

I. 1°) Déterminer trois entiers naturels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$.

2°) Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n \geq 3$, on peut trouver n nombres entiers x_1, x_2, \dots, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$.

II. Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

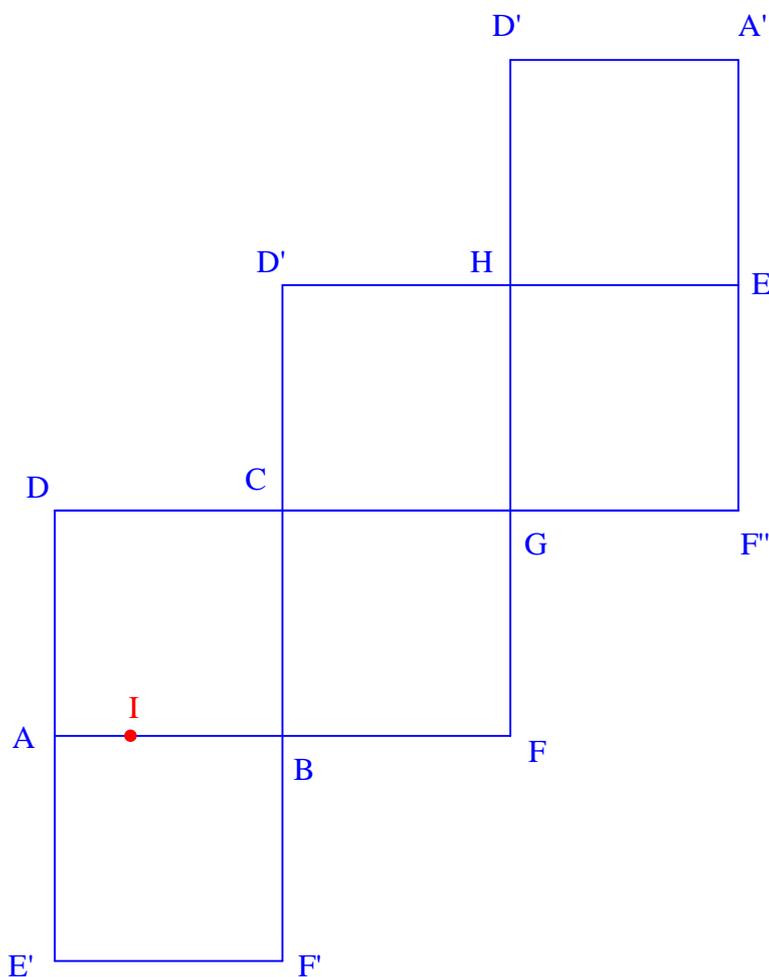
1°) Déterminer la position relative des plans (BEG) et (ACH). Citer le théorème utilisé.

2°) Soit I un point quelconque de]AB[. On note P le plan passant par I et parallèle au plan (BEG).

Déterminer la position relative des plans P et (ACH). Citer le théorème utilisé.

3°) Tracer la section IJKLMN du cube par le plan P ($J \in]AE[$).

Reproduire le patron du cube ci-après et tracer en rouge les côtés de la section ; en déduire que le périmètre de cette section ne dépend pas de la position du point I sur]AB[et exprimer sa valeur en fonction de a .



Corrigé du DM pour 12 novembre 2012

I.

1°) **Déterminons trois entiers naturels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$.**

Posons $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 6$.

On peut s'appuyer sur une représentation géométrique (disque que l'on partage en 3 secteurs circulaires coloriés de différentes couleurs), comme me l'a fait un élève (Jean-Baptiste Pajot).

On vérifie sans peine que l'on a : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$.

2°) **Démontrons que pour tout nombre entier naturel $n \geq 3$, on peut trouver n nombres entiers x_1, x_2, \dots, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$.**

Pour n entier naturel tel que $n \geq 3$, on définit la phrase $P(n)$: « Il existe n nombres entiers x_1, x_2, \dots, x_n strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$. ».

Initialisation : La phrase $P(3)$ est vraie d'après la question 1°).

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire qu'il existe k nombres entiers x_1, x_2, \dots, x_k strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire qu'il existe $k+1$ nombres entiers $x_1', x_2', \dots, x_{k+1}'$ strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} + \dots + \frac{1}{x_{k+1}'} = 1$.

On sait d'après l'hypothèse de récurrence qu'il existe k nombres entiers x_1, x_2, \dots, x_k strictement supérieurs à 1 et deux à deux distincts tels que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1$.

Donc $\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{2x_k} = \frac{1}{2}$.

Posons $x_1' = 2, x_2' = 2x_1, x_3' = 2x_2, \dots, x_{k+1}' = 2x_k$.

On vérifie aisément que $x_1', x_2', \dots, x_{k+1}'$ sont strictement supérieurs à 1, deux à deux distincts et qu'ils satisfont l'égalité $\frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} + \dots + \frac{1}{x_{k+1}'} = 1$.

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(3)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geq 3$, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$.

Autre façon : on donne une expression explicite des réels

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^1} ; \frac{1}{2^2} ; \dots ; \frac{1}{2^{n-2}}}_{n-2 \text{ termes}} ; \underbrace{\frac{1}{3 \times 2^{n-3}} ; \frac{1}{3 \times 2^{n-2}}}_{2 \text{ termes à part}}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 \times 2^{n-3}} + \frac{1}{3 \times 2^{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3 \times 2^{n-3}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{\cancel{3} \times 2^{n-3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= 1 - \cancel{\frac{1}{2^{n-2}}} + \cancel{\frac{1}{2^{n-2}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

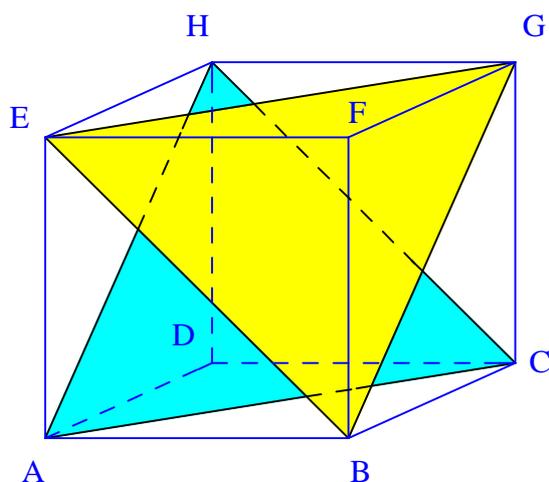
Un petit problème technique intéressant qui a bloqué beaucoup d'élèves.

Comment traduire que des réels x_1, x_2, \dots, x_n sont deux à deux distincts ?

On doit écrire : $\forall (i, j) \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\} \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

En revanche, on ne peut écrire : $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$.

II. ABCDEFGH : cube d'arête a



On pouvait colorier les plans (BEG) et (ACH) sur la figure.

1°) **Déterminons la position relative des plans (BEG) et (ACH).**

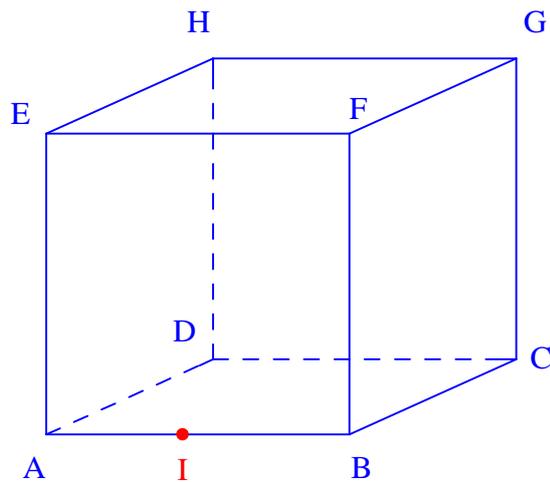
On a : $(EB) \parallel (CH)$ et $(BG) \parallel (AH)$.

Or, si deux droites d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces plans sont parallèles.

On en déduit que $(BEG) \parallel (ACH)$.

2°) I : point quelconque de]AB[

P : plan passant par I et parallèle au plan (BEG)



Déterminons la position relative des plans P et (ACH).

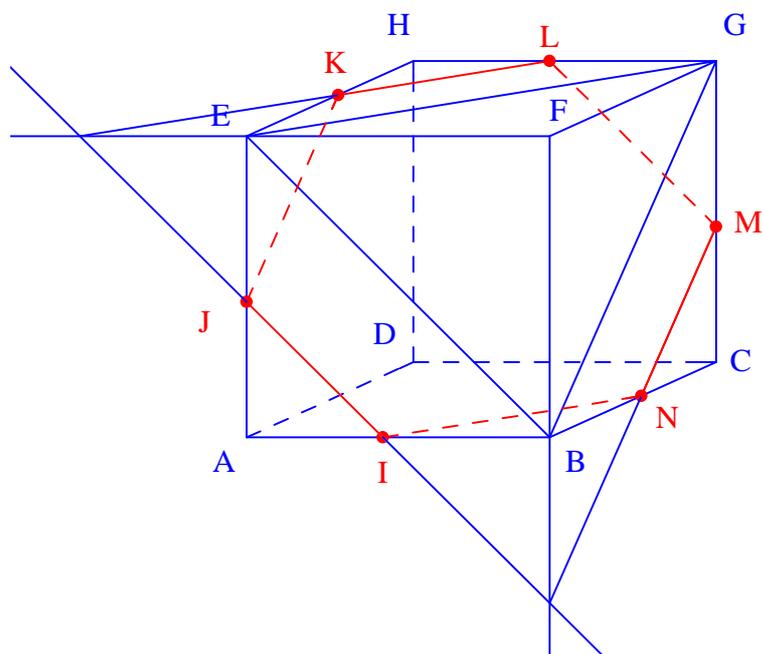
On sait que $P \parallel (BEG)$ d'après les hypothèses et $(BEG) \parallel (ACH)$ d'après la question 1°. Or si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ces deux plans sont parallèles. On en déduit que $(BEG) \parallel (ACH)$.

3°)

• **Traçons la section IJKLMN du cube par le plan P .**

On utilise essentiellement la méthode de parallélisme.

On peut cependant faire une méthode mixte (parallélisme et tracé hors solide) comme le montre la figure ci-dessous.



On peut démontrer aisément que $BI = BN$, $EJ = EK$, $GL = GM$ et que de plus, toutes ces longueurs sont égales. On peut éventuellement marquer les codages correspondants sur la figure.

• **Traçons les côtés de la section sur le patron du cube.**

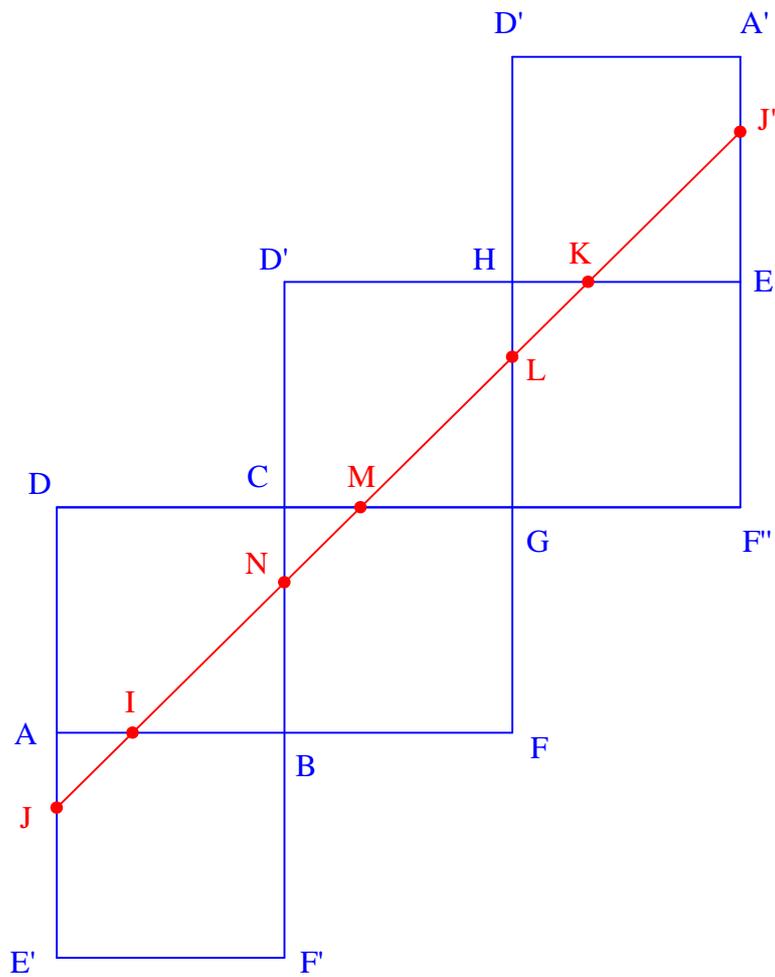
La section du cube par le plan P est tracée en rouge.

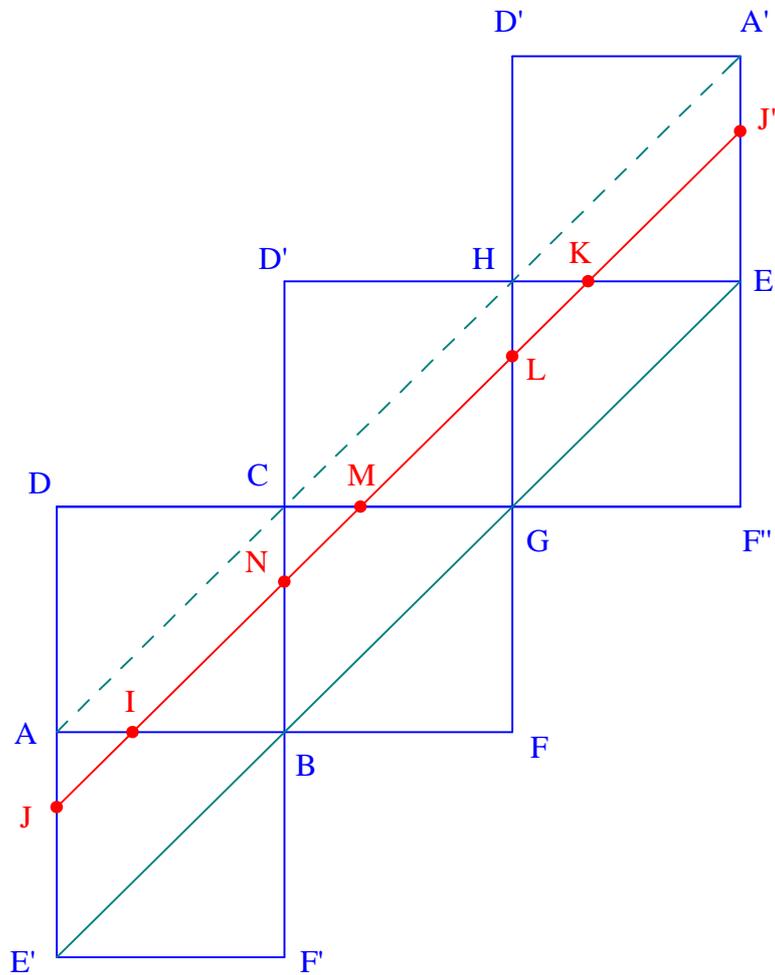
On a $(IJ) \parallel (BE')$ et $J \in]AE[$.

On a $(IN) \parallel (AC)$ et $J \in]BC[$.

On a $(NM) \parallel (BG)$ et $M \in]CG[$.

Et ainsi de suite...





Ainsi, les points définissant la section sont tous alignés sur une même droite.
On joint les points à l'aide de la règle (et non à main levée).

Le quadrilatère $EE'JJ'$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

On en déduit que $JJ' = EE'$.

$$\text{Or } EE' = EG + GB + BE' = a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$$

Rappel : La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$.

On en déduit que le périmètre de la section du cube par le plan P a un périmètre constant égal à $3a\sqrt{2}$.

Le périmètre ne dépend pas de la position de I sur $]AB[$.

Autre méthode :

Par le calcul, en posant $AI = x$.

Méthode plus longue, moins élégante... donc à éviter.