TS

Exercices sur les probabilités conditionnelles

$\boxed{1}$ On lance une fois un dé truqué. On note le numéro de la face supérieure. L'expérience est modélisée par la loi de probabilité *P* donnée dans le tableau ci-dessous :

Résultats possibles	1	2	3	4	5	6
Probabilités	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,3

Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que c'est un multiple de 3.
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible. On nommera deux événements.

$\boxed{2}$ Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, *P*) tels que $P(\text{A}) = 0{,}4$, $P(\text{B}) = 0{,}1$ et $P(\text{B}/\text{A}) = 0{,}05$.
Calculer $P(\text{A} \cap \text{B})$ et $P(\text{A}/\text{B})$. Donner les résultats sous forme décimale.

$\boxed{3}$ Un échantillon de personnes comprend 55 % d'hommes et 45 % de femmes. Pour cet échantillon, 25 % des hommes et 10 % des femmes pratiquent un sport.
On interroge au hasard une personne de cet échantillon.
1°) On considère les événements S : « la personne pratique un sport » et F : « la personne est une femme ».
On adopte le modèle d'équiprobabilité.
Faire un arbre de probabilité avec ces événements et leurs contraires ; compléter en mettant les probabilités correspondantes en utilisant les indications de l'énoncé au-dessus des branches.
2°) Calculer la probabilité que la personne interrogée pratique un sport.
Donner le résultat sous forme décimale.

$\boxed{4}$ On dispose d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » en un lancer soit égale à $\frac{2}{3}$.
On dispose également de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 5 boules rouges et 4 boules noires.
L'urne U_2 contient 3 boules rouges et 2 boules noires.
On lance la pièce une fois. Si elle tombe sur « pile », on choisit une boule au hasard dans l'urne U_1 ; si elle tombe « face », on choisit une boule au hasard dans l'urne U_2.
1°) Faire un arbre de probabilités en nommant deux événements.
2°) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge. Donner le résultat en fraction irréductible.

$\boxed{5}$ Dans une population donnée, 15 % des individus sont atteints par une maladie M_1. Parmi ces derniers, 20 % ont aussi la maladie M_2. Parmi les individus non atteints par M_1, 4 % ont la maladie M_2.
On choisit un individu au hasard.
1°) Faire un arbre de probabilités.
2°) Calculer la probabilité que cet individu soit atteint par la maladie M_2.
Donner le résultat en écriture décimale.

$\boxed{6}$ Une urne U_1 contient *n* boules blanches et 10 boules noires $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.
Une urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.
On tire au hasard une boule dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2. On tire ensuite une boule dans l'urne U_2.
1°) Faire un arbre de probabilités. Pour trouver les valeurs des probabilités conditionnelles, on raisonnera sur la composition de l'urne U_2 après le tirage dans l'urne U_1.
2°) Calculer la probabilité p_n pour que la deuxième boule soit blanche.
3°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

$\boxed{7}$ **Test médical**

On suppose qu'un sujet, venant consulter dans un service hospitalier donné, a la probabilité 0,3 d'être atteint d'une certaine maladie.
Chaque sujet subit un test.
On sait que :
- si un sujet n'est pas malade, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative ;
- s'il est malade, 8 fois sur 10 la réponse est positive.

1°) Faire un arbre de probabilités avec les événements M : « Le sujet est malade » et T : « Le test est positif ».
2°) Quelle est la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test ?
Donner le résultat sous forme décimale.
3°) Si le test est positif, quelle est la probabilité que le sujet soit malade ?
Donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$\boxed{8}$ Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique. Il dispose d'un répondeur. Lorsque l'artisan est absent, il branche systématiquement le répondeur ; lorsqu'il est présent, il le branche une fois sur trois (on suppose que, lorsque l'artisan a branché son répondeur, il ne répond pas).
Lorsqu'un client téléphone, il tombe quatre fois sur cinq sur le répondeur.
Un client téléphone à l'artisan.
On définit les événements A : « L'artisan est présent » et R : « Le client obtient le répondeur ».
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.
1°) Faire un arbre de probabilités.
Calculer la probabilité de A.
2°) Sachant que le client obtient le répondeur, déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

$\boxed{9}$ Une étude statistique sur un groupe de sportifs a permis d'estimer qu'en période de compétition, pour un sportif pris au hasard dans ce groupe, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle anti-dopage est 0,02. La prise d'un médicament peut influencer le résultat du contrôle.
Ce médicament est pris par 25 % des sportifs du groupe.
Pour un sportif qui utilise ce médicament, la probabilité d'être déclaré positif est 0,05.
Faire un arbre de probabilités avec les événements M : « Le sportif utilise le médicament » et T : « Le sportif est déclaré positif ». On notera *x* la probabilité de T sachant $\overline{\text{M}}$.
Déterminer la valeur de *x*.

La valeur 0,05 donnée dans l'énoncé peut sembler très faible. Elle est néanmoins en accord avec la réalité. En général, les produits dopants sont fabriqués de telle sorte que la concentration restante dans le sang dans le sang soit très faible.

$\boxed{10}$ La proportion de pièces défectueuses dans un lot est égale à 0,04.
Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :
- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité de 0,97 ;
- si elle est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

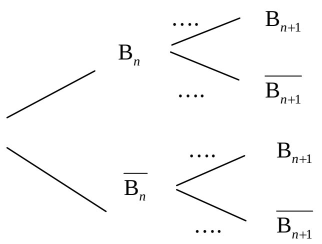
On prend au hasard une pièce et on la contrôle.
1°) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle. Donner le résultat sous forme décimale.
2°) Calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

11 On lance une fois un dé non truqué. On considère les événements A : « obtenir un numéro pair » et B : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 ».
Les événements sont-ils indépendants ?

12 Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé (Ω, P) tels que $P\left(\text{A}\right)=0{,}1$ et $P\left(\text{B}\right)=0{,}5$.
Calculer $P(\text{A}\cup\text{B})$. Donner le résultat sous forme décimale.

13 Deux chasseurs tirent simultanément sur une cible. Le premier a 80 % de chances de l'atteindre ; le deuxième a 70 % de chances de l'atteindre.
Quelle est la probabilité
1°) que la cible soit atteinte par au moins l'un des deux chasseurs ?
2°) qu'aucun chasseur n'atteigne la cible ?
Indication : Considérer les événements A : « le premier chasseur atteint la cible » et B : « le deuxième chasseur atteint la cible ». On notera que les événements A et B sont indépendants.
Donner chaque résultat sous forme décimale.

14 Dans un pays imaginaire, à la suite d'un dérèglement climatique, le temps évolue de la manière suivante.
On admet qu'un jour donné soit il fait beau, soit il pleut.
S'il fait beau un jour, alors il fera beau le jour suivant avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$. S'il pleut un jour, alors il pleuvra encore le lendemain avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$.
Aujourd'hui, il pleut. On s'intéresse à la probabilité qu'il fasse beau demain, dans 2 jours, dans 3 jours … dans n jours.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on désigne par B_n l'événement « il fera beau le n-ième jour ».
1°) Donner, pour $n\geqslant 1$, les valeurs de $P\left(\text{B}_{n+1}/\text{B}_n\right)$ et $P\left(\text{B}_{n+1}/\overline{\text{B}_n}\right)$.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en écrivant les valeurs des probabilités à la place des pointillés (on ne mettra rien sur les deux branches qui partent du nœud de base).



2°) Établir que, pour $n\geqslant 1$, on a : $P\left(\text{B}_{n+1}\right)=\dfrac{1}{6}P\left(\text{B}_n\right)+\dfrac{1}{3}$.
3°) On pose désormais $p_n=P\left(\text{B}_n\right)$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.
D'après la question précédente, on a $p_{n+1}=\dfrac{1}{6}p_n+\dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.
Le but de la question est de déterminer l'expression de p_n en fonction de n puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour cela, on pose $u_n=p_n-\dfrac{2}{5}$.
a) Déterminer la nature de la suite $\left(u_n\right)$.
b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n\geqslant 1$.
c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

15 Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires.
On tire une boule au hasard dans l'urne puis, sans la remettre dans l'urne, on en tire une deuxième au hasard.
Calculer la probabilité des événements suivants en utilisant les probabilités conditionnelles (faire un arbre de probabilité) :
A : « les deux boules sont blanches » ;
B : « les deux boules sont noires » ;
C : « les deux boules sont de la même couleur » ;
D : « les deux boules sont de couleurs différentes ».
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

16 Une urne contient deux boules rouges et deux boules noires.
On tire successivement deux boules avec remise.
Calculer la probabilité des événements suivants en utilisant les probabilités conditionnelles (faire un arbre de probabilité) :
A : « obtenir deux boules de la même couleur » et B : « obtenir au moins une boule rouge ».

17 Un sac contient 5 jetons marqués avec les lettres M, A, R, I, E. On tire deux jetons au hasard successivement sans remise.
Calculer la probabilité des événements suivants en utilisant les probabilités conditionnelles (faire un arbre de probabilité) :
E_1 : « obtenir deux voyelles » ;
E_2 : « obtenir deux consonnes » ;
E_3 : « obtenir une voyelle et une consonne (dans n'importe quel ordre) ».
Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

18 **Modèle élémentaire de diffusion d'une épidémie : l'urne à la Polya**

a, b, n sont des entiers naturels fixés supérieurs ou égaux à 1.
Une urne contient a boules blanches et b boules noires (virus de deux types).
On tire une boule au hasard. On note sa couleur (on est contaminé par le virus correspondant).
On la remet dans l'urne avec n boules de la même couleur c'est-à-dire que :
- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et l'on ajoute n boules blanches ;
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et l'on ajoute n boules noires.
On tire à nouveau une boule au hasard dans l'urne.
1°) Faire un arbre de probabilité avec les événements suivants :
B_1 : « la boule obtenue au premier tirage est blanche » ;
N_1 : « la boule obtenue au premier tirage est noire » ;
B_2 : « la boule obtenue au deuxième tirage est blanche » ;
N_2 : « la boule obtenue au deuxième tirage est noire ».
2°) Calculer $P\left(\text{B}_2\right)$ (ne pas développer mais factoriser) ; comparer avec $P\left(\text{B}_1\right)$.
Indication : Raisonner sur la composition de l'urne au deuxième tirage.

Corrigé

1 N.B. On ne peut pas trouver cette probabilité conditionnelle de manière intuitive car on n'est pas dans une situation d'équiprobabilité.

On utilise la définition : $P(\text{A} / \text{B}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

(On applique la formule sans se poser de question sur le « sachant que » dans cette situation).

Solution détaillée :

Calculons la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que c'est un multiple de 3.

On définit les événements A : « le numéro obtenu est pair » et B : « le numéro obtenu est un multiple de 3 ».

On cherche $P(\text{A} / \text{B})$.

Pour décrypter la question, il faut faire une analyse grammaticale de la phrase.

Calculer la probabilité d'$\underbrace{\textbf{obtenir un numéro pair}}_{\text{A}}$ $\boxed{\text{sachant que}}$ $\underbrace{\textbf{c'est un multiple de 3}}_{\text{B}}$.

On va donc appliquer la formule $P(\text{A} / \text{B}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

Il faut donc calculer $P(\text{B})$ et $P(\text{A} \cap \text{B})$.

$P(\text{B}) = P(3) + P(6) = 0{,}4$

Pour calculer la probabilité de $\text{A} \cap \text{B}$, il n'y a pas de formule.
On va d'abord définir A ∩ B puis on cherche les résultats qui correspondent à cet événement.

A ∩ B : « obtenir un numéro pair <u>et</u> multiple de 3 »
Un seul résultat correspond à A ∩ B : 6.

$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(6) = 0{,}3$

$P(\text{A} / \text{B}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = \dfrac{3}{4}$

On peut aussi écrire : $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{3}{4}$.

2

On utilise la formule des probabilités composées.

Solution détaillée :

$P(\text{A}) = 0{,}4 \qquad P(\text{B}) = 0{,}1 \qquad P(\text{B} / \text{A}) = 0{,}05$

Calculons P (A ∩ B) et P (A / B).

$$\begin{aligned} P(\text{A} \cap \text{B}) &= P(\text{A}) \times P(\text{B} / \text{A}) \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\ &= 0{,}4 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{A} / \text{B}) &= \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})} \quad \text{(formule de définition de la probabilité conditionnelle)} \\ &= \frac{0{,}02}{0{,}1} \\ &= 0{,}2 \end{aligned}$$

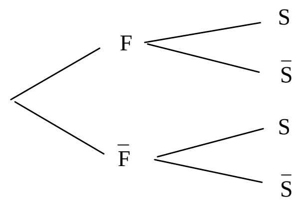
3

1°) **Arbre de probabilités**

Inutile de définir les événements $\overline{\text{F}}$ et $\overline{\text{S}}$ contraires de F et S.

S : « la personne pratique un sport »

F : « la personne est une femme »



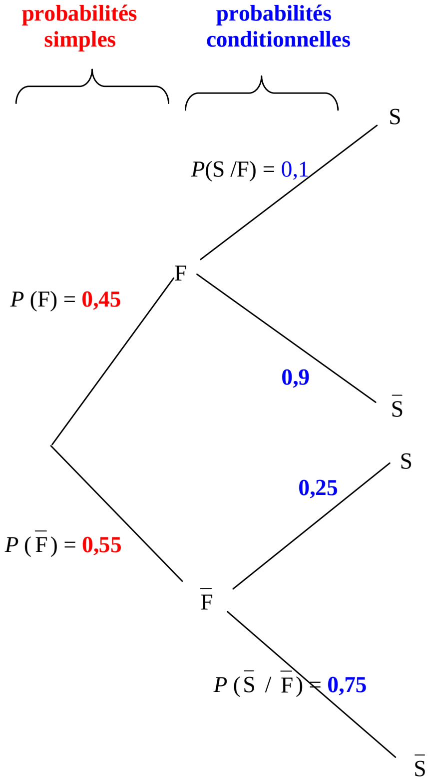
Compléter avec les probabilités écrites sous forme décimale (lorsque les probabilités sont calculées à partir de pourcentages, on donne les résultats sous forme décimale).

$P(\text{F}) = \dfrac{45}{100} = 0{,}45$

$P(\overline{\text{F}}) = 0{,}55$

$P(\text{S} / \overline{\text{F}}) = 0{,}25$

$P(\text{S} / \text{F}) = 0{,}1$



Attention à la lecture de l'énoncé :

● L'énoncé dit : « Un échantillon de personnes comprend 55 % d'hommes et 45 % de femmes. »
Ces deux informations fournissent des **probabilités simples**.

● L'énoncé dit : « Pour cet échantillon, 25 % des hommes et 10 % des femmes pratiquent un sport. »
Ces deux informations fournissent des **probabilités conditionnelles**.

2°) **Calculons la probabilité que la personne interrogée pratique un sport.**

On écrit que les événements F et $\overline{F}$ constituent un système complet d'événements et l'on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(S) &= P(S \cap F) + P(S \cap \overline{F})\\ &= \underline{P(F)} \times \underline{P(S / F)} + \underline{P(\overline{F})} \times \underline{P(S / \overline{F})}\\ &= 0,45 \times 0,1 + 0,55 \times 0,25\\ &= 0,1825\end{aligned}$$

La probabilité que la personne interrogée pratique un sport est égale à 0,1825.

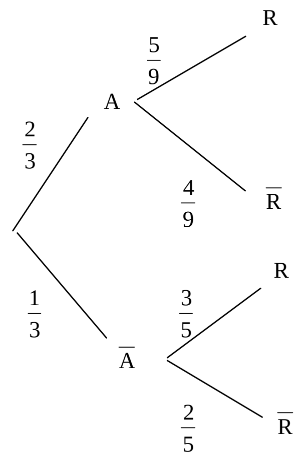
L'événement « la personne pratique un sport » est la réunion des événements
« la personne pratique un sport <u>et</u> est une femme » et « la personne pratique un sport <u>et</u> est un homme ».

$\boxed{4}$

1°) **Arbre de probabilités**

A : « la pièce tombe sur pile »
R : « la boule tirée est rouge »

On effectue un arbre dans lequel on met les probabilités sous forme fractionnaire.



2°) **Calculons la probabilité d'obtenir une boule rouge.**

Les événements A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(R) &= P(R \cap A) + P(R \cap \overline{A})\\ &= P(A) \times P(R / A) + P(\overline{A}) \times P(R / \overline{A})\\ &= \frac{2}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}\\ &= \frac{77}{135}\end{aligned}$$

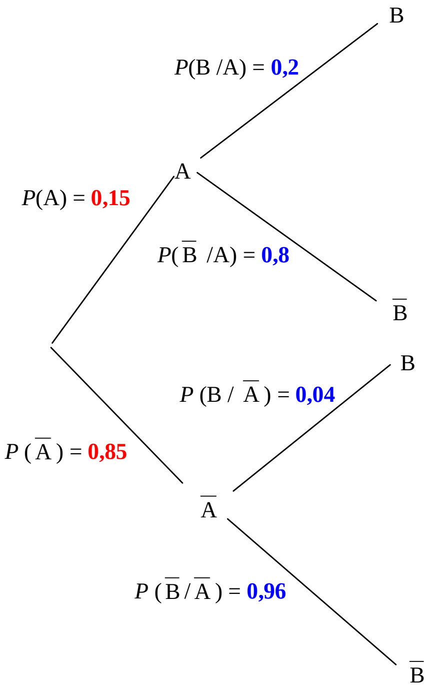
La probabilité que la boule tirée soit rouge est égale à $\frac{77}{135}$.

Si la pièce était non truquée, on obtiendrait $P(R) = \frac{1}{6} = 0,16\underline{6}...$.
Cette probabilité est beaucoup plus faible que dans le cas de la pièce truquée considérée dans l'énoncé.

5

1°) On définit les événements

A : « l'individu est atteint par la maladie M_1 » ;
B : « l'individu est atteint par la maladie M_2 »



2°) Les événements A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(A) \times P(B/A) + P(\overline{A}) \times P(B/\overline{A}) \\ &= 0,15 \times 0,2 + 0,85 \times 0,04 \\ &= 0,064 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(B) = 0,064$

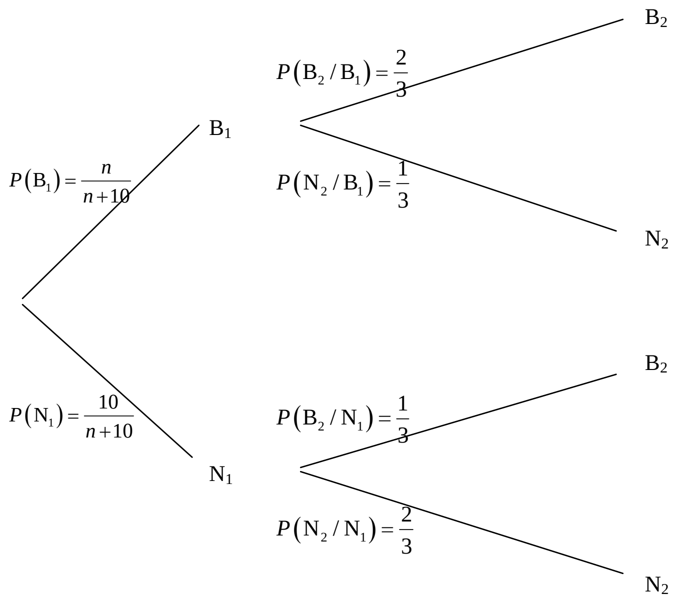
6

Thème de l'exercice : urne de composition variable ou urne à composition évolutive

1°) Définir les événements

- B_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est blanche »
- N_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est noire »
- B_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est blanche »
- N_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est noire »

On adopte le modèle d'équiprobabilité ; réfléchir pour les probabilités conditionnelles que l'on doit mettre dans l'arbre.



Remarque : Pourquoi on « fait » 4 événements ?
On pourrait n'en « faire » que 2 (avec les contraires).
C'est bon avec 2.
Mais c'est plus parlant avec B_1, N_1, B_2, N_2.

Si on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

Si on a tiré une boule noire dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 2 boules noires.

On notera que dans les deux cas, l'urne U_2 contient toujours 3 boules.

2°) **Calculons la probabilité p_n pour que la deuxième boule soit blanche.**

On doit calcul $p_n = P(B_2)$.

Les événements B_1 et N_1 constituent un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p_n &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) \\ &= P(B_1) \times P(B_2/B_1) + P(N_1) \times P(B_2/N_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{n}{n+10} + \frac{1}{3} \times \frac{10}{n+10} \\ &= \frac{2n+10}{3(n+10)} \end{aligned}$$

3°) **Déterminons $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.**

1ère méthode :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+10}{3(n+10)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$ (règle de la limite d'une fonction rationnelle en + ∞)

2e méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \frac{2n+10}{3(n+10)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \frac{2\cancel{n}\left(1+\frac{5}{n}\right)}{3\cancel{n}\left(1+\frac{10}{n}\right)} = \frac{2}{3} \times \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{10}{n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{10}{n}} = 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \frac{2n+10}{3(n+10)} = \frac{2}{3}$$

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Lorsque le nombre de boules blanches tend vers + ∞, la probabilité de tirer une boule blanche au 2e tirage tend vers $\frac{2}{3}$.

Comment peut-on expliquer le résultat ?

Lorsque le nombre de boules blanches n dans l'urne U_1 tend vers + ∞, on est quasiment sûr de tirer une boule blanche dans l'urne U_1 et ainsi, on est quasiment sûr de tirer une boule blanche dans une urne qui contient 2 boules blanche et une probabilité de tirer une boule blanche au 2e tirage tend vers $\frac{2}{3}$.

Version plus simple du $\boxed{6}$:

Une urne U_1 contient n boules blanches et 10 boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$).
Une urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire.
On tire au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans l'urne U_2. On tire ensuite une boule dans l'urne U_2.
1°) Faire un arbre de probabilités à l'aide des événements
- B_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est blanche »
- N_1 : « la boule tirée au premier tirage dans l'urne U_1 est noire »
- B_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est blanche »
- N_2 : « la boule tirée au deuxième tirage dans l'urne U_2 est noire »

Si on a tiré une boule blanche dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient …….. boules blanches et …….. boule noire.

Si on a tiré une boule noire dans l'urne U_1, alors cette boule est placée dans l'urne U_2.
Donc l'urne U_2 contient …….. boule blanche et …….. boules noires.

2°) Calculer la probabilité p_n pour que cette dernière boule soit blanche.
3°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

$\boxed{7}$

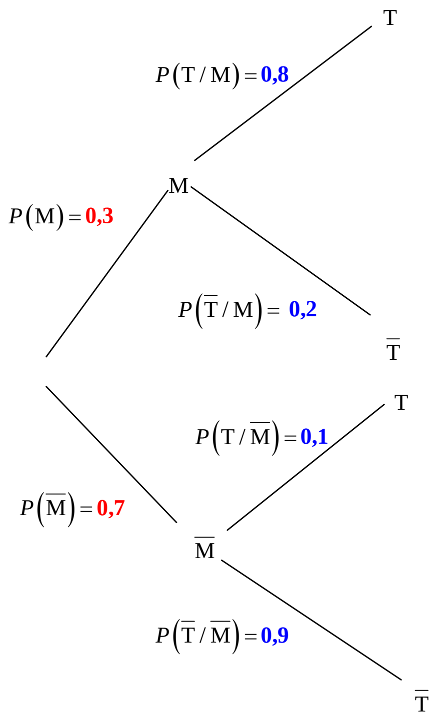
1°) Faire un arbre en faisant figurer les probabilités sous forme décimale.
2°) $P(T) = 0{,}31$
3°) $P(M/T) = \frac{24}{31}$

Solution détaillée :

1°) **Arbre pondéré**

M : « Le sujet est malade »

T : « Le test est positif »



2°) **Calculons la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test.**

Les événements M et $\overline{\text{M}}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\text{T}) &= P(\text{T} \cap \text{M}) + P(\text{T} \cap \overline{\text{M}}) \\ &= P(\text{M}) \times P(\text{T}/\text{M}) + P(\overline{\text{M}}) \times P(\text{T}/\overline{\text{M}}) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}31 \end{aligned}$$

Conclusion :

La probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test est égal à 0,31.

3°) **Calculons la probabilité que le sujet est malade sachant que le test est positif.**

La question consiste à retourner l'arbre de probabilités.

D'après la définition du cours, donc $P(\text{M}/\text{T}) = \dfrac{P(\text{M} \cap \text{T})}{P(\text{T})}$

$$\begin{aligned} &= \frac{0{,}3 \times 0{,}8}{0{,}31} \\ &= \frac{24}{31} \end{aligned}$$

Il est intéressant dans ce type d'exercice de calculer la probabilité d'un faux-positif ou d'un faux-négatif.

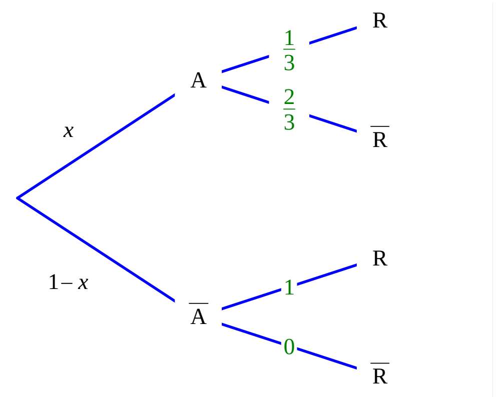
8

Il faut bien lire l'énoncé pour le traduire en probabilités : $P(\text{R}) = \dfrac{4}{5}$; $P(\text{R}/\overline{\text{A}}) = 1$; $P(\text{R}/\text{A}) = \dfrac{1}{3}$ (les deux dernières probabilités sont des probabilités conditionnelles).

1°) **Calculons $P(\text{A})$.**

On pose $P(\text{A}) = x$. On a alors $P(\overline{\text{A}}) = 1 - x$ (formule $P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A})$).

On dresse un arbre de probabilités.



En général, on n'écrit pas la branche qui porte la probabilité 0.

Comme la probabilité conditionnelle de $\overline{\text{R}}$ sachant $\overline{\text{A}}$ est nulle, il est possible d'omettre la branche $\overline{\text{A}}$ - $\overline{\text{R}}$.

On utilise la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(\text{R}) &= P(\text{R} \cap \text{A}) + P(\text{R} \cap \overline{\text{A}}) \\ &= P(\text{R}/\text{A}) \times P(\text{A}) + P(\text{R}/\overline{\text{A}}) \times P(\overline{\text{A}}) \end{aligned}$$

Compte tenu des probabilités données dans l'énoncé, cette dernière égalité donne : $\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{3} \times x + 1 \times (1 - x) \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{x}{3} + 1 - x$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} = 1 - \frac{2}{3}x$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 1 - \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$

Donc $P(\mathrm{A}) = \frac{3}{10}$.

2°) **Déterminons la probabilité que l'artisan soit présent sachant que le client obtient le répondeur.**

On cherche $P(\mathrm{A}/\mathrm{R})$.

On utilise la formule de définition d'une probabilité conditionnelle.

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{R}) = \frac{P(\mathrm{R} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{R})}$$

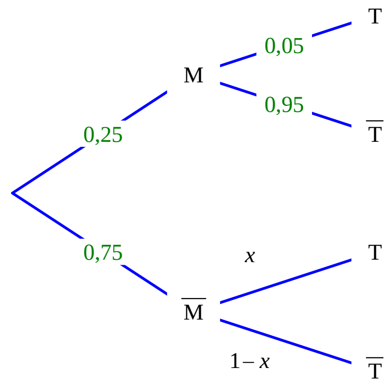
$$= \frac{\frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{10}}{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1}{2 \times 4} \quad \text{(simplification du 5 et du 10)}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$\boxed{9}$



Les événements M et $\overline{\mathrm{M}}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a : $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}) = P(\mathrm{T}) \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 0,25 \times 0,05 + 0,75x = 0,02$

$\Leftrightarrow 0,0125 + 0,75x = 0,02$

$\Leftrightarrow 0,75x = 0,0075$

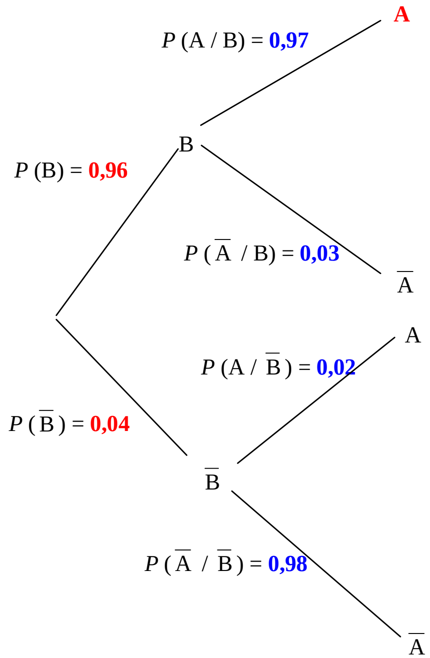
$\Leftrightarrow x = \frac{0,0075}{0,75}$

$\Leftrightarrow x = 0,01$

10

On considère les événements

A : « la pièce est acceptée » ;
B : « la pièce est bonne ».



1°) **Calculons la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.**

On note E l'événement : « Il y a une erreur de contrôle ».
Il y a une erreur de contrôle dans les deux cas suivants :
- la pièce est défectueuse et a été acceptée ;
- la pièce n'est pas défectueuse et n'a pas été acceptée.

La probabilité de E est égale à la probabilité que la pièce soit bonne et refusée plus la probabilité que la pièce soit mauvaise et acceptée (attention à la formulation, il s'agit bien de « et » qui se traduisent par des intersections et non de « sachant »).

$$E = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

Les événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles (car A et $\overline{A}$ sont incompatibles ou B et $\overline{B}$ sont incompatibles).
Une pièce ne peut être à la fois
- défectueuse et acceptée
et
- non défectueuse et rejetée

(C'est du simple bon sens).

$$\begin{aligned} P(E) &= P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= P\left(A/\overline{B}\right) \times P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}/B\right) \times P(B) \\ &= 0,02 \times 0,04 + 0,03 \times 0,96 \\ &= 0,0296 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est égale à 0,0296.
On remarquera que cette probabilité est assez faible.

2°) **Calculons la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.**

Le texte demande : « calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise ».
On regarde parmi les pièces acceptées celles qui sont mauvaises.
On doit calculer la probabilité qu'une pièce soit mauvaise sachant qu'elle a été acceptée (et pas le contraire !).

Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{B}/A\right) &= \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P(A)} \\ &= \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)} \\ &= \frac{P\left(A/\overline{B}\right) \times P\left(\overline{B}\right)}{P(A/B) \times P(B) + P\left(A/\overline{B}\right) \times P\left(\overline{B}\right)} \\ &= \frac{0,04 \times 0,02}{0,932} \\ &= \frac{0,0008}{0,932} \\ &= \frac{8}{9320} \\ &= \frac{1}{1165} \end{aligned}$$

La probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise est égale à $\frac{1}{1165}$.

On calcule à part $P(A) = 0,96 \times 0,97 + 0,04 \times 0,02 = 0,932$ grâce à la formule des probabilités totales (principe de séparation des calculs).

11

A : « obtenir un numéro pair »

B : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 »

Cherchons si les événements A et B sont indépendants.

L'univers des possibles est $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

Il faut dire que l'on est dans un cas d'équiprobabilité.

On modélise l'expérience aléatoire par la loi d'équiprobabilité *P*.

1ère méthode :

$\text{A} = \{2\,;4\,;6\}$

$P(\text{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{B} = \{1\,;2\,;3\,;4\}$

$P(\text{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A ∩ B : « obtenir un numéro pair inférieur ou égal à 4. »

$\text{A} \cap \text{B} = \{2\,;4\}$ (accolades d'ensembles)

$P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (l'événement A ∩ B est constitué de deux issues)

$P(\text{A}) \times P(\text{B}) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}$ donc **A et B sont indépendants** pour la loi *P*.

Ce résultat ne découle pas du bon sens, il n'y a que le calcul qui nous le montre.

2e méthode :

$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (parmi les 4 numéros inférieurs ou égaux à 4, il y en a 2 qui sont pairs) et $P(\text{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On constate que $P(\text{A}/\text{B}) = P(\text{A})$. Par suite, A et B sont indépendants pour la loi *P*.

Même raisonnement avec $P(\text{B}/\text{A}) = \frac{2}{3}$ et $P(\text{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

12

A et B sont deux événements indépendants d'un espace probabilisé (Ω, *P*).

$P(\text{A}) = 0{,}1$

$P(\text{B}) = 0{,}5$

Calculons *P*(A ∪ B).

On a : $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$.

Or A et B sont indépendants pour la probabilité *P* par hypothèse (on est obligé de le réécrire dans la solution au moment où on l'utilise) donc $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

Par suite, $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A}) \times P(\text{B})$

$$= 0{,}1 + 0{,}5 - 0{,}1 \times 0{,}5$$
$$= 0{,}6 - 0{,}05$$
$$= \mathbf{0{,}55}$$

13

A : « le premier chasseur atteint la cible »

B : « le deuxième chasseur atteint la cible »

D'après les informations de l'énoncé :

- $P(\text{A}) = 0{,}8$
- $P(\text{B}) = 0{,}7$
- A et B sont indépendants

1°) **Calculons la probabilité que la cible soit atteinte par au moins l'un des deux chasseurs.**

On considère l'événement **E : « la cible est atteinte par au moins l'un des deux chasseurs ».**

L'événement E est réalisé lorsque :
- le 1er chasseur atteint la cible et le 2e chasseur n'atteint pas la cible ;
- le 1er chasseur n'atteint pas la cible et le 2e chasseur atteint la cible ;
- le 1er chasseur atteint la cible et le 2e chasseur atteint la cible.

Dans les deux premiers cas, la cible est atteinte par un seul des deux chasseurs ; dans le 3e cas, la cible est atteinte par les deux chasseurs.
Dans tous les cas, la cible est atteinte soit par 1 soit par 2 chasseurs donc par au moins un chasseur.

L'événement E est la réunion des événements A et B.

$\text{E} = \text{A} \cup \text{B}$
Donc $P(\text{E}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$ (formule toujours valable).

Or A et B sont des événements indépendants (pour P).
Donc $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$.

$P(\mathrm{E})=0,8+0,7-0,8\times0,7$
$\quad=$ **0,94**

2°) **Calculons la probabilité que la cible ne soit atteinte par aucun chasseur.**

F : « aucun chasseur n'atteint la cible »

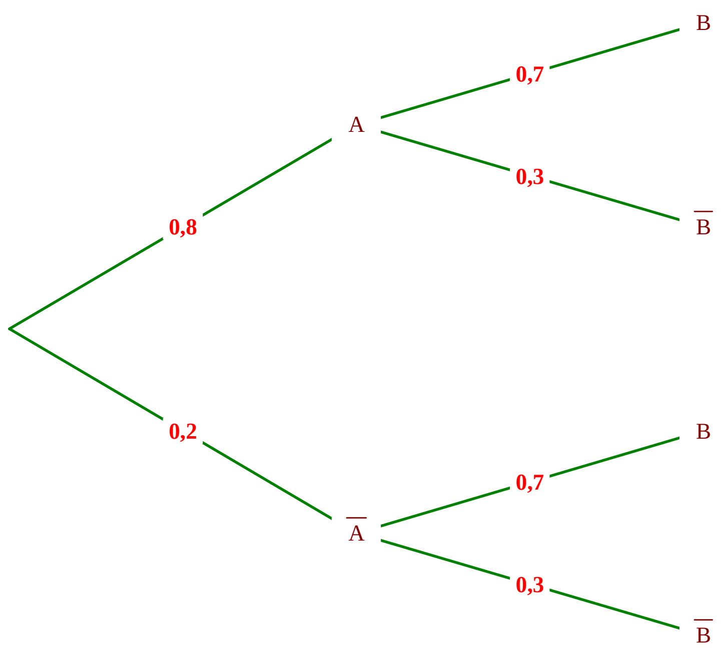
F est l'événement contraire de E.
$\mathrm{F}=\overline{\mathrm{E}}$

$P(\mathrm{F})=P(\overline{\mathrm{E}})$
$\quad=1-P(\mathrm{E})$
$\quad=0,06$

Commentaire :

La difficulté dans ce type d'exercice est d'exprimer les événements E et F en fonction des événements A et B.

Autre méthode pour la question 2°) : indépendance des événements contraires.



$\mathrm{F}=\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$

Comme A et B sont indépendants, $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

Donc $P(\mathrm{F})=P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$
$\quad=P(\overline{\mathrm{A}})\times P(\overline{\mathrm{B}})$
$\quad=0,2\times0,3$
$\quad=0,06$

On peut alors retrouver le résultat de la question 1°) (probabilité de l'événement contraire).

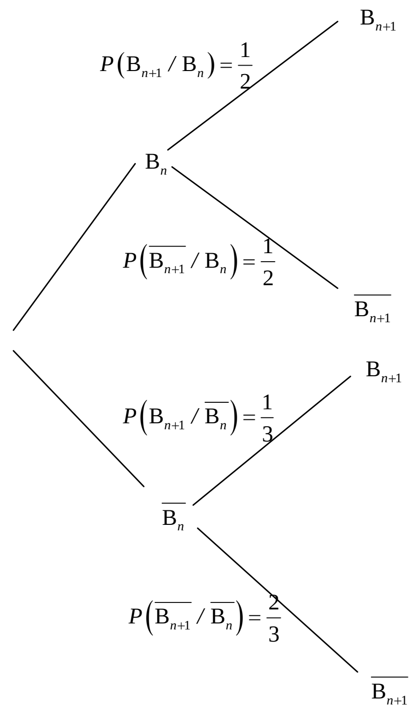
$\boxed{\textbf{14}}$

B_n : « Il fait beau le n-ième jour » $(n\geqslant1)$

1°) **Arbre de probabilités**

$P(\mathrm{B}_{n+1}/\mathrm{B}_n)=\dfrac{1}{2}$

$P(\mathrm{B}_{n+1}/\overline{\mathrm{B}_n})=\dfrac{1}{3}$



2°) **Démontrons que $P\left(B_{n+1}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}P\left(B_n\right)$.**

B_n et $\overline{B_n}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P\left(B_{n+1}\right)=P\left(B_{n+1}\cap B_n\right)+P\left(B_{n+1}\cap \overline{B_n}\right)$.

(en effet, pour tout événement A, on a $P\left(B_{n+1}\right)=P\left(B_{n+1}\cap A\right)+P\left(B_{n+1}\cap \overline{A}\right)$; on choisit ici $A=B_n$)

$$=P\left(B_n\right)\times P\left(B_{n+1}/B_n\right)+P\left(\overline{B_n}\right)\times P\left(B_{n+1}/\overline{B_n}\right)$$
$$=P\left(B_n\right)\times\frac{1}{2}+P\left(\overline{B_n}\right)\times\frac{1}{3}$$
$$=P\left(B_n\right)\times\frac{1}{2}+\left[1-P\left(B_n\right)\right]\times\frac{1}{3}$$

(en effet, d'après la règle donnant la probabilité d'un événement contraire, pour tout événement A, on a :
$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$; on choisit ici $A=B_n$)

$$=P\left(B_n\right)\times\frac{1}{2}+\left[1-P\left(B_n\right)\right]\times\frac{1}{3}$$

$$\boxed{P\left(B_{n+1}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}P\left(B_n\right)}$$

3°) **Étude de la suite $\left(p_n\right)$ au moyen d'une suite auxiliaire**

On a : $P\left(B_n\right)=p_n$ et $P\left(B_{n+1}\right)=p_{n+1}$.

Donc $p_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}p_n$ (relation de récurrence pour la suite $\left(p_n\right)$)

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=p_n-\frac{2}{5}$

a) **Déterminons la nature de la suite $\left(u_n\right)$.**

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{2}{5}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}p_n-\frac{2}{5}$$
$$=\frac{1}{6}p_n-\frac{1}{15}$$
$$=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{2}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{6}u_n$$

$\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{6}$.

Calculons le premier terme :

$p_1=P\left(B_1\right)=0$ car l'énoncé nous dit qu'il pleut le 1$^{\text{er}}$ jour donc l'événement B_1 (« il fait beau le 1$^{\text{er}}$ jour ») est l'événement impossible.
(S'il avait fait beau le 1$^{\text{er}}$ jour, on aurait eu : $p_1=P\left(B_1\right)=1$).

Donc $u_1=0-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}$

Conclusion :

$\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de premier terme $u_1=-\frac{2}{5}$ et de raison $q=\frac{1}{6}$.

b) **Exprimons p_n en fonction de n pour $n\geqslant 1$.**

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=u_1\times q^{n-1}=-\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

Or $u_n=p_n-\frac{2}{5}$ donc $p_n=u_n+\frac{2}{5}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\boxed{p_n=\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{6^{n-1}}\right)}$

c) **Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$ en fonction de n pour $n\geqslant 1$.**

$6>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}6^{n-1}=+\infty$

Variante :

On peut aussi écrire : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad p_n=\frac{2}{5}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right]$.

Or $-1<\frac{1}{6}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=0$ (on peut appliquer la règle même sur l'exposant est $n-1$ alors que la règle est énoncée pour un exposant égal à n).

On en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{2}{5}}$.

Conclusion :

La probabilité qu'il fasse beau le n-ième jour tend vers $\frac{2}{5}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Interprétation :

Au bout d'un très grand nombre de jours, il y aura quasiment 2 chances sur 5 qu'il fasse beau.

Les exercices **15** , **16** , **17** sont des exercices que l'on a déjà fait mais que l'on revoit avec les probabilités conditionnelles.
Dans tous les cas, il s'agit de tirages successifs sans remise.

Il s'agit de l'application des probabilités conditionnelles à des tirages successifs.
Il faut mentionner à chaque fois qu'il y a équiprobabilité.

15 Tirages successifs sans remise dans une urne

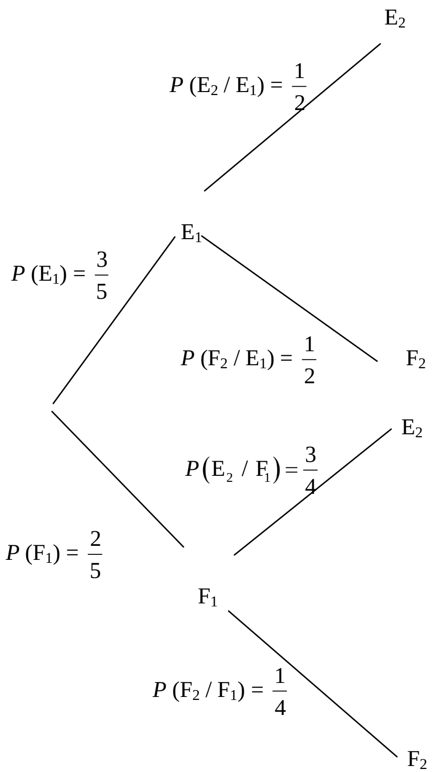
On nomme E_1, F_1, E_2, F_2 les événements définis par :

E_1 : « la première boule est blanche » ;

F_1 : « la première boule est noire » ;

E_2 : « la deuxième boule est blanche » ;

F_2 : « la deuxième boule est noire ».



On peut aussi utiliser les événements contraires.

A : « les deux boules sont blanches »

$A = E_1 \cap E_2$

Donc $P(A) = P(E_1 \cap E_2)$
$= P(E_1) \times P(E_2 / E_1)$
$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$
$= \frac{3}{10}$

Le 14-12-2015

Raphaëlle Lange le 14-12-2015

$P(A) = P(E_1 \cap E_2)$
$P(A) = P(E_1) \times P(E_2 / E_1)$

La formule $P(A) = P(E_1 \cap E_2)$
$P(A) = P(E_1) \times P(E_2 / E_1)$

La formule $P(A) = P(E_1) \times P(E_2 / E_1)$ est valable tout le temps.
Dans le cas d'événements indépendants $P(E_2 / E_1) = P(E_2)$ d'où $P(A) = P(E_1) \times P(E_2)$.

B : « les deux boules sont noires »

$B = F_1 \cap F_2$
Donc $P(B) = P(F_1 \cap F_2)$
$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{10}$

C : « les deux boules sont de la même couleur »

On peut écrire C = A ∪ B et A et B sont incompatibles.

Donc $P(C) = P(A) + P(B)$
$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$
$= \frac{2}{5}$

D : « les deux boules sont de couleurs différentes »

$\mathrm{D}=\overline{\mathrm{C}}$

Donc $P(\mathrm{D})=P\left(\overline{\mathrm{C}}\right)$
$=1-P(\mathrm{C})$
$=\dfrac{3}{5}$

$\boxed{\textbf{16}}$

Il s'agit en fait d'un schéma de Bernoulli. On pourrait donc penser qu'il n'y a pas besoin d'arbre.
Nous allons cependant en faire un et traiter l'exercice avec les probabilités conditionnelles.

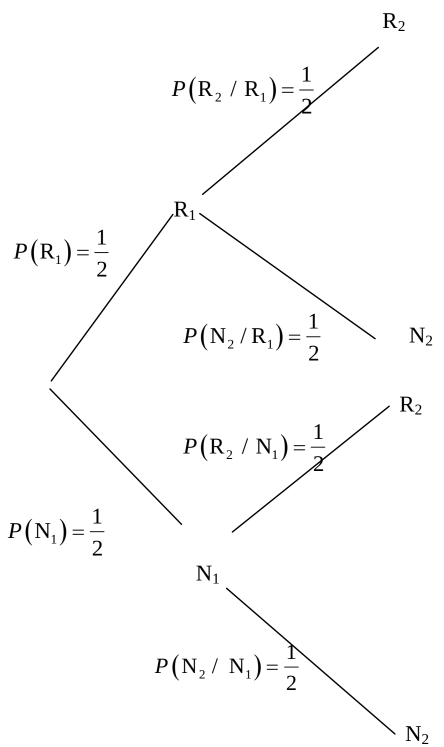
On nomme R_1, N_1, R_2, N_2 les événements définis par :

R_1 : « obtenir une boule rouge au premier tirage »

N_1 : « obtenir une boule noire au premier tirage »

R_2 : « obtenir une boule rouge au deuxième tirage »

N_2 : « obtenir une boule noire au deuxième tirage »



● Dans l'arbre, il faut bien distinguer probabilités simples et probabilités conditionnelles.
Ici, comme il y a remise, les probabilités conditionnelles sont égales aux probabilités simples.

● Une autre méthode consisterait à se raccrocher au cours sur les expériences aléatoires répétées vues da,s le cours de 1$^{\text{ère}}$. Il s'agit en fait ici d'un schéma de Bernoulli.

Question d'une élève à propos de l'arbre de probabilités (année scolaire 2015-2016) :

probas simples ? probas conditionnelles ?

A : « obtenir deux boules de la même couleur »

On a : $\mathrm{A}=(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)\cup(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{N}_2)$.
Il s'agit d'une réunion de deux événements disjoints ou incompatibles.

$P(\mathrm{A})=P(\mathrm{R}_1\cap\mathrm{R}_2)+P(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{N}_2)$
$=P(\mathrm{R}_1)\times P(\mathrm{R}_2/\mathrm{R}_1)+P(\mathrm{N}_1)\times P(\mathrm{N}_2/\mathrm{N}_1)$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{1}{2}$

B : « obtenir au moins une boule rouge »

[On peut écrire $\mathrm{B}=\mathrm{R}_1\cup\mathrm{R}_2$.]

$P(\mathrm{B})=\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)\times 3$
$=\dfrac{3}{4}$

On peut aussi utiliser l'événement contraire.

Il est inutile de considérer l'événement contraire (c'est vrai aussi, mais ça vient tout seul avec l'arbre).

$P(\mathrm{B})=1-P(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{N}_2)$
$=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$
$=1-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{17}$

Les valeurs sont les mêmes qu'à l'exercice $\boxed{15}$.

Cet exercice peut se faire avec un arbre de possibilités (c'est long à faire !) ou avec la méthode des cases.
Mais la méthode par les probabilités conditionnelles est meilleure (elle est très efficace).

5 jetons marqués M, A, R, I, E
On tire successivement deux jetons sans remise.

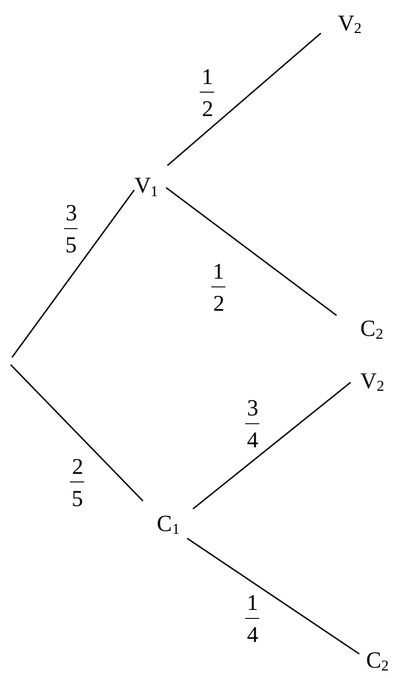
On nomme V_1, C_1, V_2, C_2 les événements ainsi définis :

V_1 : « tirer une voyelle au premier tirage »

C_1 : « tirer une consonne au premier tirage »

V_2 : « tirer une voyelle au deuxième tirage »

C_2 : « tirer une consonne au deuxième tirage »



E_1 : « obtenir deux voyelles »

$$P(E_1) = P(V_1 \cap V_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

E_2 : « obtenir deux consonnes »

$$P(E_2) = P(C_1 \cap C_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

E_3 : « obtenir une voyelle et une consonne »

1ère méthode :

$$P(E_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

2e méthode :

$$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2}$$

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) \\ &= 1 - P(E_1 \cup E_2) \\ &= 1 - P(E_1) - P(E_2) \quad \text{(car } E_1 \text{ et } E_1 \text{ sont incompatibles)} \\ &= 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

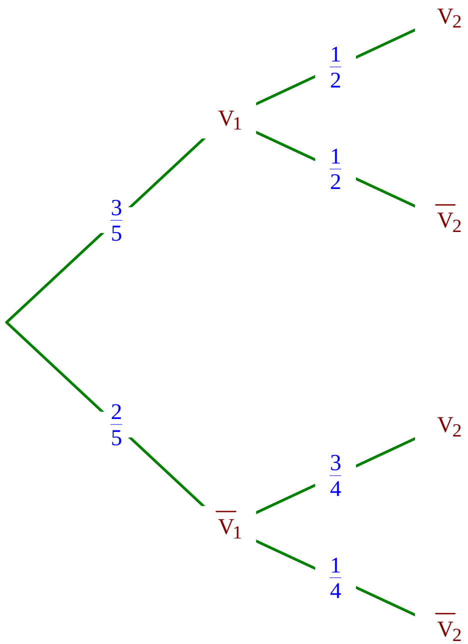
On retrouve bien le même résultat qu'avec la première méthode)

Autre version (Vincent Jacob, année scolaire 2013-2014) :

On définit les événements :

V_1 : « obtenir une voyelle au premier tirage »

V_2 : « obtenir une voyelle au deuxième tirage »



E_1 : « obtenir deux voyelles »

$$\begin{aligned}P(E_1) &= P(V_1 \cap V_2)\\ &= P(V_2/V_1)\times P(V_1)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

E_2 : « obtenir deux consonnes »

$$\begin{aligned}P(E_2) &= P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2})\\ &= P(\overline{V_2}/\overline{V_1})\times P(\overline{V_1})\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

E_3 : « obtenir une voyelle et une consonne »

$$\begin{aligned}P(E_3) &= P\left[\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right)\cup\left(\overline{V_1}\cap V_2\right)\right]\\ &= P\left(V_1 \cap \overline{V_2}\right)+P\left(\overline{V_1}\cap V_2\right)\\ &= P\left(\overline{V_2}/V_1\right)\times P(V_1)+P\left(\overline{V_2}/\overline{V_1}\right)\times P\left(\overline{V_1}\right)\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$\boxed{18}$ Modèle élémentaire de diffusion d'une épidémie : l'urne à la Polya

On définit les événements :

B_1 : « la boule obtenue au premier tirage est blanche » ;
N_1 : « la boule obtenue au premier tirage est noire » ;
B_2 : « la boule obtenue au deuxième tirage est blanche » ;
N_2 : « la boule obtenue au deuxième tirage est noire ».

On notera que n désigne le nombre de boules que l'on rajoute.
L'énoncé présuppose donc que l'on dispose de boules à côté.

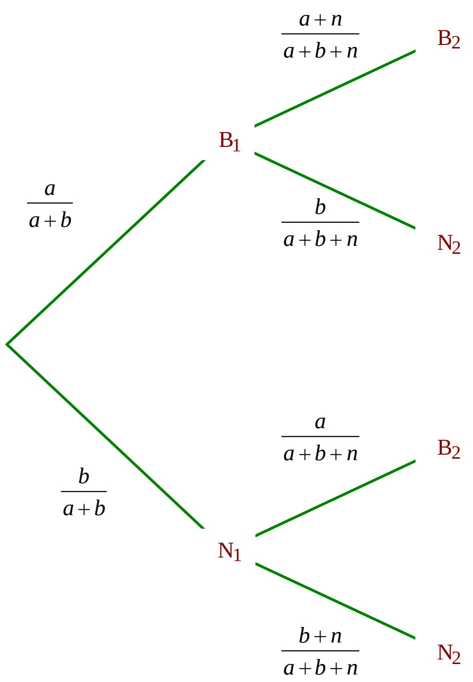
Thème de l'exercice : urne de composition variable ou urne à composition évolutive

Quand on tire une boue blanche au premier tirage, on rajoute n boules blanches dans l'urne.

Quand on tire une boule noire au premier tirage, on rajoute n boules noires dans l'urne.

Au deuxième tirage, il y a donc $a+b+n$ boules dans l'urne.

1°)



2°) B_1 et N_1 forment un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\mathrm{B}_2)=P(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2)+P(\mathrm{N}_1\cap\mathrm{B}_2)$$

$$=P(\mathrm{B}_1)\times P(\mathrm{B}_2/\mathrm{B}_1)+P(\mathrm{N}_1)\times P(\mathrm{B}_2/\mathrm{N}_1)$$

$$=\frac{a}{a+b}\times\frac{a+n}{a+b+n}+\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b+n}$$

$$=\frac{a\cancel{(a+n+b)}}{(a+b)\cancel{(a+b+n)}}$$ (on ne développe pas le dénominateur)

$$=\frac{a}{a+b}$$

On observe que $P(\mathrm{B}_2)=P(\mathrm{B}_1)$.

Compétences des exercices

- Savoir lire (décrypter, interpréter) un texte en termes de probabilités.
  Formuler les indications de l'énoncé en probabilités simples et en probabilités conditionnelles.

- Savoir traduire une question en termes de probabilités : faut-il calculer un probabilité simple ? une probabilité conditionnelle ? Ne pas mélanger probabilité conditionnelle de A sachant B et probabilité de A ∩ B.

- Savoir calculer une probabilité conditionnelle soit en utilisant la définition soit « par logique ».

- Savoir calculer la probabilité d'une intersection en utilisant la formule des probabilités composées pour deux événements.

- Savoir faire un arbre de probabilité.

- Savoir appliquer la formule des probabilités totales pour calculer une probabilité.

- Savoir démontrer que deux événements sont indépendants.

- Savoir utiliser l'indépendance de deux événements pour calculer une probabilité.

La frontière n'est pas facile à distinguer entre probabilité conditionnelle et probabilité simple.