut énoncer une propriété similaire pour les puissances d'exposants négatifs
$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{Z}_-^* \quad |z^n| = |z|^n$

La démonstration se fait très facilement.

5°) Propriété 5 : inégalité triangulaire

● **Énoncé**

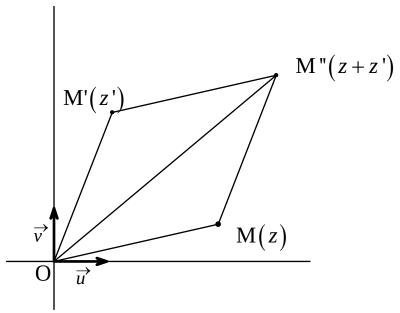
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Le module d'une somme est inférieur ou égal à la somme des modules.

On notera en particulier que le module d'une somme n'est pas égal à la somme des modules.

● **Interprétation géométrique**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.



$\mathrm{M}(z)$ $\mathrm{M}'(z')$ $\mathrm{M}''(z+z')$

OMM″M′ est un parallélogramme.

On utilise l'inégalité triangulaire rappelée ci-dessous.

Étant donnés trois points A, B, C quelconques du plan, on a $\mathrm{AC} \leqslant \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$.
Il y a égalité si et seulement si $\mathrm{B} \in [\mathrm{AC}]$.

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

On travaille indifféremment dans un triangle défini par trois points quelconques du parallélogramme.
Dans le triangle OMM″, $\mathrm{OM''} \leqslant \mathrm{OM} + \mathrm{MM''}$.

On a $\mathrm{OM''} = |z_{\mathrm{M''}}| = |z + z'|$ et $\mathrm{OM} = |z|$.

Comme OMM″M′ est un parallélogramme, on a $\mathrm{MM''} = \mathrm{OM'}$ d'où $\mathrm{MM''} = \mathrm{OM'} = |z'|$.

Donc $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

III. Applications géométriques (normes et distances)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (direct) $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) Norme d'un vecteur

● Énoncé

$\vec{w}\,(z)$ est un vecteur quelconque du plan complexe.
$\left\| \vec{w} \right\| = |\, z\,|$

● Démonstration

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ $\left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

$\vec{w}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

Comme la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est orthonormée, $\left\| \vec{w} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\, z\,|$.

2°) Distance de deux points

● Énoncé

$\mathrm{A}(z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(z_{\mathrm{B}})$ sont deux points quelconques du plan complexe.

$\mathrm{AB} = \left\| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \right\| = \left| z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \right| = \left| z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \right|$

● Démonstration

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$ (on peut écrire directement : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)$).

$\mathrm{AB} = \left\| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \right\| = \left| z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \right| = \left| z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \right|$

On a aussi de manière évidente $\mathrm{AB} = \left| z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}} \right|$.

● Règle pratique

Pour calculer la distance entre deux points A et B, on soustrait leurs affixes (peu importe l'ordre) et l'on calcule le module du résultat.

3°) Caractérisation d'ensembles de points (lieux géométriques)

● cercle $\mathcal{C}$ | **de centre $\Omega(a)$**
| **de rayon $R > 0$**

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \Omega\mathrm{M} = R \\ &\Leftrightarrow \left| z_{\mathrm{M}} - z_{\Omega} \right| = R \\ &\Leftrightarrow \left| z - a \right| = R \end{aligned}$$

● médiatrice Δ de [AB] avec $\mathrm{A}(a)$ et $\mathrm{B}(b)$ $(\mathrm{A} \neq \mathrm{B})$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(z) \in \Delta &\Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \\ &\Leftrightarrow \left| z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}} \right| = \left| z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{B}} \right| \\ &\Leftrightarrow \left| z - a \right| = \left| z - b \right| \end{aligned}$$

4°) Module de $\dfrac{z-a}{z-b}$

On considère un triplet $(a, b, z) \in \mathbb{C}^3$, $z \neq b$.

Dans le plan complexe, on note les points $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ et $\mathrm{M}(z)$.

$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$$

IV. Utilisation de la calculatrice ou de logiciels de calcul formel

1°) Mode d'emploi

Sur les calculatrices de lycée, il y a une commande spéciale qui permet de calculer le module d'un nombre complexe.

Calculatrice Numworks

Ce sont les mêmes barres que la valeur absolue.

TI 83 Premium CE

Faire $\boxed{\text{2nde}}$ puis la touche avec une barre de fraction $\boxed{\frac{\square}{\square}}$ et enfin, choix avec les barres de module $|\square|$.

TI 83 Premium CE et TI 83 Plus

Taper $\boxed{\text{math}}$ puis dans NUM choisir 1 : abs( ).

Ou

Taper $\boxed{\text{math}}$ puis dans CPX ou CMPLX (complexes) choisir 5 : abs( ).

Taper le nombre i en utilisant la touche $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{.}$ (*i*), fermer la parenthèse et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient le module du nombre que l'on a rentré.

Il faut prendre garde que le résultat est en général donné en valeur approchée.

2°) Exemple

On calcule le module de $1+2\text{i}$.

Sur calculatrice TI 83 Premium CE, on obtient directement la valeur exacte $\sqrt{5}$.

3°) Logiciel de calcul formel

Il en est de même pour les logiciels de calcul formel.

V. Ensemble des nombres complexes de module 1

1°) Notation

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On peut écrire $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$ (écriture d'un ensemble en compréhension ; on lira « U est l'ensemble des nombres complexes z tels que module de z est égal à 1 »)

Exemples :

$1\in U$ $\quad -1\in U$ $\quad \text{i}\in U$ $\quad -\text{i}\in U$ $\quad \dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}\in U$

On peut donner de multiples exemples d'éléments de U. Par exemple, $\dfrac{4+3\text{i}}{25}$, $\dfrac{1-\text{i}}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{3+2\text{i}}{\sqrt{13}}$…

On utilise pour cela la propriété P_5 vue plus loin.

2°) Représentation géométrique dans le plan complexe

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (direct) $(\text{O},\vec{u},\vec{v})$.

L'ensemble des points M d'affixe z lorsque z décrit U est le cercle de centre O et de rayon 1.

3°) Propriétés faciles

P_1 : $\forall z\in U \quad z\neq 0$

P_2 : $\forall z\in U \quad -z\in U$

P_3 : $\forall z\in U \quad \bar{z}\in U$

On dit que U est stable par passage au conjugué.

P_4 : $\forall z\in U \quad \dfrac{1}{z}=\bar{z}$

Démonstration de P_4 :

On utilise la propriété $|z|^2=z\bar{z}$.

Cette propriété est assez intéressante et se retient sous la forme : « L'inverse d'un nombre complexe de module 1 est égal à son conjugué ».

P_5 : $\forall z\in\mathbb{C}^* \quad \dfrac{z}{|z|}\in U$

Démonstration :

$$\forall z\in\mathbb{C}^* \quad \left|\frac{z}{|z|}\right|=\frac{|z|}{||z||}=\frac{|z|}{|z|}=1$$

On applique la propriété sur le module d'un quotient.
De plus, comme $|z|$ est un réel positif, son module est égal à sa valeur absolue et est donc égal à $|z|$.

4°) Propriétés de stabilité

Énoncés :

P_6 : $\forall(z,z')\in U^2 \quad zz'\in U$

On dit que U est stable par produit c'est-à-dire que le produit de deux éléments quelconques de U est encore dans U.

On peut généraliser cette propriété de stabilité à un produit quelconque d'éléments de U.

P_7 : $\forall z\in U \quad \dfrac{1}{z}\in U$

On dit que U est stable par passage à l'inverse c'est-à-dire que l'inverse d'un élément quelconque de U est encore dans U.

$$\boxed{P_8 : \forall z \in U \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad z^n \in U}$$

$$\boxed{P_9 : \forall (z, z') \in U^2 \quad \frac{z}{z'} \in U}$$

Démonstrations :

P_6 : Soit z et z' deux éléments quelconques de U.

Démontrons que $zz' \in U$.

On sait que $|zz'| = |z| \times |z'|$.

Or $(z, z') \in U^2$ d'où $|z| = 1$ et $|z'| = 1$.

Donc $|zz'| = 1 \times 1 = 1$

Par suite, $zz' \in U$.

On en déduit que U est stable par produit.

P_7 : $\forall z \in U \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$

P_8 :
La démonstration se fait très facilement en utilisant la propriété du module d'une puissance d'un nombre complexe.

Commentaire :

U est stable pour la multiplication des nombres complexes mais pas pour l'addition.
Il est possible de trouver des éléments de U dont la somme ne soit pas dans U. Par exemple, on peut prendre 1 et i.

VI. Racines carrées d'un nombre complexe

Appendice :

Inégalité triangulaire

Dans le cours, nous avons donné une démonstration géométrique.

Nous allons donner une démonstration algébrique.

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

On va rester avec z et z' tout le temps sans repasser à la forme algébrique.

$|z + z'| \geqslant 0$ et $|z| + |z'| \geqslant 0$

Pour démontrer l'inégalité, on peut comparer les carrés des deux membres.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z') \times \left(\overline{z + z'}\right) \\ &= |z|^2 + \underbrace{z\overline{z'} + z'\overline{z}} + |z'|^2 \end{aligned}$$

conjugués ; on utilise la propriété $Z + \overline{Z} = 2\,\mathrm{Re}\,Z$ pour tout nombre complexe Z

$$= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$$

On a le droit d'écrire ainsi Re … *dans un calcul.*

$$\begin{aligned} \left(|z| + |z'|\right)^2 &= |z|^2 + 2|z| \times |z'| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z| \times \left|\overline{z'}\right| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| + |z'|^2 \end{aligned}$$

Lemme : $\forall Z \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}Z \leqslant |Z|$ et $\mathrm{Im}\,Z \leqslant |Z|$ (démonstration évidente en revenant à la forme algébrique)

En appliquant ce lemme, on obtient $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|z\overline{z'}\right|$.

Donc $2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant 2\left|z\overline{z'}\right|$.

On en déduit que $|z + z'|^2 \leqslant \left(|z| + |z'|\right)^2$.

D'où $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

***Conséquence :* module d'une différence**

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z - z'|}$$

Remarque :

$|z| - |z'|$ est un réel donc $\big|\,|z| - |z'|\,\big|$ désigne la valeur absolue de $|z| - |z'|$.

Démonstration :

On a : $|z| = |(z - z') + z'|$ donc d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|z| \leqslant |z - z'| + |z'|$.
Par suite, $|z| - |z'| \leqslant |z - z'| \quad (1)$.

On a : $|z'| = |(z' - z) + z|$ donc d'après l'inégalité triangulaire, on a : $|z'| \leqslant |z' - z| + |z|$.
Par suite, $|z'| - |z| \leqslant |z - z'| \quad (2)$ [en effet, $|z' - z| = |z - z'|$].

(1) et (2) donnent $-|z - z'| \leqslant |z| - |z'| \leqslant |z - z'|$.

On en déduit que $\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leqslant |z - z'|$.