TS1 spécialité

Contrôle du mercredi 10 octobre 2012 (60 minutes)

- **Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.**
- **Ne rien écrire, ne rien surligner sur l'énoncé.**
- **Conserver l'énoncé à la fin du contrôle.**
- **Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.**

I. (6 points)

1°) Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$.
Justifier soigneusement.

2°) Soit m un entier naturel strictement supérieur à 4.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $7m+16$ par $2m+3$.

II. (7 points)

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\dfrac{3n^2+7n}{n+4}=3n-5+\dfrac{20}{n+4}$.

2°) Déterminer les entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^2+7n}{n+4}$ soit un entier naturel.

III. (7 points)

Soit a et b deux nombres entiers naturels tels que $0<b<a$.
Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste r.
On sait que $a+b=86$ et que $r=9$.

Déterminer le couple $(a\,;b)$ (on attend donc les valeurs de a et b…).

Corrigé du contrôle du 10-10-2012

I.

1°) $n \in \mathbb{N}^*$

Déterminons le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$.

On a : $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$.

Donc on peut écrire $(n+2)^2 = n(n+4) + 4$ (1).

Or $n \in \mathbb{N}^*$ par hypothèse donc $n > 0$.

Donc $n + 4 > 4$.

Par conséquent, l'égalité (1) est l'égalité qui définit la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$ est 4.

2°) $m \in \mathbb{N}$, $m > 4$

Déterminons le reste de la division euclidienne de $7m+16$ par $2m+3$.

On peut écrire : $7m + 16 = 3(2m+3) + m + 7$ (2).

Comparons $m+7$ et $2m+3$.

$2m + 3 - (m+7) = m - 4$

Or $m > 4$ par hypothèse donc la différence est strictement positive ; par suite $m + 7 < 2m + 3$.

On peut en déduire que l'égalité (2) est l'égalité qui définit la division euclidienne de $7m+16$ par $2m+3$.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de $7m+16$ par $2m+3$ est $m+7$.

II.

1°) **Démontrons que pour tout entier naturel n on a : $\frac{3n^2+7n}{n+4} = 3n-5+\frac{20}{n+4}$.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 3n-5+\frac{20}{n+4} = \frac{(3n-5)(n+4)+20}{n+4}$$

$$= \frac{3n^2+7n-20+20}{n+4}$$

$$= \frac{3n^2+7n}{n+4}$$

2°) **Déterminons les entiers naturels n tels que $\frac{3n^2+7n}{n+4}$ soit un entier naturel.**

On peut tout d'abord remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{3n^2+7n}{n+4} \geqslant 0$.

$$\frac{3n^2+7n}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{20}{n+4} \text{ est un entier naturel}$$

$$\Leftrightarrow n+4 \mid 20$$

Or $\mathcal{D}^+(20) = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\,;\,10\,;\,20\}$.

$$\frac{3n^2+7n}{n+4} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n+4=1 \\ \text{ou} \\ n+4=2 \\ \text{ou} \\ n+4=4 \\ \text{ou} \\ n+4=5 \\ \text{ou} \\ n+4=10 \\ \text{ou} \\ n+4=20 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=-3 \text{ (impossible)} \\ \text{ou} \\ n=-2 \text{ (impossible)} \\ \text{ou} \\ n=0 \\ \text{ou} \\ n=1 \\ \text{ou} \\ n=6 \\ \text{ou} \\ n=16 \end{array} \right.$$

Conclusion : Les valeurs de n cherchées sont 0, 1, 6, 16.

Autre méthode :

On pourrait aussi raisonner par implications.
Resterait à faire une étape de vérification.

III.

Soit a et b deux nombres entiers naturels tels que $0 < b < a$.
Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste r.
On sait que $a + b = 86$ et que $r = 9$.

Déterminons le couple (a ; b).

On a : $a = bq + 9$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $9 < b$.

On sait que $a + b = 86$ donc $bq + 9 + b = 86$.

Donc $b(q+1) = 77$.

Cette dernière égalité permet d'affirmer que b et $q+1$ sont des diviseurs positifs associés de 77.

On a donc $\mathcal{D}^+(77) = \{1\,;7\,;11\,;77\}$.

Or $b > 9$ donc $b = 11$ ou $b = 77$.

Si $b = 11$, alors $q + 1 = 7$ soit $q = 6$ d'où $a = 6 \times 11 + 9 = 75$.

Si $b = 77$, alors $q + 1 = 1$ soit $q = 0$ donc $a = 9$ ce qui est impossible puisque $9 < b < a$.

Conclusion : Le couple (a ; b) est (75 ; 11).