TS Exercices sur la fonction exponentielle (1)

$\boxed{1}$ Simplifier les expressions suivantes :

a. $A = \exp(3) \times \exp(2)$ b. $B = \exp(2) \times \exp(-2)$ c. $C = \dfrac{\exp(x)}{\exp(3x)}$ d. $D = (\exp(x))^3$

On pensera à vérifier les résultats avec l'application « photomath » sur téléphone portable.

$\boxed{2}$ Simplifier les expressions suivantes, pour $x \in \mathbb{R}$:

a. $A = (\exp(x))^5 \times (\exp(-2x))^2$ b. $B = \exp(-3x+1) \times (\exp(x))^3$

$\boxed{3}$ Simplifier les expressions suivantes :

a. $A = e^{-3} \times e^4$ b. $B = e^5 \times e^{-5}$ c. $C = (e^2)^3 \times e$

$\boxed{4}$ Simplifier les expressions suivantes :

a. $A = \dfrac{e^{-4x} \times e}{(e^{-x})^2}$ b. $B = (e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x} + e^{-x})$

$\boxed{5}$ Établir, pour $x \in \mathbb{R}$, les égalités suivantes :

a. $\dfrac{1-e^x}{e^{2x}} = e^{-2x} - e^{-x}$ b. $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

$\boxed{6}$ On considère la fonction $f : x \mapsto (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Vérifier que la fonction f est constante.

2°) Faire apparaître la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice. On choisira une fenêtre graphique assez large en abscisse (par exemple, pour $x \in [-20\,;20]$ et $y \in [-5\,;5]$).

On pourra éventuellement faire afficher la courbe sur un écran d'ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe tel que *Geogebra*.

Qu'observe-t-on ? Comment peut-on expliquer le phénomène ?

$\boxed{7}$ Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire (voir rappels plus loin page 4 sur les fonctions paires et impaires).

$\boxed{8}$ Factoriser les expressions suivantes :

a. $A = e^{2x} - e^x$ b. $B = e^{2x} - 1$ c. $C = 4e^{2x} + 4e^x + 1$ d. $D = xe^x - 3e^{3x}$

Pour les trois premières expressions, on donnera le résultat sous forme d'un produit ne contenant que e^x.

Dans les exercices $\boxed{9}$ à $\boxed{22}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations données.

$\boxed{9}$ a. $\exp(x) = e$ b. $\exp(x) = 1$ c. $\exp(x) = -2$

$\boxed{10}$ a. $\exp(-x) = 0$ b. $\exp(-x) = 1$ c. $\exp(-x) = e$

$\boxed{11}$ a. $e^{2x-1} = e^3$ b. $e^{(x^2)} = 1$ c. $e^{4x-1} = \dfrac{1}{e}$

$\boxed{12}$ a. $e^x - e^{-x} = 0$ b. $e^x + e^{-x} = 0$

$\boxed{13}$ a. $e^{-x+4} = (e^{-x})^4$ b. $e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2$

$\boxed{14}$ $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ (on pourra poser $X = e^x$)

$\boxed{15}$ $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

$\boxed{16}$ $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

$\boxed{17}$ $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$

$\boxed{18}$ a. $e^{\frac{x}{2}} < e$ b. $e^{-x} > 1$

$\boxed{19}$ a. $e^{-x+5} > e^x$ b. $e^{x^2} \leqslant (e^x)^2$

$\boxed{20}$ $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$

$\boxed{21}$ $e^{2x} - (1+e)e^x + e \geqslant 0$

$\boxed{22}$ $e^x + e^{-x} \geqslant 2$

$\boxed{23}$ Étudier le signe des expressions suivantes :

$A = e^{2x} - e^x$; $B = e^x + e^{-x}$; $C = e^{2x-1} - 1$; $D = (x^2+1)e^{-2x}$; $E = x^2 + 1 + 3e^{-2x}$

$\boxed{24}$ Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f : x \mapsto 3e^x - 2x$ b. $f : x \mapsto 2x^2 - 4e^x + 1$ c. $f : x \mapsto \dfrac{3-e^x}{2}$

$\boxed{25}$ Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Donner les résultats sous forme factorisée.

a. $f : x \mapsto xe^x$ b. $f : x \mapsto (2x-1)e^x$ c. $f : x \mapsto 3(e^x - 1)^5$

$\boxed{26}$ Calculer la dérivée de la fonction f définie par :

a. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ b. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$ c. $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

27 Faire le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

a. $f : x \mapsto \left(3-x^2\right)\mathrm{e}^x$ b. $f : x \mapsto x+\mathrm{e}^x$ c. $f : x \mapsto \left(\mathrm{e}^x-1\right)^3$

28 On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a (a réel quelconque).

2°) Déterminer l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(1 ; 0).
On rédigera ainsi
« $\mathrm{B} \in T_a$ si et seulement si … ».
Faire un graphique sur une demi-page en prenant le centimètre pour unité graphique et le repère orthonormé.
Tracer la courbe $\mathcal{C}$ puis la tangente passant par le point B.

29 Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x-1-x$.

30 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

3°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}-f(x)$.

a) Calculer $g'(x)$ (donner le résultat sous forme factorisée).

b) Déterminer le sens de variation de g.

c) Calculer $g(0)$.

d) En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.
Vérifier le résultat en utilisant une calculatrice graphique ou un logiciel de tracé de courbe.

4°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point A pour centre de symétrie.

31 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x+3+(x-3)\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2°) Étudier les variations de f'.

3°) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x puis le sens de variation de f.

32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $\mathrm{e}^x=4$ b. $\mathrm{e}^x-3=0$ c. $\mathrm{e}^{x+2}=2$ d. $\mathrm{e}^{3x}+3=0$ e. $2\mathrm{e}^x-3=0$ f. $\mathrm{e}^{2x-1}=5$ g. $\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-2\right)=0$

33 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $\mathrm{e}^x \leqslant 7$ b. $2-\mathrm{e}^{-x}<0$ c. $\mathrm{e}^{5x}>8$

34 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=5\\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=1\end{cases}$.

Fonctions paires, fonctions impaires

À savoir par cœur

La notion de nombre pair ou impair pour les entiers relatifs est abordée au collège.
La notion de fonction paire ou impaire n'a pas de rapport.

La notion de fonction paire ou impaire fait intervenir la notion de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 ou centré en 0.

Définition :

On dit qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro ou centré en zéro pour exprimer que $\forall x \in D \quad -x \in D$.

Exemples : $\mathbb{R}$, $[-2\,;2]$, $]-2\,;2[$, $\mathbb{R}^*$

Contre-exemples: $[-1\,;2]$, $[-2\,;2[$

Définition :

f est une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ **centré en zéro** (c'est-à-dire que $\forall x \in D \quad -x \in D$).

• On dit qu'une fonction *f* est **paire** pour exprimer que $\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$.

• On dit qu'une fonction *f* est **impaire** pour exprimer que $\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)$.

Exemples :

• Les fonctions constantes, « valeur absolue », « carré », puissances d'exposant entier pair, cosinus sont paires.

• Les fonctions linéaires, « inverse », « cube », puissances d'exposant impair, sinus sont impaires.

Deux questions :

Une question : Quelles sont les fonctions à la fois paires et impaires ?

La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction identiquement nulle.

Une question : Toute fonction est-elle paire ou impaire ?

Une fonction peut-être ni paire ni impaire (exemples : fonction « racine carrée », fonction « partie entière », fonction $x \mapsto x^3 + 1$).

Propriété graphique (propriété de symétrie) :

• Une fonction *f* est paire si et seulement si sa représentation graphique dans un **repère orthogonal** admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

• La représentation graphique d'une fonction impaire dans un repère quelconque admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

Intérêt (application) :

La parité d'une fonction permet de limiter l'étude à la « moitié » du domaine $\left(D \cap \mathbb{R}^+\right)$.

Propriété admis sans démonstration :

Toute fonction s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction constante égale à 0, appelée fonction identiquement nulle.

On notera que le domaine de définition est important pour la parité d'une fonction.

Une petite propriété des fonctions impaires :

Soit *D* un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0 tel que $0 \in D$.

Si *f* est une fonction impaire définie sur *D*, alors $f(0) = 0$.

La démonstration est quasiment évidente.
Il faut savoir la refaire sans difficulté.

Comme $0 \in D$ et que *f* est impaire, on peut écrire $f(-0) = -f(0)$ soit $f(0) = -f(0)$.

On obtient finalement, $2f(0) = 0$.

Par conséquent, $f(0) = 0$.

Corrigé des exercices

On peut vérifier les résultats des exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$ grâce à l'application « Photomath » sur téléphone portable ou un logiciel de calcul formel.

$\boxed{1}$ Simplifications d'expressions

a. $$\begin{aligned} A &= \exp(3)\times\exp(2) \\ &= \exp(3+2) \\ &= \exp(5) \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} B &= \exp(2)\times\exp(-2) \\ &= \exp(2-2) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} C &= \frac{\exp(x)}{\exp(3x)} \\ &= \exp(x-3x) \\ &= \exp(-2x) \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} D &= (\exp(x))^3 \\ &= \exp(3x) \end{aligned}$$

Pour B, on arrive à $\exp(0)$ que l'on simplifie en 1.

$\boxed{2}$ Simplification d'expressions

a. $$\begin{aligned} A &= (\exp(x))^5\times(\exp(-2x))^2 \\ &= \exp(5x)\times\exp(-4x) \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} B &= \exp(-3x+1)\times(\exp(x))^3 \\ &= \exp(-3x+1)\times\exp(3x) \\ &= \exp(1) \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Simplifications d'expressions

a. $$\begin{aligned} A &= \mathrm{e}^{-3}\times\mathrm{e}^{4} \\ &= \mathrm{e}^{1} \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} B &= \mathrm{e}^{5}\times\mathrm{e}^{-5} \\ &= \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} C &= \left(\mathrm{e}^{2}\right)^3\times\mathrm{e} \\ &= \mathrm{e}^{6}\times\mathrm{e} \\ &= \mathrm{e}^{7} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Simplifications d'expressions

a. $$\begin{aligned} A &= \frac{\mathrm{e}^{-4x}\times\mathrm{e}}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{1-4x}}{\mathrm{e}^{-2x}} \\ &= \mathrm{e}^{1-4x+2x} \\ &= \mathrm{e}^{1-2x} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} B &= \left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2-\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2-2\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}+\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x} \\ &= \mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x} \\ &= \cancel{\mathrm{e}^{2x}}-2\times1+\cancel{\mathrm{e}^{-2x}}-\cancel{\mathrm{e}^{2x}}-\cancel{\mathrm{e}^{-2x}} \\ &= \cancel{\mathrm{e}^{2x}}-2+\cancel{\mathrm{e}^{-2x}}-\cancel{\mathrm{e}^{2x}}-\cancel{\mathrm{e}^{-2x}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Pour l'expression B, on a des sommes ou des différences d'exponentielles.
On ne peut donc rien faire.
En revanche, on peut appliquer les règles usuelles de calcul algébrique.
On peut en particulier appliquer les identités remarquables.

$\boxed{5}$ Égalités

« établir » signifie « prouver », « démontrer » (on le retrouve dans l'expression : « Il est établi que »).

On part du membre de gauche pour arriver au membre de droite.

a.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} \frac{1-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}} &= \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{x-2x} \\ &= \mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

b. Il y a 3 méthodes à noter.

1ère méthode : On part du premier membre de l'égalité et on multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-x}.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1} &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}\times\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{0}+\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \end{aligned}$$

2e méthode : On part du premier membre de l'égalité et on force la factorisation du numérateur par e^{x}.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1} &= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)}{\cancel{\mathrm{e}^{x}}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)} \\ &= \frac{1-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \end{aligned}$$

3$^{\text{e}}$ méthode : On part du second membre de l'égalité $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ et l'on transforme pour arriver au premier membre.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}}}{\dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{\mathrm{e}^{x}}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

$\boxed{6}$

$f : x \mapsto \left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) **Vérifions que la fonction *f* est constante.**

On développe l'expression de $f(x)$ pour montrer que le résultat est un réel indépendant de *x*.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2$ (la présence du quantificateur précédant l'égalité est essentielle)

$$= \cancel{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2} + 2\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} + \cancel{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2} - \cancel{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2} + 2\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} - \cancel{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

l'une des deux lignes

$$= \cancel{\mathrm{e}^{2x}} + 2\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} + \cancel{\mathrm{e}^{-2x}} - \cancel{\mathrm{e}^{2x}} + 2\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} - \cancel{\mathrm{e}^{-2x}}$$

$$= 2+2$$

$$= 4$$

On en déduit que **la fonction *f* est constante sur $\mathbb{R}$**.

2°) La bizarrerie observée sur l'écran de la calculatrice est liée au *dépassement de capacité* (dépassement de capacité de calcul).

On observe que la fonction semble constante nulle en dehors de l'intervalle $[-15\,;15]$. Cela tient au fait que la calculatrice a du mal à faire des calculs sur de très grands nombres.

On sait que $\mathrm{e}^{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Or $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$ donc $\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Pour de « grandes » valeurs de *x*, la calculatrice fait le calcul $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 = 0$.

$\boxed{7}$

$\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}}$

Démontrons que la fonction *f* est impaire.

La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ (en effet, pour tout réel *x*, on a : $\mathrm{e}^{x}+1>0$ donc $\mathrm{e}^{x}+1 \neq 0$).
Le domaine de définition est donc centré en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}-1}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}+1}$$

$$= \frac{\dfrac{1-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}}{\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}}$$

$$= \frac{1-\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$$

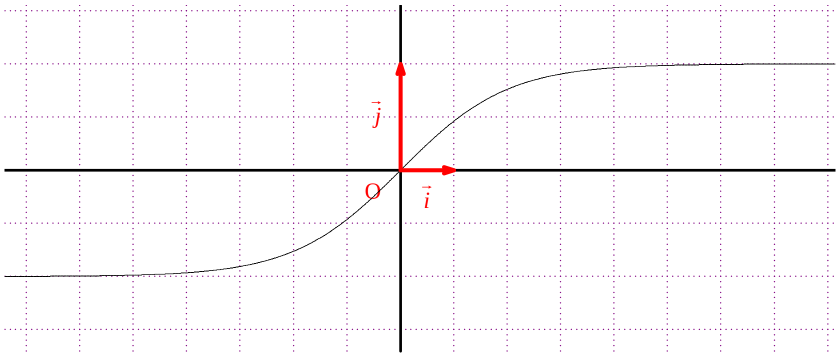
$$= \frac{-\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

$$= -f(x)$$

On en déduit que **la fonction *f* est impaire** (on ne dit pas « impaire sur $\mathbb{R}$ »).

On peut vérifier que la courbe représentative de la fonction *f* est symétrique par rapport à l'origine O du repère en la traçant sur l'écran de la calculatrice.



8 Factorisations d'expressions

a. $A = e^{2x} - e^{x}$
$= \left(e^{x}\right)^2 - e^{x}$
$= e^{x} \times e^{x} - e^{x}$
$= e^{x}\left(e^{x} - 1\right)$

b. $B = e^{2x} - 1$
$= \left(e^{x}\right)^2 - 1^2$
identité remarquable
$= \left(e^{x} - 1\right)\left(e^{x} + 1\right)$

c. $C = 4e^{2x} + 4e^{x} + 1$
$= \left(2e^{x} + 1\right)^2$
identité remarquable

d. $D = xe^{x} - 3e^{3x}$
$= e^{x}\left(x - 3e^{2x}\right)$

Autre façon pour l'expression A :

$$A = e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{x}}\right)$$

Attention à la factorisation fausse : $A = e^{x}\left(e^{2} - e\right)$.

Autre façon un peu tordue pour le B :

$$\begin{aligned} B &= e^{2x} - 1 \\ &= e^{2x} - e^{x} \times e^{-x} \\ &= e^{x}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \end{aligned}$$

Autre façon un peu tordue pour le C :

$$\begin{aligned} C &= 4e^{2x} + 4e^{x} + 1 \\ &= 4e^{2x} + 4e^{x} + e^{x} \times e^{-x} \\ &= e^{x}\left(4e^{x} + 4 + e^{-x}\right) \end{aligned}$$

9 Résolutions d'équations de la forme $\exp(x) = a$

Les équations et inéquations doivent toujours être « équilibrées » en exp (2 exponentielles de chaque côté).
C'est comme pour les équations en cos et/ou sin.
On peut vérifier les solutions grâce à l'application « photomath » sur le téléphone portable.
Il est intéressant également de vérifier les résultats avec un logiciel de calcul formel.

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(x) = e$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow \exp(x) = \exp(1)$
$\Leftrightarrow x = 1$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \{ 1 \}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(x) = 1$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow \exp(x) = \exp(0)$
$\Leftrightarrow x = 0$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{ 0 \}$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(x) = -2$ (3).**

Une exponentielle est toujours strictement positive.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3 = \varnothing$

10 Résolutions d'équations de la forme $\exp(x) = a$

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(-x) = 0$ (1).**

Une exponentielle est toujours strictement positive.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \varnothing$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(-x) = 1$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow \exp(-x) = \exp(0)$ (puisque $\exp(0) = 1$ par définition de la fonction exp)
$\Leftrightarrow -x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{ 0 \}$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\exp(-x)=\mathrm{e}$ (3).**

(3) $\Leftrightarrow \exp(-x)=\exp(1)$ (puisque $\exp(1)=\mathrm{e}$ par définition)

$\Leftrightarrow -x=1$

$\Leftrightarrow x=-1$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$\boldsymbol{S_3=\{-1\}}$

$\boxed{\textbf{11}}$

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x-1}=\mathrm{e}^3$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow 2x-1=3$

$\Leftrightarrow x=2$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S_1=\{2\}}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)}=1$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\left(x^2\right)}=\mathrm{e}^0$ (puisque $\exp(0)=1$ par définition de la fonction exp)

$\Leftrightarrow x^2=0$

$\Leftrightarrow x=0$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boldsymbol{S_2=\{0\}}$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{4x-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (3).**

(3) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{4x-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^1}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{4x-1}=\mathrm{e}^{-1}$

$\Leftrightarrow 4x-1=-1$

$\Leftrightarrow 4x=0$

$\Leftrightarrow x=0$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$\boldsymbol{S_3=\{0\}}$

$\boxed{\textbf{12}}$

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}=0$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}$

$\Leftrightarrow x=-x$

$\Leftrightarrow x=0$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S_1=\{0\}}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=0$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^{-x}$ (impossible)

Une exponentielle est toujours strictement positive.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boldsymbol{S_2=\varnothing}$

$\boxed{\textbf{13}}$

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{-x+4}=\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^4$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x+4}=\mathrm{e}^{-4x}$

$\Leftrightarrow -x+4=-4x$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S_1=\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{x^2-4}=\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2-4}=\mathrm{e}^{2x+4}$

$\Leftrightarrow x^2-4=2x+4$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=4$ (résolution de l'équation du second degré)

S

$\Leftrightarrow x^2-2x-8=0$oit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{\,-2\,;4\,\}$

14 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ (1).**

On pose $X = e^x$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit : $X^2 - 2X + 1 = 0$ (1′).

$(1') \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow X - 1 = 0$

$\Leftrightarrow X = 1$

Or $X = e^x$.

Donc :

$(1) \Leftrightarrow e^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \{\,0\,\}$

Autre méthode :

$(1) \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \{\,0\,\}$

15 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ (1).**

On pose $X = e^x$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit : $X^2 + 3X - 4 = 0$ (1′).

$(1') \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -4$

On n'écrit pas l'ensemble de solutions de (1′).

Or $X = e^x$.

Donc :

$(1) \Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = -4$ (impossible car une exponentielle est toujours strictement positive)

$\Leftrightarrow x = 0$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S = \{\,0\,\}$

Autre méthode :

$(1) \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = -4$ (impossible)

$\Leftrightarrow x = 0$

16 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ (1).**

Rédaction similaire.

$S = \{\,0\,\}$

17 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0$ (1).**

On pose $X = e^x$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit : $X^2 - (1+e)X + e = 0$ $(1')$.

Pour résoudre $(1')$, il y a deux méthodes.

1ère méthode :

On calcule le discriminant de $(1')$.

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-(1+e)\right]^2 - 4e\\ &= (1+e)^2 - 4e\\ &= 1 + 2e + e^2 - 4e\\ &= 1 - 2e + e^2\\ &= (1-e)^2\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, $(1')$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-e)^2} = |\,1-e\,| = e - 1$ car $1 - e < 0$ (on sait en effet que $e = 2{,}718...$)

Les racines de $(1')$ sont $X_1 = \dfrac{1+e-(e-1)}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{1+e+(e-1)}{2} = e$.

2^e méthode :

$(1') \Leftrightarrow X=1$ (racine évidente) ou $X=\mathrm{e}$ (obtenue par produit)

On n'écrit pas l'ensemble de solutions de (1').
Or $X=\mathrm{e}^x$.

Donc :

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=1$ ou $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S=\{0\,;1\}}$

18

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}<\mathrm{e}$ (1).**

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}<\mathrm{e}^1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}<1$

$\Leftrightarrow x<2$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S_1=\left]-\infty\,;2\right[}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-x}>1$ (2).**

$(2) \Leftrightarrow -x>0$

$\Leftrightarrow x<0$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boldsymbol{S_2=\left]-\infty\,;0\right[}$

On peut aussi écrire $S_2=\mathbb{R}_-^*$ (sans accolades autour de $\mathbb{R}_-^*$).

Autre méthode :

$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}^x}<1$

$\Leftrightarrow 1<\mathrm{e}^x$ (équivalente à l'inéquation précédente car $\mathrm{e}^x>0$ pour tout réel x)

19

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-x+5}>\mathrm{e}^x$ (1).**

$(1) \Leftrightarrow -x+5>x$

$\Leftrightarrow -2x>-5$

$\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$\boldsymbol{S_1=\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[}$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2}\leqslant\left(\mathrm{e}^x\right)^2$ (2).**

$(2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}\leqslant\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow x^2\leqslant 2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x\leqslant 0$

$\Leftrightarrow x(x-2)\leqslant 0$ *

$\Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant 2$ (règle du signe d'un trinôme**)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$\boldsymbol{S_2=[0\,;2]}$

* On pourrait aussi faire deux « options » :

$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x-2\leqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x\leqslant 0 \\ x-2\geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x\leqslant 0 \\ x\geqslant 2 \end{cases}$ (impossible : un réel ne peut être à la fois négatif ou nul et supérieur ou égal à 2)

$0\leqslant x\leqslant 2$

Cette méthode est cependant maladroite. Il est préférable de l'éviter.

** Le trinôme $x(x-2)$ a pour racines 0 et 2. Le signe du coefficient de x^2 est positif (il est égal à 1 par développement mental).
Le trinôme $x(x-2)$ est donc négatif ou nul pour x entre les racines soit pour $x\in[0\,;2]$.

On peut tracer la courbe représentative de la fonction $x\mapsto x^2-2x$ sur l'écran de la calculatrice (il s'agit d'une parabole).

20 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x}+3e^{x}-4>0$ (1).**

On pose $X=e^{x}$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit : $X^2+3X-4>0$ (1′).

(1′) $\Leftrightarrow$ $X<-4$ ou $X>1$ (on utilise la racine évidente 1)

On n'écrit pas l'ensemble de solutions de (1′).

Or $X=e^{x}$.

Donc :

(1) $\Leftrightarrow$ $e^{x}<-4$ (impossible) ou $e^{x}>1$

$\Leftrightarrow$ $x>0$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=]0\,;+\infty[$

21 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x}-(1+e)e^{x}+e\geqslant 0$ (1).**

On pose $X=e^{x}$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit : $X^2-(1+e)X+e\geqslant 0$ (1′).

(1′) $\Leftrightarrow$ $X\leqslant 1$ ou $X\geqslant e$ (cf. ex. $\boxed{17}$; on peut faire un tableau de signes)

On n'écrit pas l'ensemble de solutions de (1′).

Or $X=e^{x}$.

Donc :

(1) $\Leftrightarrow$ $e^{x}\geqslant e$ ou $e^{x}\leqslant 1$

$\Leftrightarrow$ $x\geqslant 1$ ou $x\leqslant 0$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=]-\infty\,;0]\cup[1\,;+\infty[$

22 **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x}+e^{-x}\geqslant 2$ (1).**

On pose $X=e^{x}$ (changement d'inconnue).

(1) s'écrit $X+\dfrac{1}{X}\geqslant 2$ (1′).

(1′) $\Leftrightarrow$ $X+\dfrac{1}{X}-2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{X^2-2X+1}{X}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(X-1)^2}{X}\geqslant 0$

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $(X-1)^2$		+		+	0	+	
Signe de X		–	0	+		+	
Signe de $\dfrac{(X-1)^2}{X}$		–	‖	+	0	+	

Donc (1′) $\Leftrightarrow$ $X>0$.

On n'écrit pas l'ensemble de solutions de (1′).

Or $X=e^{x}$.

Donc :

(1) $\Leftrightarrow$ $e^{x}>0$ (toujours vrai)

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\mathbb{R}$

Autre méthode :

On peut ne pas utiliser de changement d'inconnue.

(1) $\Leftrightarrow$ $e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\geqslant 2$

$\Leftrightarrow$ $e^{2x}+1\geqslant 2e^{x}$ (car $e^{x}>0$)

$\Leftrightarrow$ $e^{2x}-2e^{x}+1\geqslant 0$

$\Leftrightarrow$ $\left(e^{x}-1\right)^2\geqslant 0$ (toujours vrai)

$\boxed{23}$ Études de signes d'expressions

• Étudions le signe de l'expression $A = e^{2x} - e^{x}$ suivant les valeurs de x.

L'expression est la somme d'un nombre positif et d'un nombre négative.
On ne peut pas connaître son signe.
On est obligé de résoudre une équation et deux inéquations (l'équation donnerait uniquement la valeur charnière).

Pour déterminer le signe de cette expression, on résout deux inéquations et une équation.

$e^{2x} - e^{x} < 0 \quad (1)$	$e^{2x} - e^{x} > 0 \quad (2)$	$e^{2x} - e^{x} = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow e^{2x} < e^{x}$	$(2) \Leftrightarrow e^{2x} > e^{x}$	$(3) \Leftrightarrow e^{2x} = e^{x}$
$\Leftrightarrow 2x < x$	$\Leftrightarrow 2x > x$	$\Leftrightarrow 2x = x$
$\Leftrightarrow x < 0$	$\Leftrightarrow x > 0$	$\Leftrightarrow x = 0$

Nous sommes en mesure de dresser le tableau de signes de l'expression.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de A		$-$	0	$+$	

• Étudions le signe de l'expression $B = e^{x} + e^{-x}$ suivant les valeurs de x.

> Attention : B n'est pas égale à e^{0}.
> On n'a pas $e^{x} + e^{-x} = e^{0}$.

> Le signe de B saute aux yeux immédiatement. On n'est donc pas obligé de résoudre une équation et une inéquation. On se contente de faire une analyse du signe de chaque terme de la somme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad B > 0$.

• Étudions le signe de l'expression $C = e^{2x-1} - 1$ suivant les valeurs de x.

$e^{2x-1} - 1 < 0 \quad (1)$	$e^{2x-1} - 1 > 0 \quad (2)$	$e^{2x-1} - 1 = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow e^{2x-1} < e^{0}$	$(2) \Leftrightarrow e^{2x-1} > e^{0}$	$(3) \Leftrightarrow e^{2x-1} = e^{0}$
$\Leftrightarrow 2x - 1 < 0$	$\Leftrightarrow 2x - 1 > 0$	$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de C		$-$	0	$+$	

• Étudions le signe de l'expression $D = \left(x^{2} + 1\right)e^{-2x}$ suivant les valeurs de x.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^{2} + 1 > 0$ et $e^{-2x} > 0$
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad D > 0$.

• Étudions le signe de l'expression $E = x^{2} + 1 + 3e^{-2x}$ suivant les valeurs de x.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^{2} + 1 > 0$ et $3e^{-2x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad E > 0$.

On peut vérifier les résultats des exercices $\boxed{24}$ à $\boxed{26}$ grâce à un logiciel de calcul formel.

$\boxed{24}$ Calculs de dérivées

Les fonctions proposées ne sont pas des fonctions polynômes.
Elles sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ par les règles d'opérations sur les fonctions dérivables (sommes, produits).

a. $f : x \mapsto 3e^{x} - 2x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3e^{x} - 2$

b. $f : x \mapsto 2x^{2} - 4e^{x} + 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4x - 4e^{x}$

> On peut éventuellement factoriser par 4 l'expression de $f'(x)$ mais cela n'a rien d'obligatoire.
> On peut donner éventuellement la dérivée sous la forme $f'(x) = 4\left(1 - e^{x}\right)$.

c. $f : x \mapsto \dfrac{3 - e^{x}}{2}$

On écrit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2} \times \left(3 - e^{x}\right)$ avant de dériver.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\dfrac{e^{x}}{2}$

25 Calculs de dérivées

Pour les deux premières dérivées, faire apparaître la formule de la dérivée d'un produit.

a. $f : x \mapsto xe^x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$ (formule de dérivation d'un produit)

$= e^x(1+x)$

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

b. $f : x \mapsto (2x-1)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2 \times e^x + (2x-1) \times e^x$ (formule de dérivation d'un produit)

$= e^x(2x+1)$

c. $f : x \mapsto 3(e^x-1)^5$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 \times 5e^x(e^x-1)^4$ (formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$)

$= 15e^x(e^x-1)^4$

26 Calculs de dérivées

Les fonctions proposées ne sont pas des fonctions rationnelles à cause de la présence de e^x dans leurs expressions (la fonction $x \mapsto e^x$ n'est pas une fonction polynôme).

Une fonction polynôme est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où a_0, a_1, …, a_n sont des réels.

a. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$ (formule de dérivation d'un quotient)

$= \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ (on peut factoriser le numérateur)

b. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$ sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \dfrac{e^x \times (e^x-1) - e^x \times e^x}{(e^x-1)^2}$ (formule de dérivation d'un quotient)

$= \dfrac{e^x(e^x-1-e^x)}{(e^x-1)^2}$ (on met e^x en facteur au numérateur)

$= -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

c. $f(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

On écrit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \times \dfrac{1}{e^x+1}$ avant de dériver.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)$

$= -\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

27 Études de variations de fonctions

Dans chaque cas, on commence par calculer la dérivée. Ensuite on étudie le signe puis les variations de f dans un même tableau.

a. $f : x \mapsto (3-x^2)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -2xe^x + (3-x^2)e^x$

$= (-2x+3-x^2)e^x$

$= (-x^2-2x+3)e^x$

Les racines du polynôme $-x^2-2x+3$ sont 1 et -3.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de e^x		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-6e^{-3}$	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	

On calcule les extremums locaux au brouillon et on écrit leurs valeurs exactes dans le tableau de variations.

Le 11-5-2023

Exercices sur exponentielle (1)

Exercice $\boxed{27}$

$f(-3)=\left(3-(-3)^2\right)e^{-3}$

$=(3-9)e^{-3}$

$=-6e^{-3}$ (valeur exacte)

$f(1)=\left(3-1^2\right)e^1$

$=2e$ (valeur exacte)

On peut directement utiliser la calculatrice si on veut (rubrique « calculs »).

b. $\boldsymbol{f : x \mapsto x + e^x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=1+e^x$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad e^x>0$ d'où $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)>0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. $\boldsymbol{f : x \mapsto \left(e^x-1\right)^3}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=3e^x\left(e^x-1\right)^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de de $3e^x$		$+$		$+$	
Signe de $\left(e^x-1\right)^2$		$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Le tableau de variations permet de voir l'annulation de la dérivée.

On peut bien dire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{28}$

$\boldsymbol{f : x \mapsto e^x}$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1°) **Déterminons une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse *a* (*a* réel quelconque).**

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=e^x$

$f(a)=e^a \qquad f'(a)=e^a$

Une équation de T_a s'écrit $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ soit $y=e^a(x-a)+e^a$.

(On peut aussi écrire cette équation sous la forme équivalente : $y=e^a(x-a+1)$.)

2°) **Déterminons l'abscisse du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par le point B(1 ; 0).**

$B\in T_a \Leftrightarrow y_B=e^a\left(x_B-a+1\right)$

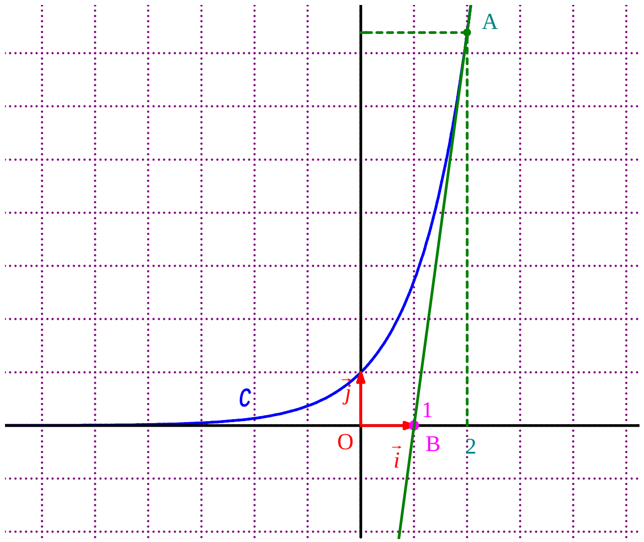
$\Leftrightarrow 0=e^a(2-a)$

$\Leftrightarrow e^a=0$ (impossible) ou $2-a=0$

$\Leftrightarrow a=2$

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 passe par le point B (et c'est la seule tangente qui possède cette propriété).

e^2



On vérifie à l'aide de la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

29 Démontration d'une inégalité à l'aide d'une fonction auxiliaire

Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1 + x$.

Étudions les variations de la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$ (on notera que l'expression $e^x - 1 - x$ correspond à « membre de gauche – membre de droite »).

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x - 1$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on résout une équation et deux inéquations.

$e^x - 1 > 0 \quad (1)$	$e^x - 1 < 0 \quad (2)$	$e^x - 1 = 0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow e^x > 1$ $\Leftrightarrow x > 0$	$(2) \Leftrightarrow e^x < 1$ $\Leftrightarrow x < 0$	$(3) \Leftrightarrow e^x = 1$ $\Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	0	↗	

1ère façon pour terminer :

D'après le tableau de variations, f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 obtenu pour $x = 0$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$.

Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - 1 - x \geqslant 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1 + x$.

2e façon pour terminer :

D'après le tableau de variations, f est à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$.

Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x - 1 - x \geqslant 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1 + x$.

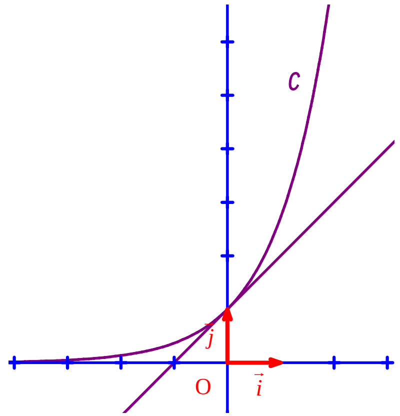
Remarques :

1. Rédaction

Pour parler du maximum d'une fonction, on peut s'exprimer de plusieurs manières.

On peut dire que « f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 obtenu (ou atteint) pour $x = 0$ » ou que « 0 est le maximum global de f sur $\mathbb{R}$ obtenu (ou atteint) pour $x = 0$ ».

2. Cette inégalité traduit que la courbe de la fonction exponentielle est située au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0.



30 $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

$\mathcal{C}$: courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La fonction f n'est pas une fonction rationnelle.

1°) **Étudions le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$.

On en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) **Écrivons une équation de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.**

$f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{4}$

T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

3°) $\boldsymbol{g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - f(x)}$

a) **Calculer $g'(x)$.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1+e^x)^2 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^x - 1}{1+e^x}\right)^2$$

b) **Déterminons le sens de variation de *g*.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $(e^x - 1)^2$		$+$	0	$+$	
Signe de $4(1+e^x)^2$		$+$		$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$+$	
Variation de g		$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	

c) **Calculer *g*(0).**

$g(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

d) **Déduisons-en la position de $\mathcal{C}$ par rapport à *T*.**

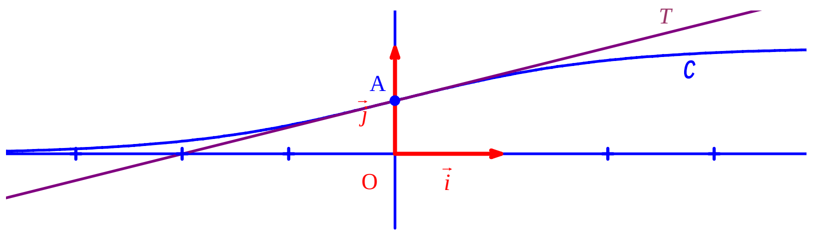
On place l'image de 0 dans le tableau de variation précédent.
Comme *g* est strictement croissante, on en déduit du même coup le signe de $g(x)$.
On met donc un signe + à droite de 0 et un signe – à gauche de 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} > f(x)$.
Donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de *T* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad g(x) < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} < f(x)$.
Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de *T* sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

Enfin, $g(0) = 0$ donc $\mathcal{C}$ et *T* sont sécantes au point A d'abscisse 0.

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbe.



On dit que le point A est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}$.

On dit que la tangente *T* est une **tangente d'inflexion**.
Par ailleurs, on pourrait démontrer que le point A est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

$\boxed{31}$ **$f : x \mapsto 3x+3+(x-3)e^x$**

1°) **Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$.**

f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les propriétés d'opérations sur les fonctions dérivables (somme et produit).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3+0+1\times e^x+(x-3)e^x$ [formules de dérivation d'un produit et d'une somme]

$= 3+(x-2)e^x$

f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les propriétés d'opérations sur les fonctions dérivables (somme et produit).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = e^x+(x-2)e^x$

$= (x-1)e^x$

2°) **Étudions les variations de f '.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de e^x		+		+	
Signe de $x-1$		$-$	0	+	
Signe de $f''(x)$		$-$	0	+	
Variations de f '		$\searrow$	$3-e$	$\nearrow$	

3°) **Déduisons-en le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ puis les variations de f.**

D'après le tableau de variations précédent, f ' admet un minimum global (ou absolu) sur $\mathbb{R}$ égal à $3-e$.
Ce minimum est strictement positif (car $e<3$).
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)>0$.
On en déduit que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{32}$ **Résolutions d'équations avec exponentielles**

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = 4$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow x = \ln 4$

Rappel : Par définition, ln 4 est le nombre dont l'image par la fonction exponentielle est égale à 4.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \{ \ln 4 \}$

On peut calculer une valeur approchée à la calculatrice avec la touche $\boxed{\ln}$.

Mais cela n'a guère d'intérêt dans cet exercice où seules les valeurs exactes présentent un intérêt.

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 3 = 0$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$S_2 = \{ \ln 3 \}$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x+2} = 2$ (3).**

(3) $\Leftrightarrow x+2 = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 - 2$ (cette écriture doit être comprise comme $(\ln 2)-2$)

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$S_3 = \{\ln 2 - 2\}$

d. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x} + 3 = 0$ (4).**

(4) $\Leftrightarrow e^{3x} = -3$ (impossible)

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$S_4 = \varnothing$

e. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^x - 3 = 0$ (5).**

(5) $\Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln \frac{3}{2}$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$S_3 = \left\{\ln \frac{3}{2}\right\}$

f. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-1}=5$ (6).**

(6) $\Leftrightarrow 2x-1=\ln 5$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 5+1}{2}$

Soit S_6 l'ensemble des solutions de (6).

$$S_6=\left\{\frac{\ln 5+1}{2}\right\}$$

g. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(e^x-1\right)\left(e^x-2\right)=0$ (7).**

(7) $\Leftrightarrow e^x-1=0$ ou $e^x-2=0$

$\Leftrightarrow e^x=1$ ou $e^x=2$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\ln 2$

Soit S_7 l'ensemble des solutions de (7).

$$S_7=\{0\,;\ln 2\}$$

$\boxed{33}$ Résolutions d'inéquations avec exponentielles

a. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \leqslant 7$ (1).**

(1) $\Leftrightarrow x\leqslant \ln 7$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1=\left]-\infty\,;\ln 7\right]$$

b. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2-e^{-x}<0$ (2).**

(2) $\Leftrightarrow 2<e^{-x}$

$\Leftrightarrow \ln 2<-x$

$\Leftrightarrow -\ln 2>x$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\left]-\infty\,;-\ln 2\right[$$

c. **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{5x}>8$ (3).**

(3) $\Leftrightarrow e^{5x}>8$

$\Leftrightarrow 5x>\ln 8$

$\Leftrightarrow x>\dfrac{\ln 8}{5}$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$S_3=\left]\frac{\ln 8}{5}\,;+\infty\right[$$

$\boxed{34}$ Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système (I) $\begin{cases} e^x+e^y=5 \\ e^x-e^y=1 \end{cases}$.

Le système (I) n'est pas linéaire à cause des exponentielles.

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} e^x=3 \\ e^y=2 \end{cases}$ (addition membre et division par 2 ; soustraction membre et division par 2)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln 3 \\ y=\ln 2 \end{cases}$

Soit S l'ensemble des solutions de (I).

$S=\{(\ln 3\,;\ln 2)\}$

Rappel :

On considère un système de la forme $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$. Ce système est équivalent à $\begin{cases} f(x,y)+g(x,y)=0 \\ f(x,y)-g(x,y)=0 \end{cases}$.

Autre méthode :

On effectue le changement d'inconnues $X=e^x$ et $Y=e^y$.
On obtient alors un système linéaire.

On trouve les valeurs exactes des solutions. On ne donne pas de valeurs approchées.

Classification des exercices sur la fonction exponentielle (1)

1 à **8**	Propriétés algébriques de la fonction exponentielle
9 à **23**	Équations-inéquations avec exponentielles Étude de signes d'expressions avec des exponentielles
24 à **26**	Calculs de dérivées
27 , **29** , **30**	Étude de variations de fonctions définies par des expressions faisant intervenir l'exponentielle.
32 à **34**	Utilisation du logarithme népérien

Pour la résolution des équations et inéquations avec exponentielle, les équations et inéquations doivent toujours être « équilibrées » (avec deux exponentielles de chaque côté).
On pourra remarquer que c'est la même chose pour les équations trigonométriques avec des cosinus ou des sinus.