TS Exercices sur droites et plans de l'espace

Figures des exercices

Pour chaque exercice, faire une figure assez grande, soignée, à la règle.

Pour certains exercices, il est demandé de faire plusieurs figures. Pour d'autres, ce n'est pas demandé mais il est conseillé d'en faire plusieurs…

On gardera en tête que, dans certains exercices, on peut seulement faire une figure approximative au début de l'exercice, la figure exacte ne pouvant être exécutée qu'après la résolution de l'exercice (par exemple, après avoir démontré que des points sont alignés). C'est l'une des spécificités de la géométrie dans l'espace.

Avant de commencer les exercices, lire les consignes à la fin de l'énoncé des exercices.

1 Soit ABCDEFGH un cube.
On note I, J, K, L les milieux respectifs de [AD], [BC], [EF], [GH].
Recopier et compléter sans justifier par $\in$ ou $\notin$:

E … (ABF) F … (ABG) K … (EFG) J … (BEH) A … (BHI)

2 Soit ABCDEFGH un cube.
On note I, J, K, L les milieux respectifs de [AD], [BC], [EF], [GH].
Dire pour chacune si les droites sont sécantes, parallèles ou non coplanaires.

(AE) et (BF) (EH) et (CG) (AI) et (DJ) (KL) et (BC) (AB) et (FH)

3 Soit ABCDEFGH un cube.
Soit M un point quelconque de]EH[et N un point quelconque de]GH[.

On rappelle que]EH[désigne le segment ouvert d'extrémités E et H. Autrement dit, il s'agit du segment [EH] privé des extrémités. Le point M appartient au segment mais ne peut pas être en E ou H.

Étudier la position relative des droites. On ne demande pas de justifier.

1°) (MN) et (FG) 2°) (AM) et (CG) 3°) (FM) et (EN) 4°) (AN) et (BH) 4°) (FM) et (AN)

4 Soit ABCDEFGH un cube.
Soit I un point de la demi-droite [AB) n'appartenant pas au segment [AB].
Les droites (DI) et (AC) se coupent en J.
On note K un point quelconque de]CG[.
Les droites (CE) et (AK) se coupent en L.
Citer tous les points de la figure qui appartiennent
✶ au plan (ABC) ;
✶ au plan (ABF) ;
✶ au plan (ACE) ;
✶ au plan (CDH).

5 Soit ABCDEFGH un cube.
Soit M un point quelconque de]BF[(il s'agit d'un segment ouvert donc M est distinct de B et F).
Construire le point d'intersection I de la droite (MH) et du plan (ABC).

6 Soit ABCDEFGH un cube.
Dans chaque cas, déterminer si les plans sont sécants ou parallèles.
Lorsqu'ils sont sécants, préciser la droite d'intersection.

1°) (AEF) et (BCG) 2°) (ABF) et (CDG) 3°) (ACE) et (EFG) 4°) (ABC) et (ACD)

7 Soit ABCD un tétraèdre (c'est-à-dire une pyramide à base triangulaire).
Soit I un point quelconque de [CD] et J un point quelconque de [AB].
Déterminer l'intersection des plans (ABI) et (CDJ).

8 Soit ABCDEFGH un cube.
Déterminer l'intersection des plans (AEC) et (BFD).

9 Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O.
Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD).

10 Soit ABCDEFGH un cube.
Déterminer l'intersection des plans (AFC) et (BEG).

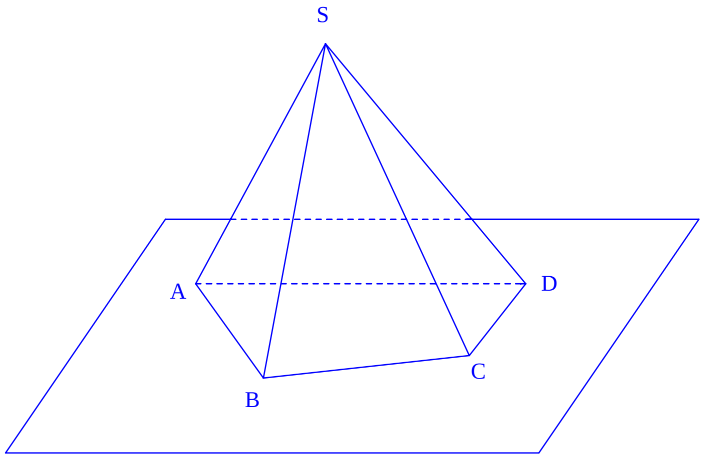
11 Soit ABCD un tétraèdre.
Soit I un point quelconque de [AB] et J un point quelconque de [BC].
Déterminer l'intersection des plans (CDI) et (ADJ).

12 Soit ABCDEFGH un cube.
Soit M un point quelconque de [BF].
1°) Construire le point d'intersection I de (EM) et (AB).
2°) Construire le point d'intersection J de (GM) et (BC).
3°) Déterminer la droite d'intersection des plans (ABC) et (EGM).

13 Une droite D coupe (ou « perce ») un plan P en un point O.
Soit A et B deux points de D tels que O est entre A et B.
Soit M un point tel que (MA) coupe P en I et (MB) coupe P en J.
Faire une figure approximative de la situation au brouillon.
1°) Justifier que les points O, I, J appartiennent au plan (MAB).
2°) Les points O, I, J sont-ils alignés ?
Faire enfin une figure juste en tenant compte du résultat établi.

Le mot « perce » est synonyme de « coupe ».

$\boxed{\textbf{14}}$ Soit SABCD une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un quadrilatère quelconque.



Reproduire la figure et tracer la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD).

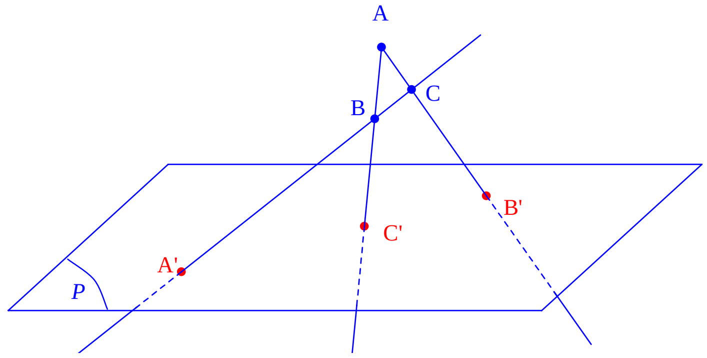
$\boxed{\textbf{15}}$ Représenter un prisme droit de bases ABC et DEF.
Tracer la droite d'intersection des plans (AEC) et (BDF).

$\boxed{\textbf{16}}$ Soit ABCD un tétraèdre.
On note M, N, P des points appartenant respectivement à [AB], [AC], [AD] tels que (MN) ne soit pas parallèle à (BC) et (NP) ne soit pas parallèle à (CD).
Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (BCD).

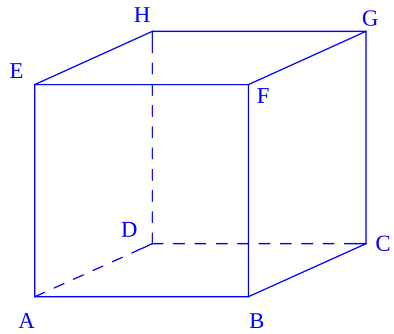
$\boxed{\textbf{17}}$ Soit ABCD un tétraèdre.
On note M un point quelconque de [BD] et N un point quelconque de [CD].
Déterminer l'intersection du plan (AMN) avec les plans (ABD), (ACD) et (BCD).

$\boxed{\textbf{18}}$ Soit ABCDEFGH un cube.
On note O le centre de la face ABFE.
Construire le point d'intersection I de la droite (OH) avec le plan (ABC).

$\boxed{\textbf{19}}$ Soit P un plan de l'espace et A, B, C trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P.
On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'.
Faire une figure approximative pour commencer.
Démontrer que les points A', B', C' sont alignés.
Refaire la figure au propre en tenant compte du résultat qui vient d'être établi.

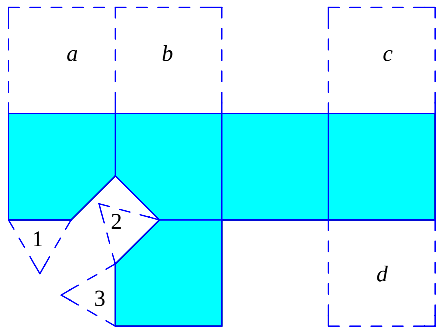


$\boxed{\textbf{20}}$ Soit ABCDEFGH un cube.
Soit I un point quelconque de]AE[et J un point quelconque de]BF[.
Le plan (HIJ) coupe le plan (ABC) selon une droite Δ.
Représenter Δ sur une figure en perspective cavalière.

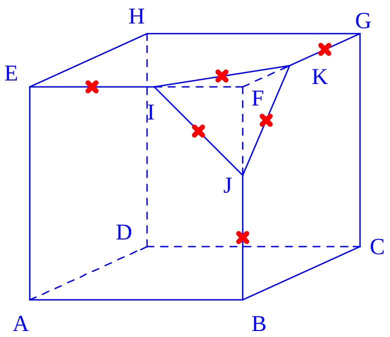


$\boxed{\textbf{21}}$ Soit ABCDEFGH un cube.
On considère trois points I, J, K appartenant respectivement aux côtés [EF], [BF], [GF] tels que $FI = FJ = FK$.
On tronque le cube en enlevant la pyramide FIJK.

1°) Où doit-on placer le carré et le triangle manquants pour obtenir un patron du cube tronqué ?



Dans les deux questions qui suivent, on suppose de plus que IJ = JK = KI = EI = KG = JB .
On note *a* l'arête du cube.



2°) • Calculer la longueur EI en fonction de *a*.

• Construire sur une page complète un patron du cube tronqué en prenant 4 cm pour arête du cube.

• Réaliser le patron sur une feuille de papier blanc. Le découper et vérifier qu'il « fonctionne » bien.

3°) On admet que $IJ = \left(2-\sqrt{2}\right)a$.
Exprimer le volume du cube tronqué en fonction de *a*.

22 Soit ABCDEFGH un cube.
Démontrer que (BEG) / / (ACH).
Citer le théorème utilisé.

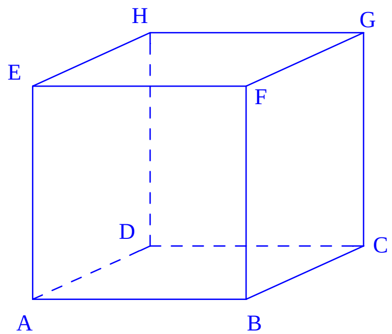
23 Soit ABCD un tétraèdre.
On note I, J, K les milieux respectifs des segments [DA], [DB], [DC].
Démontrer que (IJK) // (ABC).
Citer le théorème utilisé.

24 Soit ABCDEFGH un cube.
Le plan (BEG) coupe le plan (ABC) selon une droite Δ.
1°) Déterminer un point de Δ.
2°) Démontrer que Δ // (EG).
3°) Tracer Δ sur une figure en perspective cavalière.

25 Soit SABCD une pyramide régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré.
Déterminer la droite d'intersection Δ des plans (SAB) et (SCD).

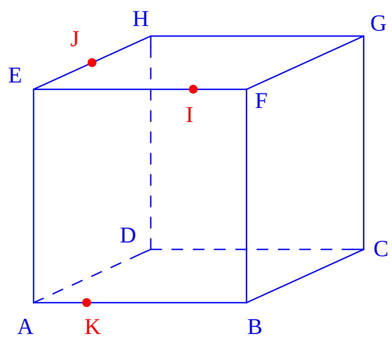
26 Soit D et D' deux droites de l'espace contenues dans un plan P et sécantes en un point A.
Soit M un point n'appartenant pas au plan P.
On note Q le plan défini par le point M et la droite D et Q' le plan défini par le point M et la droite D'.
Pourquoi les plans Q et Q' sont-ils sécants ? Quelle est l'intersection de Q et Q' ?

27 On considère un cube ABCDEFGH.
Soit U un point de]AB[et V un point de]AE[.
Citer sans justifier deux droites définies par des arêtes, autres que (AB) et (AE), que rencontre la droite (UV).

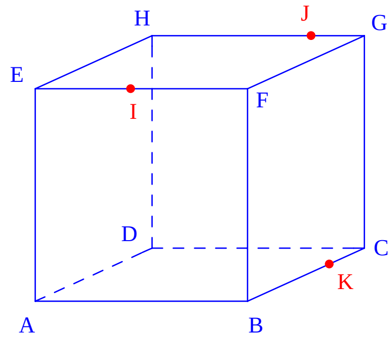


28 Dans chaque cas, reproduire la figure et tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).
On nommera les points de construction.
On n'est pas obligé de numéroter les étapes.

I ∈ [EF] ; J ∈ [EH] ; K ∈ [AB]

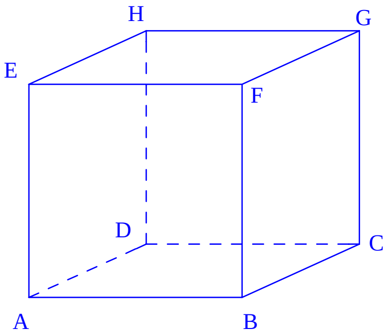


I ∈ [EF] ; J ∈ [GH] ; K ∈ [BC]

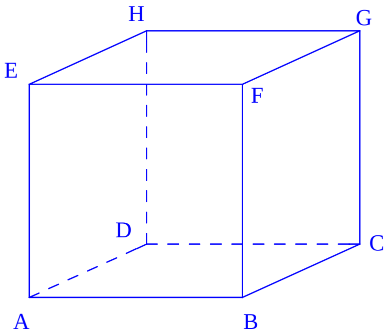


$\boxed{29}$ Dans chaque cas, représenter un cube ABCDEFGH et placer les points M et N comme indiqué dans chaque cas.
Construire la section du cube par le plan (AMN).

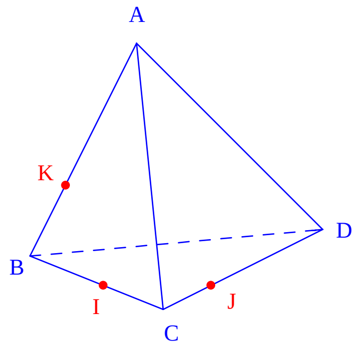
1er cas : M $\in$]BC[et N$\in$]EF[



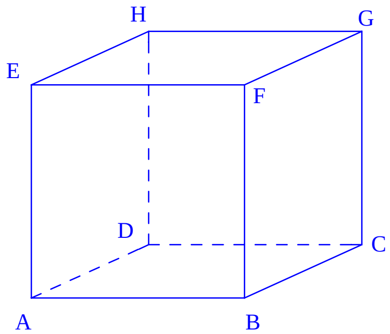
2e cas : M $\in$]BC[et N$\in$]GH[



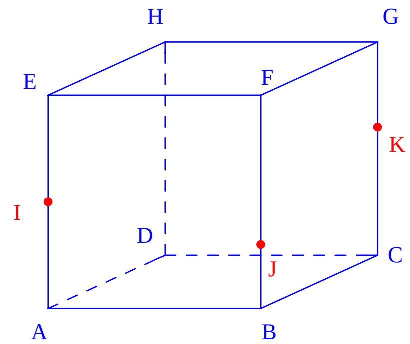
$\boxed{30}$ Reproduire la figure ci-dessous et tracer la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).



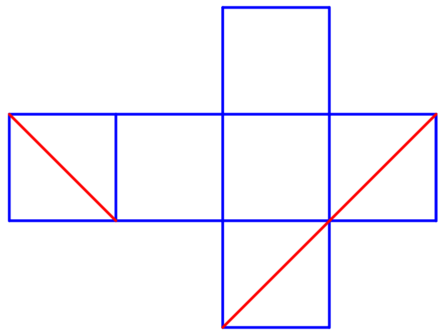
$\boxed{31}$ Soit ABCDEFGH un cube et I un point fixé de]AB[.
Reproduire la figure et tracer la section du cube par le plan (ICH).

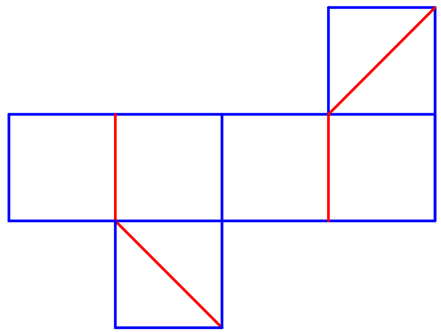


$\boxed{32}$ Reproduire la figure du cube ci-dessous tracer la section par le plan (IJK).

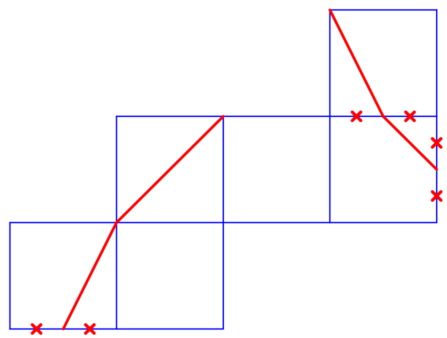


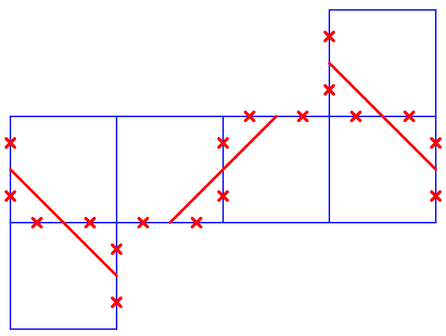
$\boxed{33}$ Dans chaque cas, on a dessiné le patron d'un cube et, en rouge, l'intersection d'un plan *P* avec les faces du cube.
Reproduire les patrons.
Déterminer la nature de la section du cube par le plan *P* et, toujours en rouge, la représenter sur une figure en perspective du cube.



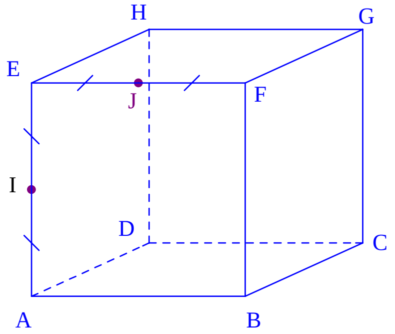


$\boxed{34}$ Même exercice que le précédent.





35 Soit ABCDEFGH un cube d'arête a. On note I le milieu de [AE] et J le milieu de [EF].
Une fourmi se déplace sur les faces du cube entre le point I (départ) et le sommet G (arrivée).



1°) On considère les trajets suivants.

Trajet 1 : constitué des segments $[IJ]$ et $[JG]$.

Trajet 2 : constitué des segments $[IF]$ et $[FG]$.

Lequel de ces deux trajets est le plus long ?

2°) La fourmi emprunte à présent le trajet (chemin) le plus court de I à G.
Calculer la distance parcourue par la fourmi en fonction de a.
Indication : Penser au patron du cube.

36 Soit ABCDEFGH un pavé droit.
Déterminer la position de la droite (FG) par rapport au plan (BCH).

37 **La « section impossible »**

Soit ABCDEFGH un cube et I, J, K trois points appartenant respectivement à $]AE[$, $]BC[$, $]GH[$.

Tracer la section du cube par le plan (IJK).
On pourra éventuellement s'aider de *Geogebra 3D*.

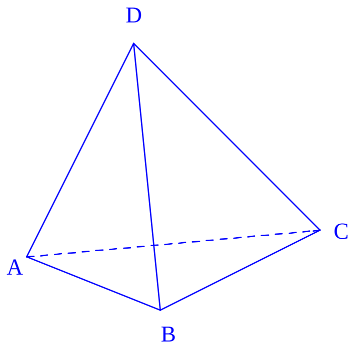
38 Soit ABCDEFGH un cube. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Démontrer que les points I, J, G, E sont coplanaires.

39 **Section d'un cube de périmètre constant**

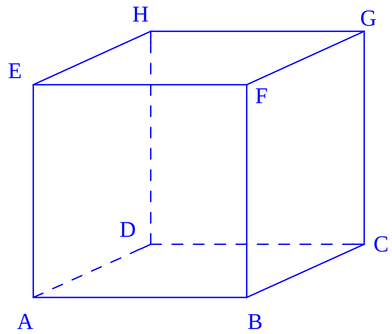
Voir DM de terminale S 12-11-2012

Disposition des points pour un tétraèdre ou pour un cube

Tétraèdre



Cube



La droite des milieux dans un triangle quelconque.

Corrigé

De nombreux exercices font appel aux constructions (vision dans l'espace et éventuellement raisonnement) avec explications écrites ou non.
Quelques exercices portent sur des démonstrations (avec ou sans utilisation des théorèmes de parallélisme).

• Faire une figure assez grande pour chaque exercice (un cube pour chaque exercice).
Attention à la disposition des points dans un cube.

• Pour chaque exercice, écrire les hypothèses au sens mathématique, c'est-à-dire les données (ABDEFGH : cube ; I : milieu de …) sous forme d'une liste en écrivant une hypothèse par ligne.

Dans la rédaction, on utilisera les symboles d'appartenance ($\in$) ou d'inclusion ($\subset$).

On veillera cependant à les utiliser correctement.

Exemples :

A est un point, *D* une droite et *P* un plan.

$A \in D$ (le point A appartient à la droite *D*)
$A \in P$ (le point A appartient au plan *P*)
$D \subset P$ (la droite *D* est incluse dans le plan *P*)

Le symbole d'inclusion $\subset$ ne s'emploie que dans ce cas (inclusion d'une droite dans un plan).

Types d'exercices :

• Problèmes d'appartenance, positions relatives de droites et de plans

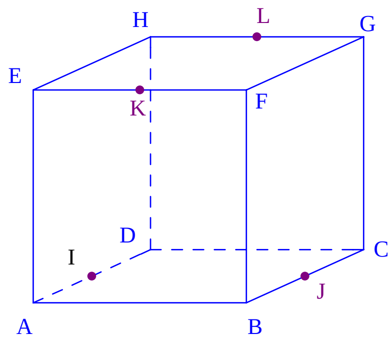
• Ex. de construction (avec raisonnement, il s'agit la plupart du temps de problèmes d'intersection)

• Démonstrations (utilisation des théorèmes)

1 Appartenance de points à des plans

ABCDEFGH : cube
I : milieu de [AD]
J : milieu de [BC]
K : milieu de [EF]
L : milieu de [GH]

Faire une figure (on pourrait coder les milieux, nous ne l'avons pas fait ici).



$E \in (ABF)$ $F \notin (ABG)$ $K \in (EFG)$ $J \in (BEH)$ $A \notin (BHI)$

On peut détailler un peu. Il faut voir le plan (ABF). Il s'agit d'un plan défini par les points A, B, F.
Ce plan « contient » aussi le point E.
Il est illimité (ou infini). On peut le voir comme une feuille de papier.

Cet exercice s'appuie sur la vision dans l'espace et un peu aussi sur le raisonnement.

Exemple :

Le plan (BEH) est le plan contenant les points B, C, E, H.
J appartient à (BC).
(BC) est incluse dans (BEH) donc J appartient à (BEH).

Pour représenter le plan (BHI), on trace les segments $[BH]$, $[HI]$ et $[BI]$ en pointillés.

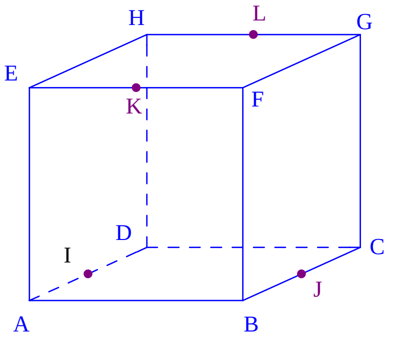
Il peut être intéressant de colorier les plans pour mieux visualiser.

Figure avec le plan (ABG)

$\boxed{2}$ Positions relatives de droites dans l'espace

ABCDEFGH : cube
I : milieu de [AD]
J : milieu de [BC]
K : milieu de [EF]
L : milieu de [GH]

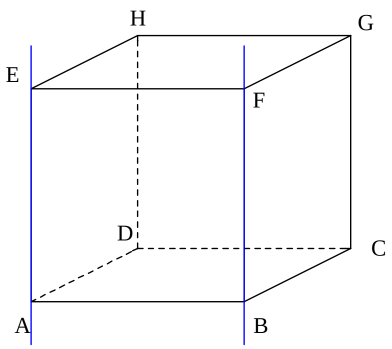
Faire une figure.



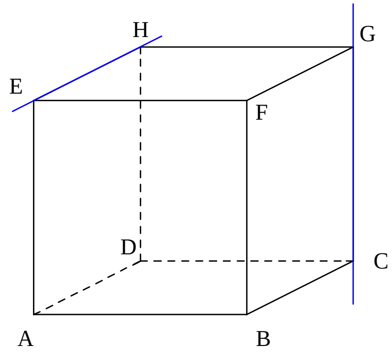
Dans chaque cas, on doit déterminer la position relative des deux droites.

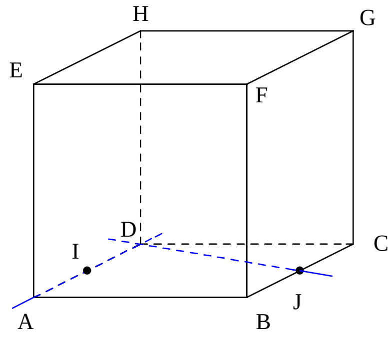
Il faut se représenter les droites de manière à savoir, si on les prolonge, si elles se coupent ou pas.

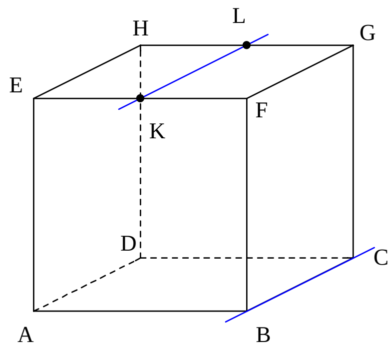
- (AE) et (BF) sont **parallèles (strictement parallèles)**.
- (EH) et (CG) sont **non coplanaires**. (démonstration par l'absurde)
- (AI) et (DJ) sont **sécantes** (en D).
- (KL) et (BC) sont **parallèles (strictement parallèles)**. à justifier
- (AB) et (FH) sont **non coplanaires**.

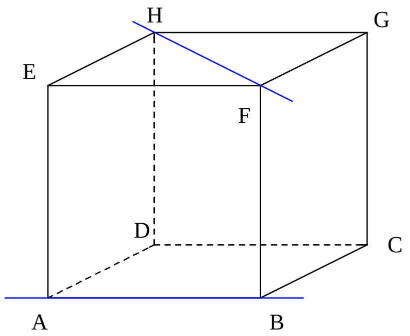


Justification pour (AE) et (BF) :
La face ABFE est un carré.
Propriété : Les supports des côtés d'un carré sont strictement parallèles.









Le mercredi 17 novembre 2021

On peut dire que (EH) et (CG) sont orthogonales.
On le verra dans un autre chapitre.

Le 24 novembre 2022

Les droites (EH) et (CG) ne sons pas coplanaires.

Daphné Baubion : « Il n’existe pas de surface plane qui les contienne toutes les deux ».

(KL) .// (FG) et (FG) // (BG) donc (KL) // (BG) propriété du cours sur les droites

Le 7 nov 2023

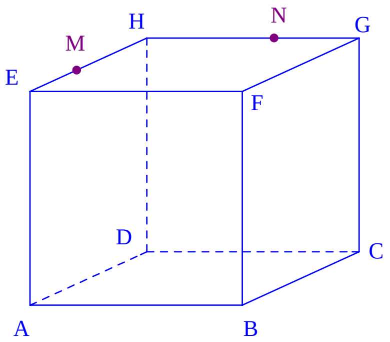
plans (ABG) et (ABC) : angle de 45°

$\boxed{3}$ Positions relatives de droites dans l’espace

Faire une figure.

M est un point quelconque de]EH[

N est un point quelconque de]GH[.



• Les droites (MN) et (FG) sont coplanaires et sécantes.

• Les droites (AM) et (CG) ne sont pas coplanaires.

• Les droites (FM) et (EN) sont coplanaires et sécantes.

• Les droites (AN) et (BH) sont coplanaires et sécantes.

• Les droites (FM) et (AN) ne sont pas coplanaires.

N.B. : Deux droites sécantes sont forcément coplanaires.

Les droites (AN) et (BH) sont toutes les deux contenues dans le plan qui « contient » les points A, B, G, H.

Les droites (AN) et (BH) sont incluses dans le plan qui « contenant » les points A, B, G, H.

Le mercredi 17 novembre 2021

Les droites (AN) et (BH) sont coplanaires (elles sont tracées dans le plan (ABGH)).

Figure avec le plan (ABG)

Le jeudi 18 novembre 2021

T6 et T7 spécialité

• (MN) et (FG)

Les points M, N, F, G sont dans le plan (EFG) donc les droites (MN) et (FG) sont coplanaires.
De plus, on observe sur la figure que les droites (MN) et (FG) sont sécantes.

N. B. à propos de (EFG) (questions d’élèves)

Un plan est noté par trois points. C’est considéré comme toute la surface.
Les trois points sont choisis au hasard.

• (AM) et (CG)

(AM) est incluse dans le plan (ADH).
(CG) est incluse dans le plan (BCG).
Or les plans (ADH) et (BCG) sont strictement parallèles (d’intersection vide).
Donc (AM) et (CG) ne se rencontrent pas.

On rappelle la propriété suivante :

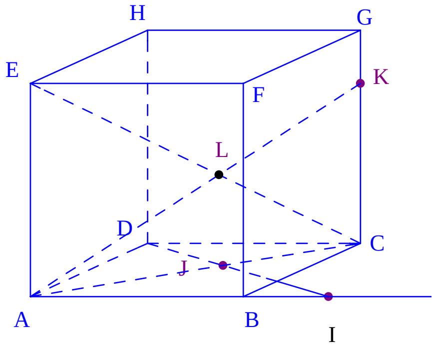
Si deux droites sont sécantes, alors elles sont coplanaires.
La contraposée est donc vraie : « Si deux droites ne sont pas coplanaires, alors elles ne sont pas sécantes ».

Le 24 novembre 2022

Il faut s’imaginer.

Les droites (AM) et (CG) ne sont pas coplanaires.
Si on les prolonge sur la figure, elles se coupent mais pas dans la réalité.

$\boxed{4}$ **Figure**



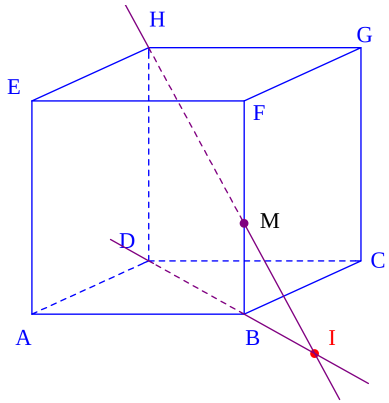
I ∈ [AB)
I ∉ [AB]
$(DI)\cap(AC)=\{J\}$ (notation à connaître)
$K\in[CG]$
$(CE)\cap(AK)=\{L\}$

- A, B, C, D, I, J appartiennent au plan (ABC)
- A, B, F, E, I appartiennent au plan (ABF)
- A, C, G, E, J, K, L appartiennent au plan (ACE)
- C, D, H, G, K appartiennent au plan (CDH)

Pour le plan (ABC), on donne quand même les points A, B, C, même s'ils sont « évidents ».

$\boxed{5}$

ABCDEFGH : cube
M : point quelconque de $]BF[$
Construisons le point d'intersection I de la droite (MH) et du plan (ABC).



On va travailler dans le plan qui contient les points B, D, H, F.
On effectue un tracé hors du cube.

Méthode notée par Valentine Tuloup (élève de 2^e^ à Saint-Jean-de-Béthune) le mardi 11 juin 2018

Quand on cherche l'intersection d'une droite et d'un plan, on va prolonger avec une droite du plan pour que les deux droites soient sécantes en un point, c'est l'intersection de la droite et du plan.

J'ai complété :
On cherche une droite du plan (ABC) qui vient couper la droite (MH).
Il faut imaginer la situation dans l'espace. On trouve la droite (BD). En fait, il n'y a que cette droite passant par des points connus du plan (ABC) (à savoir A, B, C, D) qui coupe la droite (MH).

L'intersection d'une droite et d'un plan non parallèle est un point.

On obtient le point d'intersection de (MH) et de (ABC) en prolongeant la droite (MH) et la droite (BD) (tracé hors solide).
On construit l'intersection des droites (MH) et (BD) qui sont deux droites coplanaires sécantes.

Point-méthode :

Pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, on se ramène toujours à une intersection de deux droites.

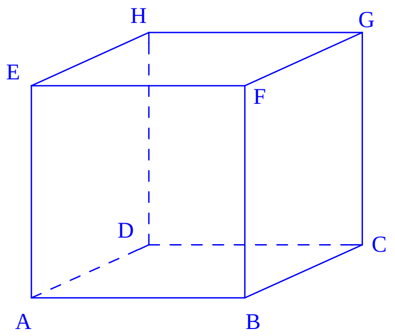
droite-plan → droite-droite

Le 24 novembre 2022

représenter le plan de la face BDHF en jaune
On prolonge les droites (BD) et (MH).
Les droites (MH) et (AB) ne sont pas sécantes (non coplanaires).
Les droites (MH) et (BC) ne sont pas sécantes (non coplanaires).

Question : représenter le plan (MEH) → pas possible
juste un triangle

$\boxed{6}$ Intersections de plans dans un cube



Dans chaque question, on doit déterminer la position relative des deux plans.

1°) (AEF) et (BCG) sont sécants selon la droite (BF). $\boxed{\text{ou}}$ (AEF) et (BCG) se coupent selon la droite (BF).

Notation à connaître :
On peut écrire : $(\text{AEF}) \cap (\text{BCG}) = (\text{BF})$ [égalité d'ensembles].

Justification :
Deux plans sécants se coupent selon une droite.
B et F sont deux points distincts communs aux deux plans.

2°) (ABF) et (CDG) sont strictement parallèles (il s'agit de plans définis par des faces opposées dans le cube).

On peut écrire : (ABF) // (CDG).

3°) (ACE) et (EFG) sont sécants selon la droite (EG).

On peut écrire : $(\text{ACE}) \cap (\text{EFG}) = (\text{EG})$ [égalité d'ensembles].

Justification : E et G sont deux points distincts communs aux deux plans.

4°) (ABC) et (ACD) sont confondus (et donc, en particulier, parallèles mais on ne le dit pas).

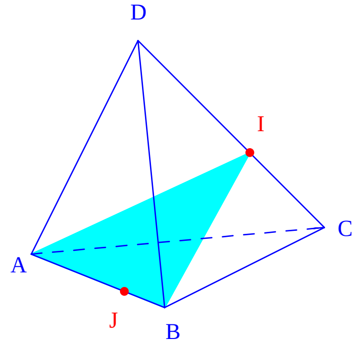
On peut aussi dire que les plans (ABC) et (ACD) sont égaux.
On peut écrire : (ABC) = (ACD).

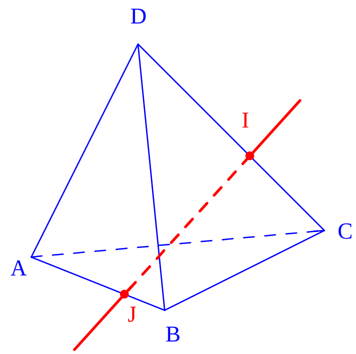
$\boxed{7}$

ABCD : tétraèdre
$\text{I} \in [\text{CD}]$
$\text{J} \in [\text{AB}]$

Déterminons l'intersection des plans (ABI) et (CDJ).

Il faut colorier les plans « triangulaires » pour plus de lisibilité.





Faire une figure avec les plans (ABI) et (CDJ) en couleur.

$\text{I} \in$ (ABI) de manière évidente.
$\text{J} \in$ (AB) donc $\text{J} \in$ (ABI).

$\text{J} \in$ (CDJ) de manière évidente.
$\text{I} \in$ (CD) donc $\text{I} \in$ (CDJ).

I et J appartiennent tous les deux aux plans (ABI) et (CDJ).
Or ce sont deux points distincts (car ils appartiennent à deux droites n'ayant aucun point commun).

Donc (ABI) et (CDJ) sont sécants selon la droite (IJ).

Autres formulations possibles (à connaître) :

- L'intersection des plans (ABI) et (CDJ) est la droite (IJ).

- $(\text{ABI}) \cap (\text{CDJ}) = (\text{IJ})$

Présentation pour faire apparaître les points communs :

(ABI) : A, B, I, J

(CDJ) : C, D, J, I

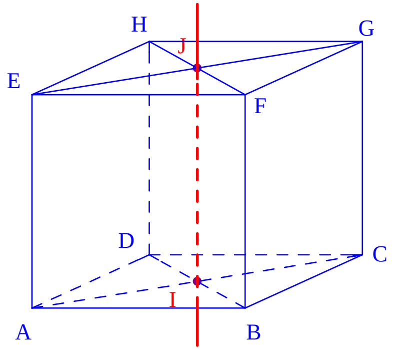
I et J sont deux points communs aux deux plans.

$I \neq J$ donc (IJ) est la droite d'intersection des plans (ABI) et (CDJ).

8

ABCDEFGH : cube

Déterminons l'intersection des plans (AEC) et (BFD).



On peut rajouter des points même si l'énoncé ne le dit pas.

Soit I le centre de la face ABCD et J le centre de la face EFGH.

L'intersection des plans (AEC) et (BFD) est la droite (IJ).

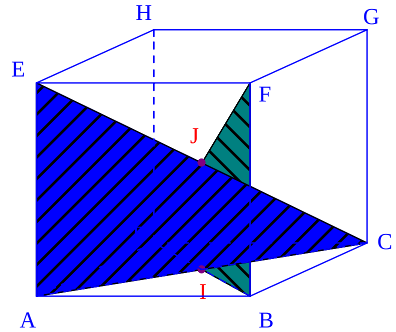
Autre méthode :

Sur la figure on représente les plans (AEC) et (BFD).

On note :
I le point d'intersection des droites (AC) et (BD) ;
J le point d'intersection des droites (EC) et (DF).

I est le centre de la face ABCD et J est le centre du cube ABCDEFGH.

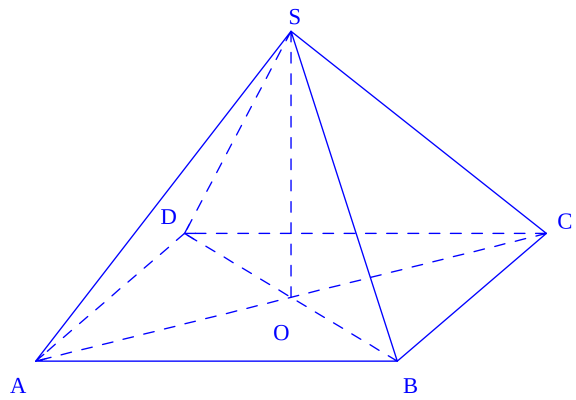
L'intersection des plans des plans (AEC) et (BFD) est la droite (IJ).



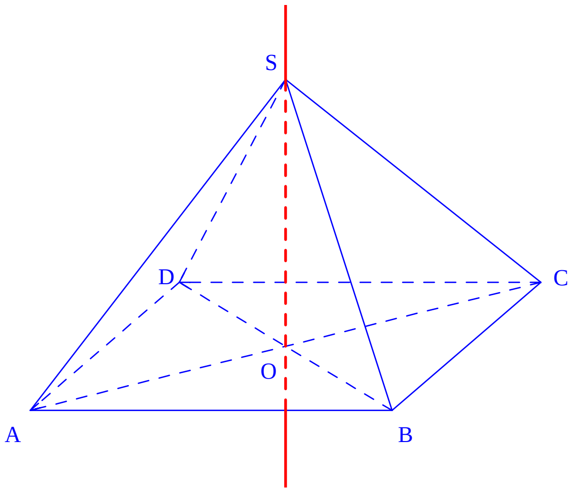
9

SABCD : pyramide régulière de sommet S dont la base ABCD est un carré de centre O

Faire une figure.



On utilise des couleurs pour visualiser les plans (SAC) et (SBD).

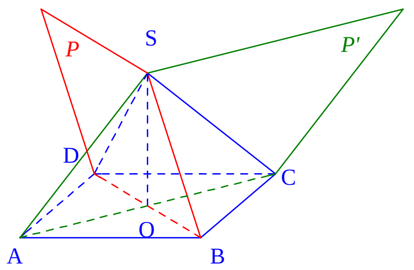


Les points S et O sont deux points communs aux plans (SAC) et (SBD).

Donc l'intersection des plans (SAC) et (SBD) est la droite (SO).

Gatien Devictor le 12-10-2015

Il a représenté les plans dont on cherche l'intersection sous la forme de parallélogrammes « pour mieux les voir ».



P : le plan (SBD)

P' : le plan (SAC)

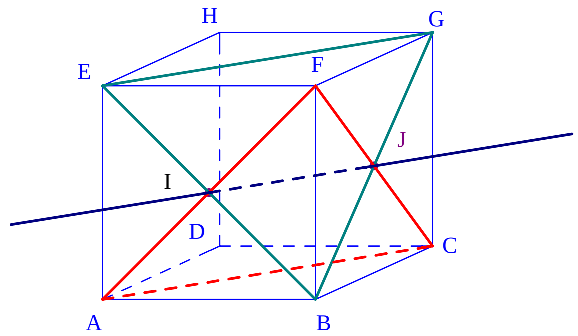
L'intersection de P et P' est la droite (SO).

Il a aussi tracé la droite (SO) en couleur.

$\boxed{10}$

ABCDEFGH : cube

Déterminons l'intersection des plans (ACF) et (BEG).



On note I le centre de la face ABFE et J le centre de la face BCGF.
Les points I et J sont deux points distincts appartenant aux plans (ACF) et (BEG) donc l'intersection de (ACF) et (BEG) est la droite (IJ).

On peut écrire $(\text{ACF})\cap(\text{BEG})=(\text{IJ})$.

Attention pour le tracé : la portion de droite entre I et J, c'est-à-dire le segment $[\text{IJ}]$ est en pointillés car elle est « cachée » (elle est à l'intérieur du cube).

$\boxed{11}$

ABCD : tétraèdre

I : point quelconque de [AB]

J : point quelconque de [BC]

Déterminons l'intersection des plans (CDI) et (ADJ).

Propriété à utiliser :

Si deux plans distincts P et Q ont un point A en commun, alors ils sont sécants et leur intersection est une droite passant par A.

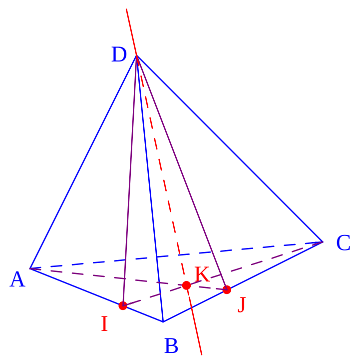
Les deux plans (CDI) et (ADJ) sont distincts.
Ils ont par ailleurs le point D en commun. Donc leur intersection est une droite passant par D.

On ne connaît alors qu'un seul point de cette droite.

On peut « créer » un point.
On note K le point d'intersection des droites (AJ) et (CI).

Le point K est un point commun aux plans (CDI) et (ADJ).

Comme D et K sont deux points communs aux plans (CDI) et (ADJ), on en déduit que $(\mathbf{ADJ}) \cap (\mathbf{DCI}) = (\mathbf{DK})$.

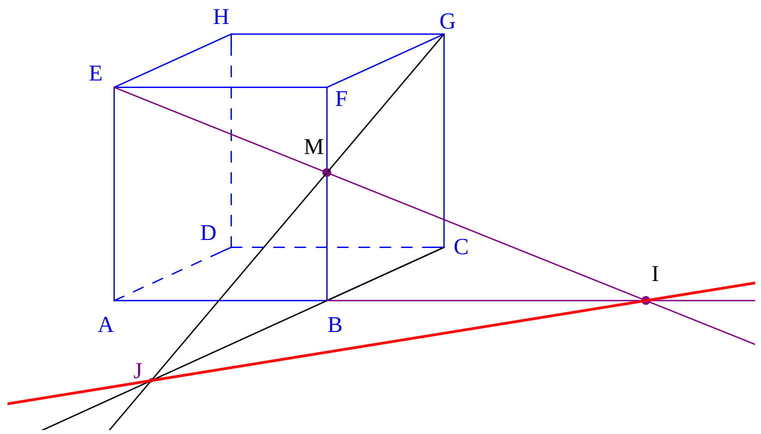


Le 11-10-2016

Lucile Costes (élève de TS1) est passée au tableau pour corriger les exercices et a dit :
« Nous allons matérialiser les plans (CDI) et (ADJ) ».
La même remarque s'applique pour l'exercice $\boxed{7}$.

$\boxed{\mathbf{12}}$

1°) et 2°) figure ci-dessous



3°) **La droite d'intersection des plans (ABC) et (EGM) est la droite (IJ)** (car I appartient à (AB) et (EM) et J appartient à (BC) et (GM)).

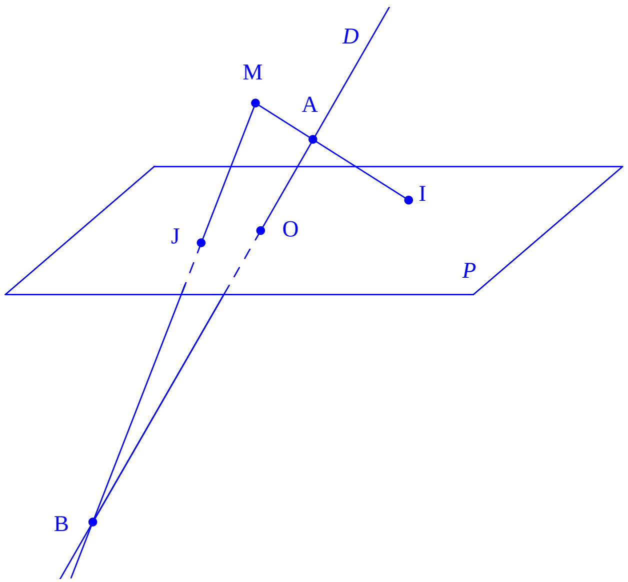
On peut observer un parallélisme : la droites (IJ) est parallèle à la droite (EG).
On utilise le théorème : « Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors les droites d'intersection son parallèles ».
On l'applique aux plans parallèles (ABC) et (EFG).

$\boxed{\mathbf{13}}$

« Dans tout l'exercice il n'y a pas de forme géométrique ? » (Maylis Lasri le 14-1-2015)
Le mot « perce » synonyme de « coupe ».

Figure

Il n'y a pas moyen de faire une figure exacte au départ.
Au départ, on fait juste une figure pour raisonner.
C'est seulement après le résultat qui va être démontré que l'on pourra faire une figure exacte.



1°) **Justifions que les points O, I, J appartiennent au plan (MAB).**

• Démontrons que $O \in (MAB)$.

Le point O appartient à la droite (AB).
A et B sont deux points du plan (MAB) donc tous les points de (AB) appartiennent à (MAB).
D'où $O \in (MAB)$.

• Démontrons que $I \in (MAB)$.

Le point I appartient à la droite (MA).
M et A sont deux points du plan (MAB) donc tous les points de (MA) appartiennent à (MAB).
D'où $I \in (MAB)$.

• Démontrons que $J \in (MAB)$.

Le point J appartient à la droite (MB).
M et B sont deux points du plan (MAB) donc tous les points de (MB) appartiennent à (MAB).

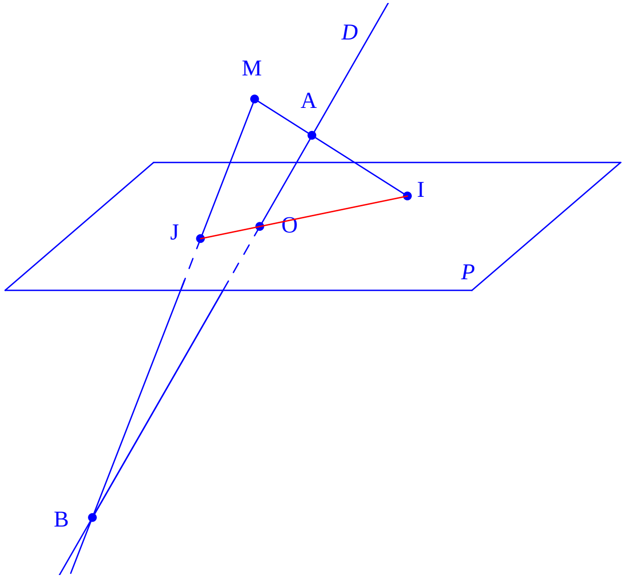
D’où $J \in (MAB)$.

2°) **Cherchons si les points O, I, J sont alignés.**

L’intersection de deux plans sécants est une droite.

Or O appartient à *P* et à (MAB), I appartient à *P* et à (MAB), J appartient à *P* et à (MAB).
Donc O, I et J appartiennent aux deux plans *P* et (MAB).
D’où O, I et J sont alignés sur la droite d’intersection des plans (MAB) et *P*.

Compte tenu de l’alignement que l’on vient de démontrer, on peut faire une figure exacte.



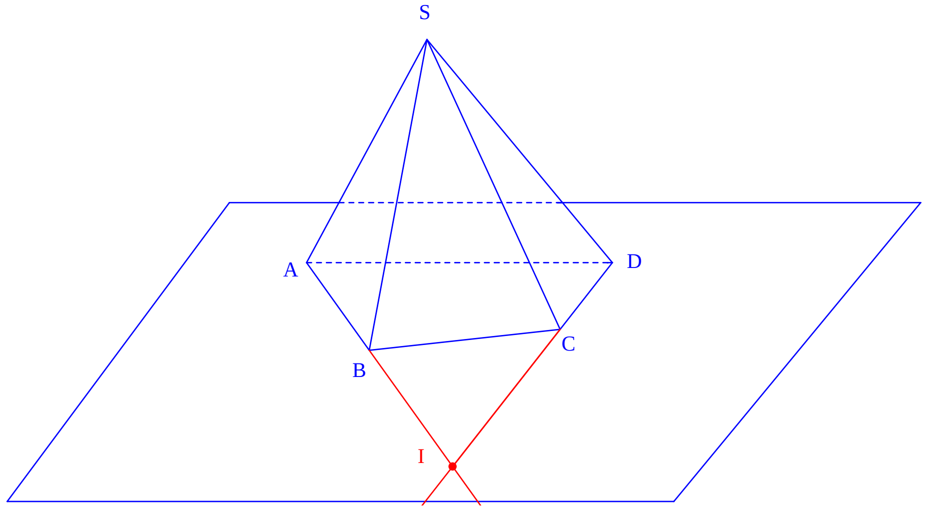
14

SABCD : pyramide de sommet S

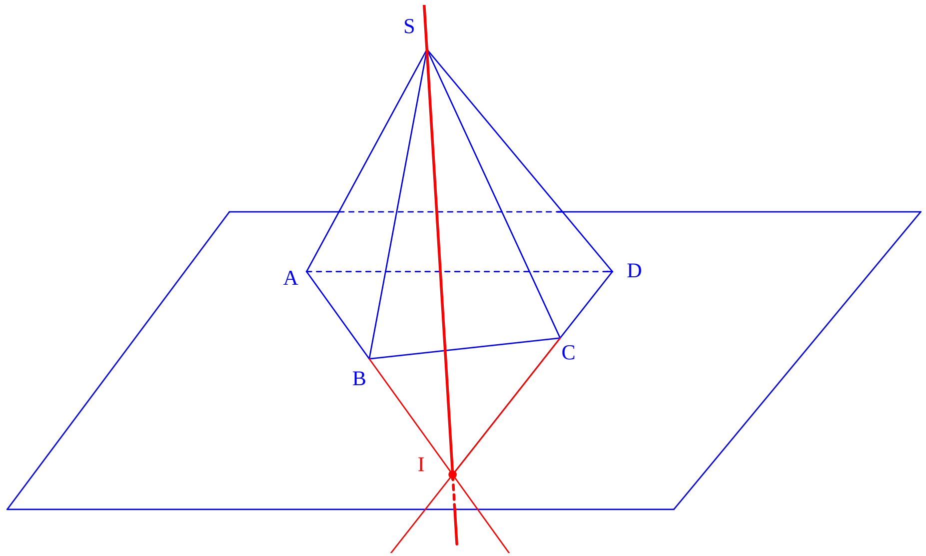
SABCD est une pyramide non régulière.

Déterminons l’intersection des plans (SAB) et (SCD).

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I.



L’énoncé ne dit pas que les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I (l’énoncé devrait dire que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles).
On le voit cependant sur la figure : on sait que si deux droites de l’espace sont parallèles, alors elles sont parallèles sur la représentation en perspective cavalière donc par contraposée, si deux droites de l’espace sont représentées par des droites non parallèles, alors ces deux droites ne sont pas parallèles (dans la réalité).

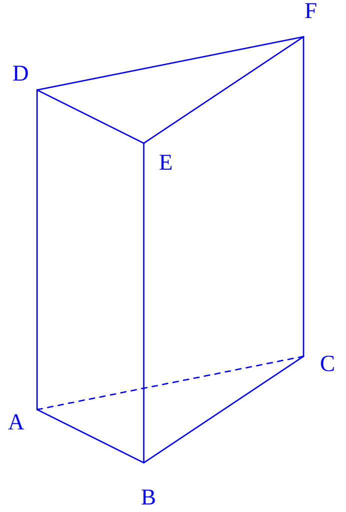


L’intersection des plans (SAB) et (SCD) est la droite (SI).

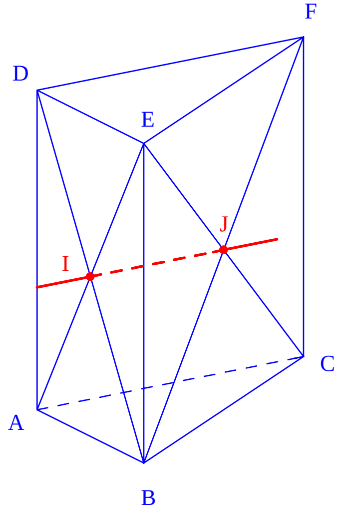
15

ABCDDEF : prisme droit de bases ABC et DEF

Traçons la droite d'intersection des plans (AEC) et (BDF).



En général, on s'arrange pour qu'il y ait trois faces visibles sur la représentation en perspective d'un prisme.



On note I et J les centres respectifs des faces ABED et BCFE.

La droite d'intersection des plans (AEC) et (BDF) est (IJ).

16

ABCD : tétraèdre

M $\in$ [AB]

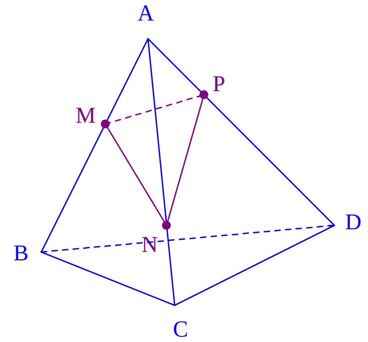
N $\in$ [AC]

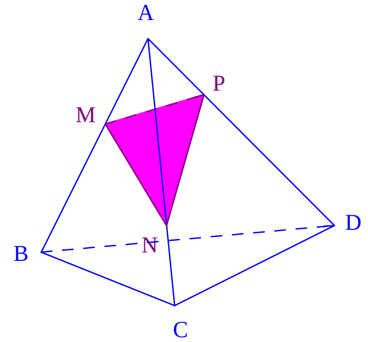
P $\in$ [AD]

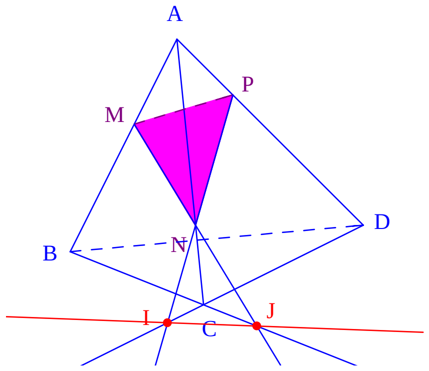
(MN) $\nparallel$ (BC)

(NP) $\nparallel$ (CD)

Déterminons l'intersection des plans (MNP) et (BCD).







On prolonge les droites (NP) et (CD) ; elles se coupent en un point I.

On prolonge les droites (MN) et (BC) ; elles se coupent en un point J.

La droite d'intersection des plans (MNP) et (BCD) est la droite (IJ).

Deux remarques :

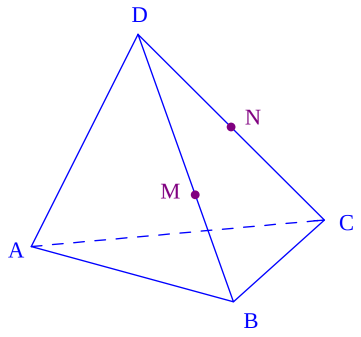
• En prolongeant (MP), on obtient un point K aligné avec I et J.

• Il est possible également de prolonger les droites (BD) et (MP).

17

ABCD : tétraèdre

$M \in [BD]$
$N \in [DC]$

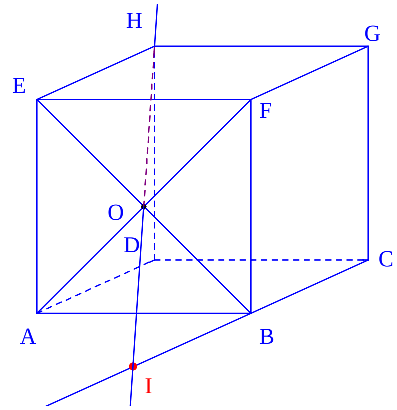


• $(AMN) \cap (ABD) = (AM)$
• $(AMN) \cap (ACD) = (AN)$
• $(AMN) \cap (BCD) = (MN)$

18

ABCDEFGH : cube
O : centre de ABFE

Construisons le point d'intersection I de la droite (OH) avec le plan (ABC).



On applique la méthode suivante :

Pour déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan, on se ramène à l'intersection de deux droites sécantes.

Les points O, B, C, H sont coplanaires (ils sont dans le plan (BCE)).

On construit le point d'intersection de (OH) avec la droite (BC).

19

P : plan de l'espace
A, B, C points non alignés n'appartenant pas à *P*
$(\text{AB}) \cap P = \{\text{C}'\}$
$(\text{AC}) \cap P = \{\text{B}'\}$
$(\text{BC}) \cap P = \{\text{A}'\}$

Démontrons que les points A', B', C' sont alignés.

Au départ, on ne peut pas faire une figure exacte. On se contente pour commencer d'une figure au brouillon. On ne peut faire une bonne figure qu'une fois le résultat sur l'alignement des points A', B', C' démontré. C'est une particularité des exercices de géométrie dans l'espace (contrairement à la géométrie plane) et l'un des intérêts.

On peut adopter l'une des deux versions au choix.

1ère version :

A', B', C' sont trois points communs aux plans *P* et (ABC).
Or *P* et (ABC) sont sécants suivant une droite Δ donc A', B', C' sont alignés sur la droite Δ.

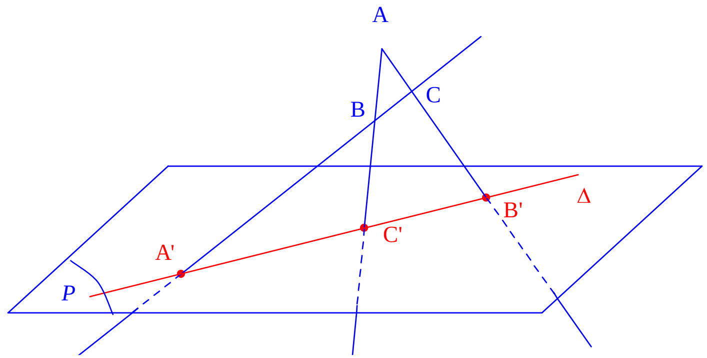
2e version :

Les points A, B, C ne sont pas alignés donc ils définissent un plan.

Les plans *P* et (ABC) ont un point commun : C' [on peut éventuellement expliquer davantage ce point].
A, B, C n'appartient pas à *P* donc les plans *P* et (ABC) ne sont pas confondus.
On en déduit qu'ils sont sécants.

Soit Δ la droite d'intersection des plans *P* et (ABC).
A', B', C' appartiennent aux plans *P* et (ABC) [on peut éventuellement expliquer davantage ce point].
Par conséquent, ils appartiennent à la droite Δ.
Donc A', B', C' sont alignés.

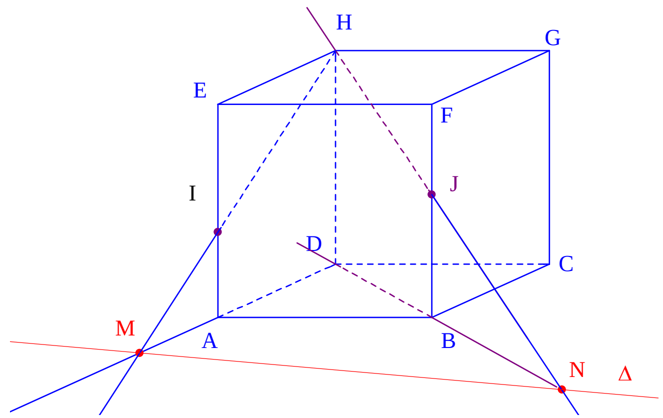
On peut alors refaire la figure au propre.



20

ABCDEFGH : cube
$\text{I} \in]\text{AE}[$
$\text{J} \in]\text{BF}[$
$(\text{HIJ}) \cap (\text{ABC}) = \Delta$

Représentons Δ sur une figure en perspective cavalière.



On note :

M le point d'intersection des droites (HI) et (AD) ;

N le point d'intersection des droites (JH) et. (BD) [il s'agit de deux droites coplanaires sécantes dans le plan (BDF)].

Les points M et N sont deux points communs aux plans (HIJ) et (ABC).

Donc la droite Δ d'intersection des deux plans est la droite (MN).

Il y a trois possibilités :

• $(\mathrm{HJ}) \cap (\mathrm{AD})$

• $(\mathrm{HI}) \cap (\mathrm{BD})$

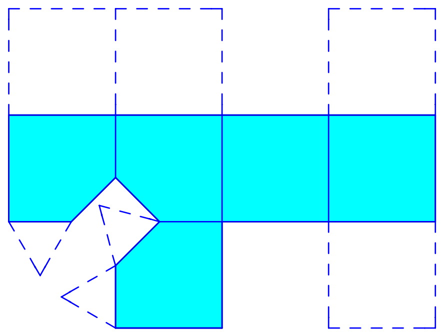
• $(\mathrm{IJ}) \cap (\mathrm{AB})$

21

1°)

Pour obtenir un patron du solide :
- le carré peut être placé en *a*, *b* ou en *c* ;
- le triangle doit être placé en 2.

On répond sans justifier, l'explication étant difficile à donner.



On n'est pas obligé de marquer les noms des sommets sur un patron ; cela aide cependant parfois pour la visibilité du patron.

2°)

Réalisons le patron du cube tronqué.

La réalisation d'un patron du cube tronqué est moins simple qu'il n'y paraît de prime abord.
En effet, I, J, K ne sont pas les milieux des arêtes [EF], [BF] et [FG].
La condition donnée dans l'énoncé est : $\mathrm{IJ} = \mathrm{JK} = \mathrm{KI} = \mathrm{EI} = \mathrm{KG} = \mathrm{JB}$.
On peut calculer la longueur EI en fonction de l'arête *a* du cube au moyen d'une équation.

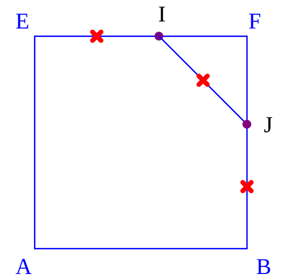
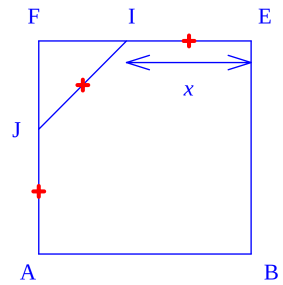


Figure fausse : il faut échanger I et J.



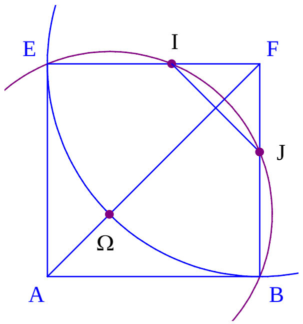
En effet, posons $x = \mathrm{EI}$ (longueur en centimètres).

On a alors $\mathrm{IF} = a - x$ et $\mathrm{IJ} = (a - x)\sqrt{2}$.
En écrivant que $\mathrm{IJ} = \mathrm{EI}$, on obtient $x = (a - x)\sqrt{2}$ d'où $x\left(1 + \sqrt{2}\right) = a\sqrt{2}$.

Par suite, on a : $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$ donc $x = a\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ soit $x = a\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

Un moyen de construction possible est d'utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de *x* connaissant la valeur de *a* (*a* est égal à 4 pour le patron demandé).
On effectue une construction approchée.

Une construction exacte à la règle et au compas est cependant possible comme le montre la figure ci-dessous.
On trace le cercle de centre F et passant par B et E.
On place le point d'intersection Ω de [AF] et de ce cercle.
On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et passant par B et E
Le cercle $\mathcal{C}$ coupe [EF] en E et I.
Le cercle $\mathcal{C}$ coupe [BF] en B et J.
On a alors $\mathrm{EI} = \mathrm{IJ} = \mathrm{BJ}$.
Ce résultat peut se démontrer en raisonnant dans les triangles ΩEI, ΩIJ, ΩBJ.



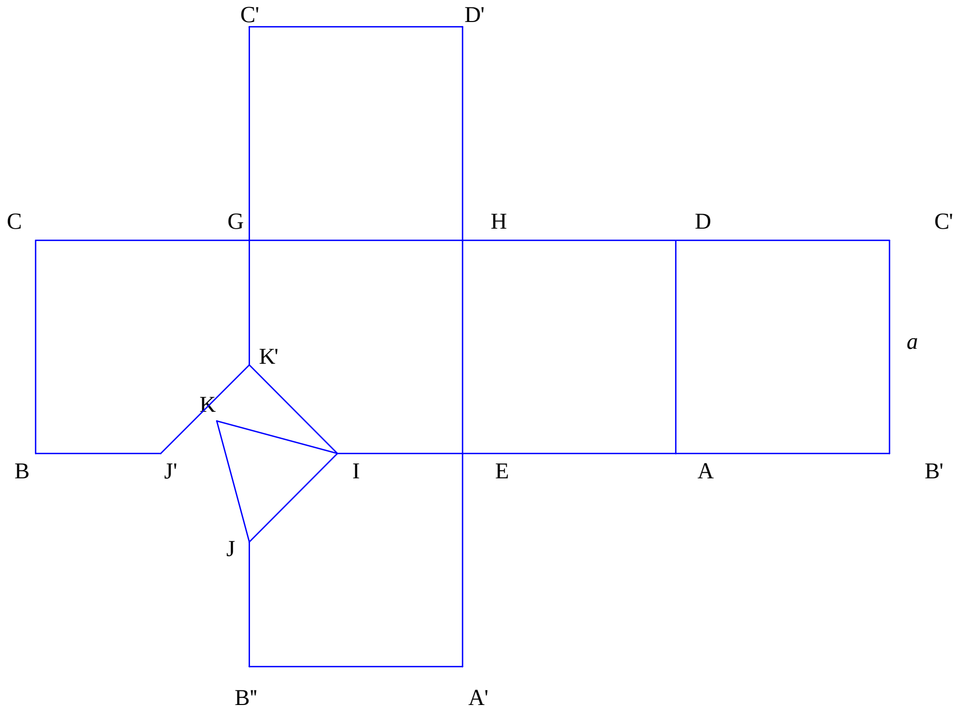
On peut ainsi effectuer une construction exacte du patron (le faire en prenant 4 cm pour arête du cube).

Remarque : La construction est basée sur la construction d'un octogone régulier.

Voici une proposition de patron :

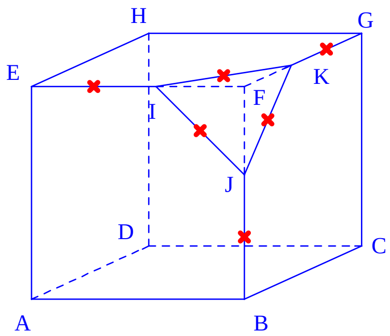
$IJ = JK = KI = EI = KG = JB$

$a = 4$ (unité le centimètre)



3°) **Calculons le volume du cube tronqué en fonction de *c*.**

On se réfère à la figure en perspective cavalière.



On commence par calculer le volume du tétraèdre FIJK.

Il s'agit d'une pyramide régulière.

$V_{FIJK} = \dfrac{\mathcal{A}_{FIJ} \times FK}{3}$ (on prend pour base le triangle FIJ, la hauteur correspondante est le segment $[FK]$)

$= \dfrac{\dfrac{FI \times FJ}{2} \times FK}{3}$

$= \dfrac{FI^3}{6}$ (car $FI = FJ = FK$)

Or $FI = a - EI$

$= a - a\left(2 - \sqrt{2}\right)$

$= \left(\sqrt{2} - 1\right)a$

$$V_{FIJK} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^3 a^3}{6}$$

On rappelle les identités remarquables cubiques :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$\left(\sqrt{2}-1\right)^3 = \sqrt{2}^3 - 3 \times \sqrt{2}^2 \times 1 + 3 \times \sqrt{2} \times 1^2 - 1^3$

$= 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1$

$= 5\sqrt{2} - 7$

On peut aussi obtenir ce résultat avec une calculatrice qui effectue les calculs exacts avec des racines carrées.

Donc : $V_{\text{FIJK}} = \dfrac{\left(5\sqrt{2}-7\right)a^3}{6}$.

On peut calculer le volume du cube tronqué.

$$V_{\text{cube tronqué}} = a^3 - \frac{\left(5\sqrt{2}-7\right)a^3}{6}$$

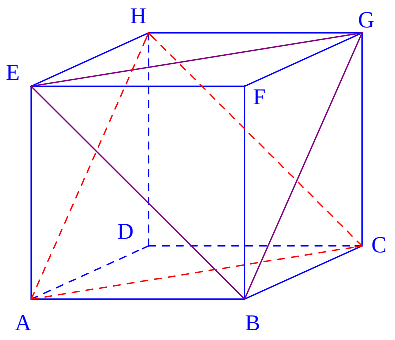
$$= \frac{\left(13-5\sqrt{2}\right)a^3}{6}$$

$\boxed{22}$

ABCDEFGH : cube

Démontrons que (BEG) // (ACH).

On fait une figure assez grande.



Les segments $[AC]$, $[CH]$, $[AH]$ sont en pointillés.
Les segments $[BE]$, $[EG]$, $[CH]$ sont en pointillés.

(CH) // (BE) et (AH) // (BG)   (propriété des diagonales des faces opposées d'un cube et même d'un pavé droit ou encore d'un parallélépipède quelconque).

Or si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.
Donc (BEG) // (ACH).

Complément :

On pourrait dire que (CH) et (AH) sont deux droites sécantes du plan (BEG) et que (BE) et (BG) sont deux droites sécantes du plan (BEG).

Autre rédaction possible :

(CH) et (BH) sont deux droites sécantes de (ACH) et (BE) et (BG) sont deux droites sécantes de (BEG).

De plus, (CH) // (BE) et (AH) // (BG)   (propriété des diagonales des faces opposées d'un cube).

Or si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

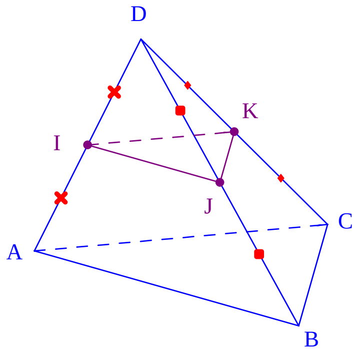
Donc (BEG) // (ACH).

$\boxed{23}$

ABCD : tétraèdre
I : milieu de [DA]
J : milieu de [DB]
K : milieu de [DC]

Démontrons que (IJK) // (ABC).

On fait une figure codée.



Dans le triangle ABD, I est le milieu de [DA] et J est le milieu de [DB] donc (IJ) // (AB) (« théorème des milieux », on a dit que les théorèmes de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace).
De même (JK) // (BC).

$\left(\text{IJ}\right) \cap \left(\text{JK}\right) = \{ \text{ J } \}$

Or si deux droites d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles (théorème 4).

Donc (IJK) // (ABC).

$\boxed{24}$

ABCDEFGH : cube

$(\text{BEG}) \cap (\text{ABC}) = \Delta$

1°) **Déterminons un point de Δ.**

B ∈ (BEG) et B ∈ (ABC) donc **B ∈ Δ**.

2°) **Démontrons que Δ // (EG).**

1ère méthode :

On utilise le théorème : « Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ».
Ici, (ABC) // (EFG).
Le plan (BEG) coupe le plan (EFG) suivant la droite (EG).
Le plan (BEG) coupe le plan (ABC) suivant la droite Δ.
Donc Δ // (EG).

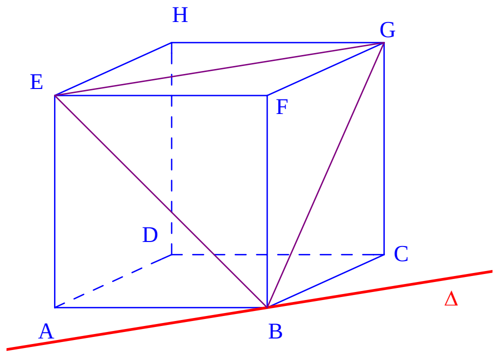
2e méthode :

(EG) // (AC)
(EG) ⊂ (BEG)
(AC) ⊂ (ABC)

Donc d'après le « théorème du toit », **Δ // (EG)**.

On écrit juste le nom du théorème (« théorème du toit »), sans le citer car on a la chance que le théorème ait un nom !

3°) **Traçons Δ sur une figure en perspective cavalière.**



$\boxed{25}$

SABCD : pyramide régulière de sommet S à base carrée

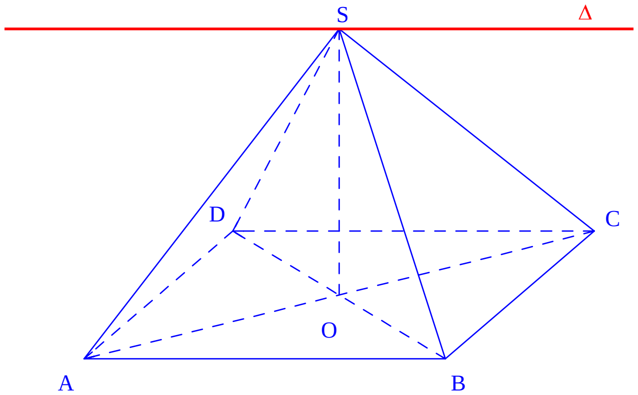
Déterminons la droite d'intersection Δ des plans (SAB) et (SCD).

S ∈ (SAB) et S ∈ (SCD) donc S ∈ Δ.

(AB) // (CD)
(AB) ⊂ (SAB)
(CD) ⊂ (SCD)

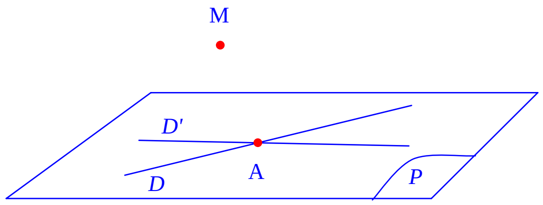
Donc d'après le « théorème du toit », la droite d'intersection Δ des plans (SAB) et (SCD) est parallèle à (AB) (et à (CD)).

Conclusion : **Δ est la parallèle à (AB) passant par S**.



$\boxed{26}$

P : plan de l'espace
$D \subset P$
$D' \subset P$
$D \cap D' = \{ \text{A} \}$
M $\notin P$
Q : plan défini par M et D
Q' : plan défini par M et D'



• Expliquons pourquoi les plans Q et Q' sont sécants.

Les plans Q et Q' ont le point M en commun.
De plus, ils ne sont pas confondus (un petit raisonnement par l'absurde permet de s'en convaincre aisément :
« Si les plans Q et Q' étaient confondus, alors les droites D et D' seraient confondus ce qui n'est pas »).

• Déterminons l'intersection de Q et Q'.

A $\in D$.
Or $D \subset Q$ donc $A \in Q$.

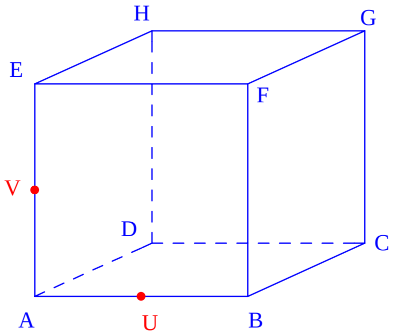
De même, A $\in D'$. Or $D \subset Q'$ donc $A \in Q'$.

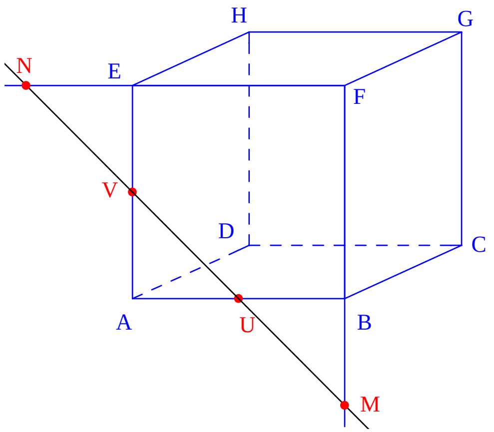
A et M sont deux points distincts communs à Q et Q' donc $Q \cap Q' = (AM)$.

$\boxed{27}$

ABCDEFGH : cube
U $\in$]AB[
V $\in$]AE[

Citons deux droites définies par des arêtes, autres que (AB) et (AE), que rencontre la droite (UV).





La droite (UV) coupe les droites (EF) et (BF).

On répond sans justifier. On se contente de faire la figure.

Cet exercice prépare à la méthode de prolongement pour les tracés de sections (méthode de tracé hors solide).

Pour les contrôles

Les sections ne sont jamais à justifier (les traits de construction doivent juste être laissés).

$\boxed{28}$ Sections d'un cube

On peut utiliser la méthode par parallélisme ou par tracé hors solide (« méthode des points rouges »).

Pour la méthode de parallélisme, on utilise la construction classique à la règle non graduée et à l'équerre.

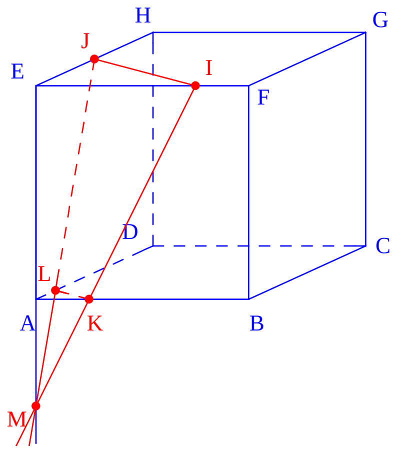
On nomme les points au fur et à mesure de la construction.

On n'est pas obligé de numéroter les étapes de construction.

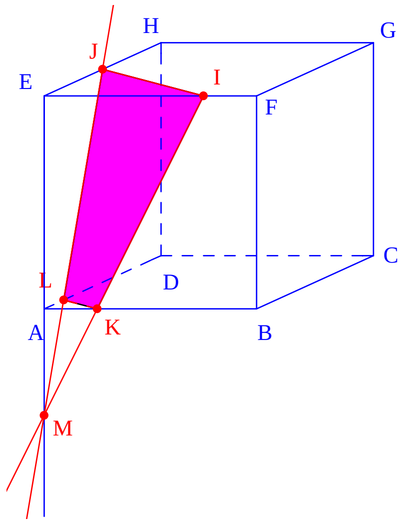
Nous allons détailler la méthode par tracé hors solide car elle plus précise que la méthode par parallélisme.

1^er^ cas : I $\in$ [EF] ; J $\in$ [EH] ; K $\in$ [AB]

On cherche la section du cube par le plan (IJK).



Le point M est un point de construction.
On n'est pas obligé de nommer les points de construction.
On trace en pointillés les morceaux de droites qui sont cachés.
On colorie la section.

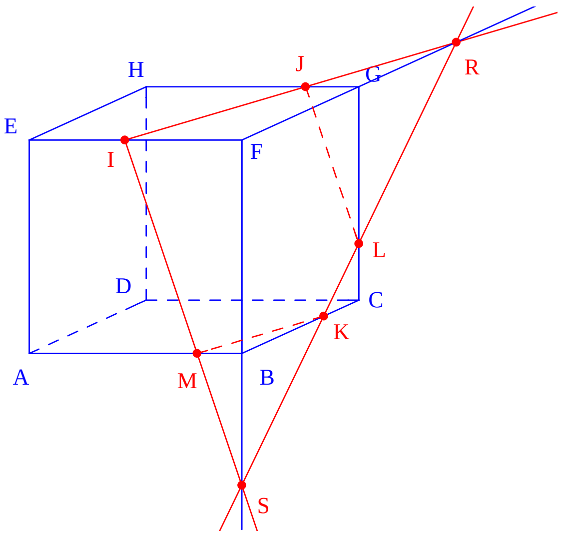


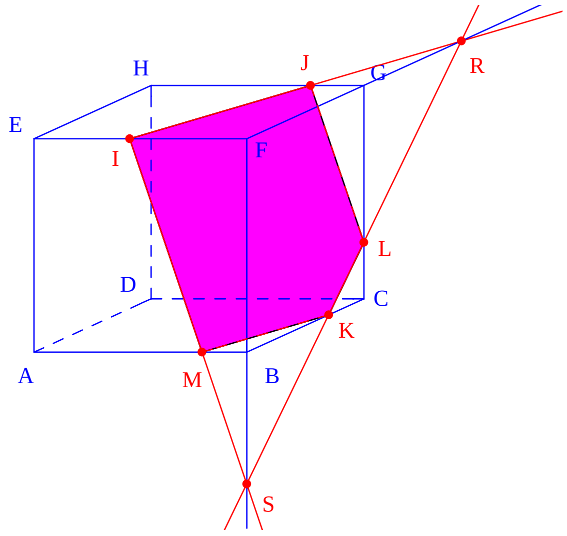
La section du cube est le quadrilatère IJKL.

C'est un trapèze non croisé (on le justifie aisément grâce au parallélisme des faces opposées dans un cube et au théorème : « Si un plan coupe deux plans parallèles, alors les droites d'intersection sont parallèles »).
On obtient une section trapézoïdale.

2^{e} cas : I $\in$ [EF] ; J $\in$ [GH] ; K $\in$ [BC]

On cherche la section du cube par le plan (IJK).





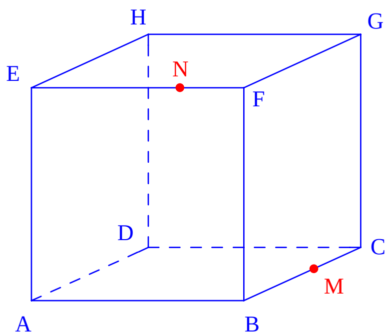
La section du cube est le pentagone IJLKM.

On obtient une section pentagonale.

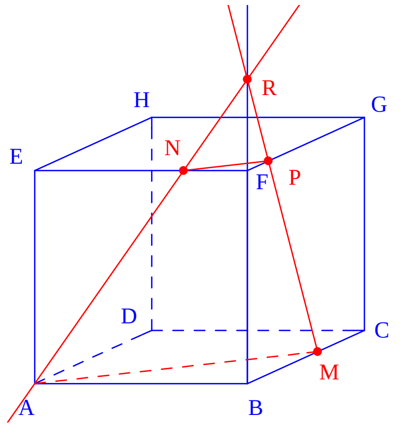
Voici comment on peut décrire la section :
La section est un pentagone convexe qui présente deux paires deux paires de côtés parallèles.

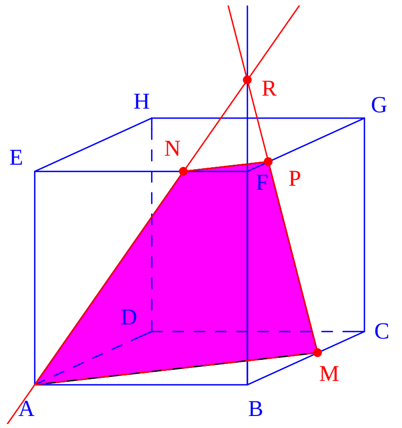
$\boxed{29}$ Sections de cubes

1er cas : M $\in$]BC[et N $\in$]EF[



On cherche la section du cube par le plan (AMN).
On commence par tracer les morceaux de section que l'on connaît.
On effectue ensuite un tracé hors solide.



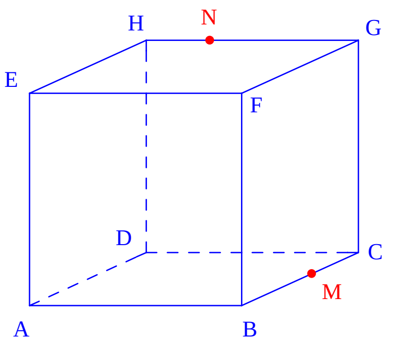


La section est le quadrilatère AMPN (c'est un trapèze).

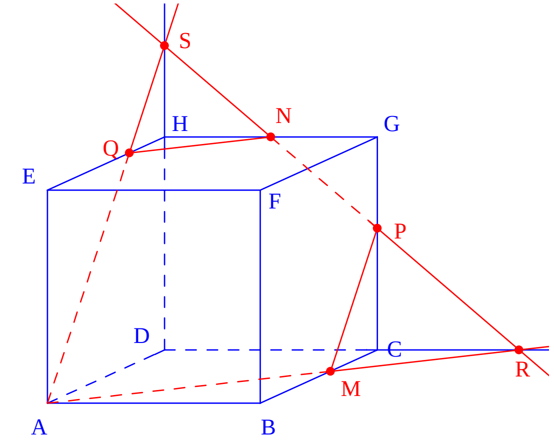
AMPN est un trapèze non croisé car $(AM)//(PN)$ (démonstration aisée à l'aide du théorème : « Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles »).

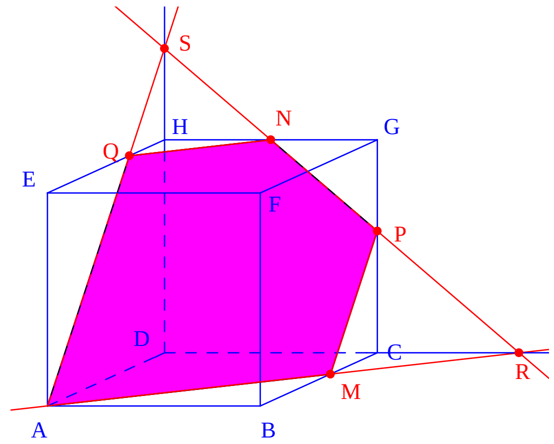
On obtient une section trapézoïdale.

2e cas : M $\in$]BC[et N$\in$]GH[



On cherche la section du cube par le plan (AMN).
On commence par tracer les morceaux de section que l'on connaît.
On effectue ensuite deux tracés hors solide.



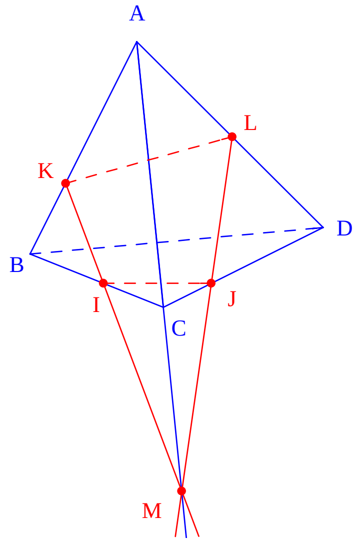


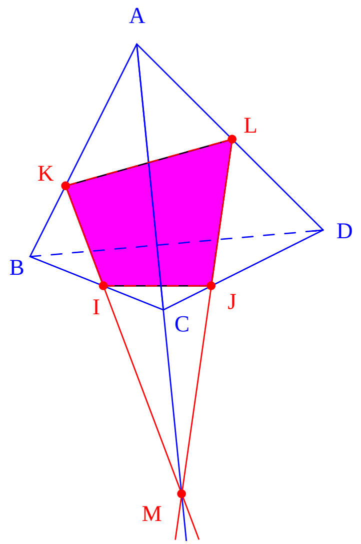
La section est le pentagone AMPNQ (ce n'est pas un pentagone régulier ; la seule chose que l'on puisse dire c'est que les droites (AQ) et (MP) d'une part, et que les droites (NQ) et (AM) d'autre part sont parallèles).

On obtient une section pentagonale.

30 **Section d’un tétraèdre**

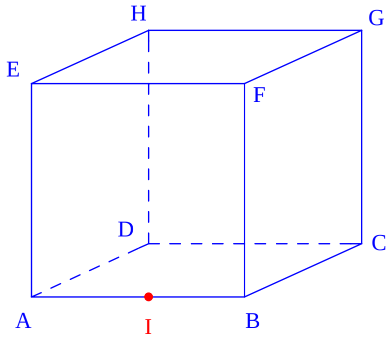
La seule méthode possible est la méthode de tracé hors solide.



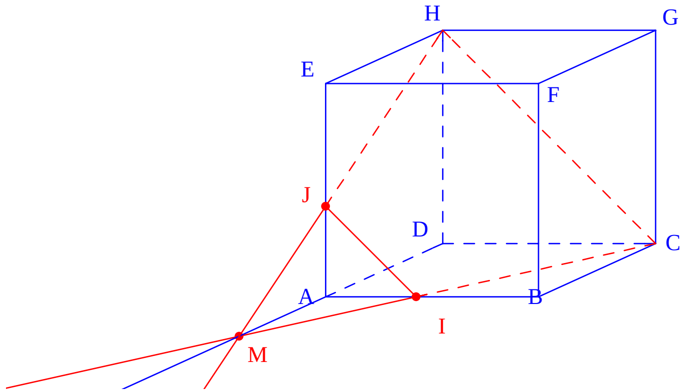


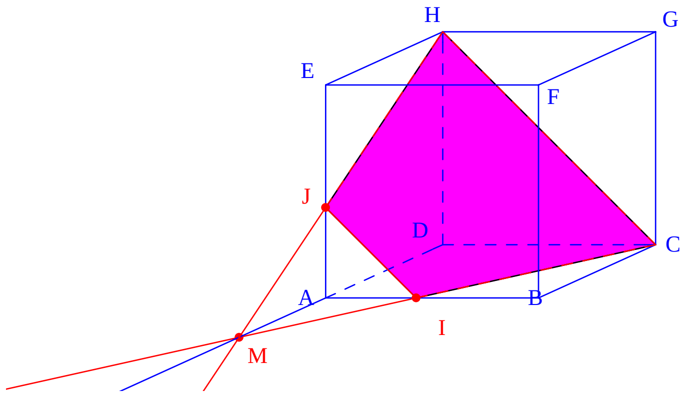
La section du tétraèdre est le quadrilatère IJLK (c’est un quadrilatère convexe quelconque).

31 **Section d’un cube**



On cherche la section du cube par le plan (ICH).





La section du cube par le plan (ICH) est le quadrilatère ICHJ.

C’est un trapèze (démonstration aisée à l’aide du parallélisme des faces opposées dans un cube) isocèle (on peut voir aisément sur un patron que : $IC = JH$).

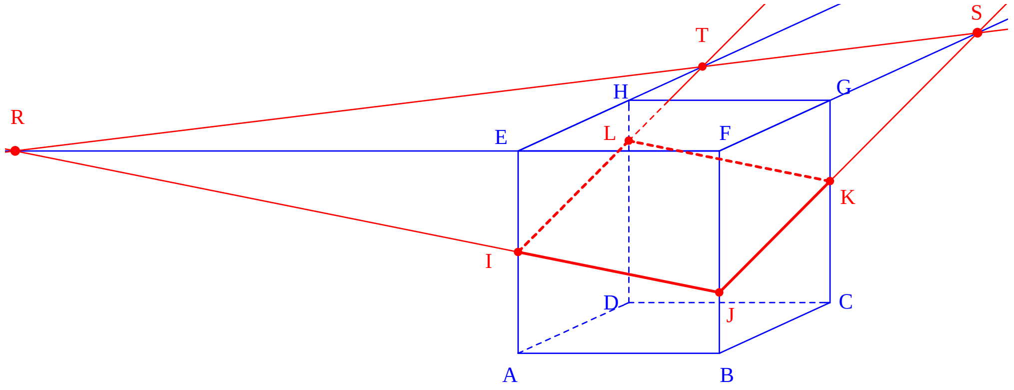
$\boxed{32}$ Section d’un cube

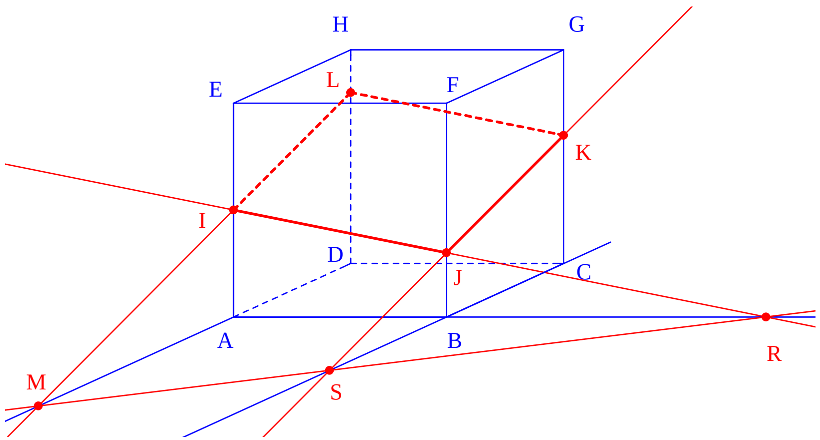
On peut utiliser la méthode de parallélisme ou de tracé hors solide.

La méthode par parallélisme est facile à mettre en œuvre.

On peut aussi procéder par tracé hors solide.

Il y a alors deux manières de faire.





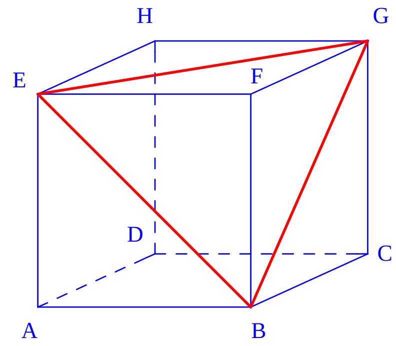
La section du cube est le quadrilatère IJKL.
C’est un parallélogramme.

$\boxed{33}$ Sections d’un cube et patron

Reproduire les patrons dans le cahier.

Dans chaque cas, on peut réaliser le patron du cube sur papier avant de passer à la représentation en perspective (prendre 4 cm pour arête du cube).

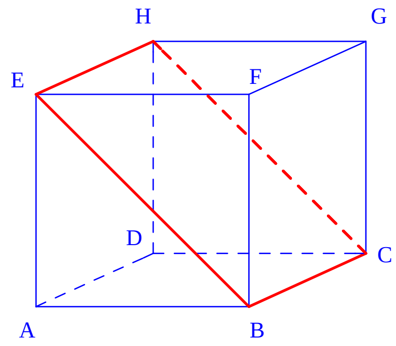
1^er^ cas : La section du cube est un triangle équilatéral (les côtés du triangle équilatéral ont pour longueur $a\sqrt{2}$ en désignant par a l’arête du cube).



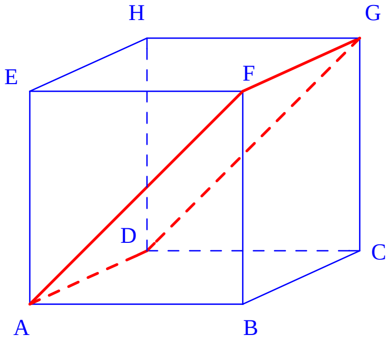
On peut colorier la section.

2^e^ cas : La section est un rectangle.

On peut le représenter de plusieurs façons.



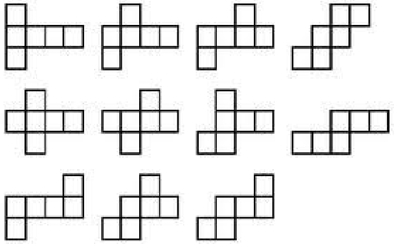
On repasse les arêtes en traits pleins ou en pointillés selon qu’elles sont cachées ou non.



Remarque :

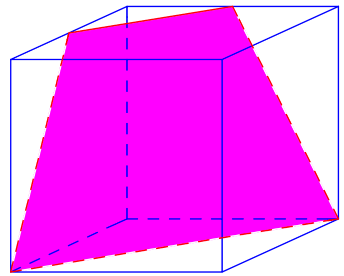
Il serait intéressant de représenter ces sections sur d'autres patrons du cube (on rappelle qu'il y a 11 patrons différents d'un cube ; c'est un problème de dénombrement).

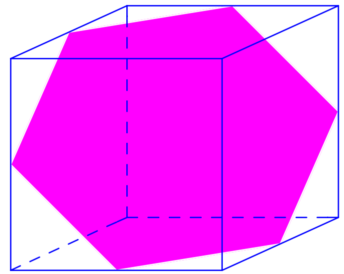
Cet exercice est l'occasion de voir (ou de revoir) les onze patrons d'un cube.
On s'aperçoit que certains sont peu utilisés.
On peut chercher sur Internet et notamment regarder le site de Thérèse Éveilleau (Mathématiques magiques).



$\boxed{34}$ **Sections d'un cube et patron**

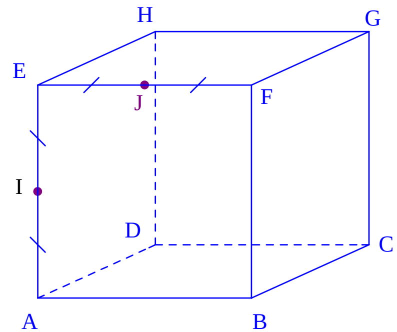
Dans chaque cas, on peut réaliser le patron du cube sur papier avant de passer à la représentation en perspective.





Dans ce deuxième cas, on peut démontrer que la section est un hexagone régulier.

$\boxed{35}$



1°) On considère les trajets suivants.
Trajet 1 : constitué des segments $[IJ]$ et $[JG]$.
Trajet 2 : constitué des segments $[IF]$ et $[FG]$.
Lequel de ces deux trajets est le plus long ?

Soit L_1 la longueur du premier trajet et L_2 la longueur du deuxième trajet.

On cherche à savoir quel parcours est le plus court.

Pour les deux calculs, on utilise le théorème pour calculer les longueurs IJ, JD et IF en fonction de *a*.

$$L_1 = \text{IJ} + \text{JD} = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{2}$$

$$L_1 = \text{IF} + \text{FG} = \frac{a\sqrt{5}}{2} + a = \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}$$

On a $\sqrt{2} < 2$ donc $\sqrt{2}+\sqrt{5} < 2+\sqrt{5}$.

Comme $a > 0$, $\frac{a}{2} > 0$.

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\frac{a}{2}$, on obtient $\frac{a\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{2} < \frac{a\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}$ ce qui donne $L_1 < L_2$.

Le trajet 1 est plus court que le trajet 2.

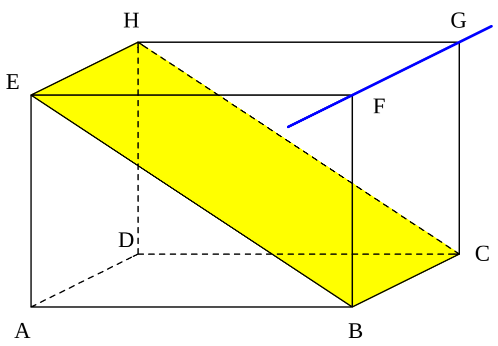
2°) La fourmi emprunte à présent le trajet (chemin) le plus court de I à G.
Calculer la distance parcourue par la fourmi en fonction de *a*.
Indication : penser au patron du cube.

On met les faces ABFE et EFGH à plat.

Grâce à la réalisation du patron, on peut voir que le parcours le plus cours qui est celui de la fourmi H est le parcours qui passe par le milieu de [EJ].

$\boxed{36}$

Soit ABCDEFGH un pavé droit.
Déterminer la position de la droite (FG) par rapport au plan (BCH).

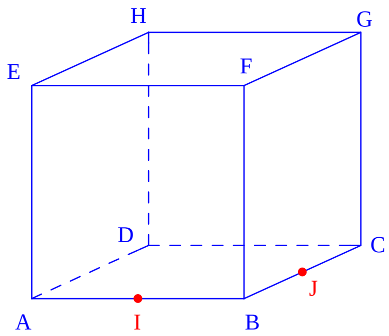


$\boxed{37}$ **Section impossible**

Voir corrigé du DM TS pour le 14-1-2013.

$\boxed{38}$

ABCDEFGH : cube
I : milieu de [AB]
J : milieu de [BC]



Démontrons que les points I, J, G, E sont coplanaires.

Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC].
Donc d'après le « théorème des milieux » (droite des milieux dans un triangle quelconque), on a : (IJ) // (AC).

Or (AC) // (GE).
Donc (IJ) // (GE).

On sait que si deux droites sont parallèles, alors elles sont coplanaires.
Donc les droites (IJ) et (GE) sont coplanaires ; par suite, les points I, J, G, E sont coplanaires.