TS

Droites et plans de l'espace

Le lundi 13-11-2023

Le symbole appartient provient de la lettre grecque epsilon ε « est élément de ».

Le mercredi 31-5-2023
- polyèdre semi-régulier
- orthodromie

LES RÈGLES DE LA PERSPECTIVE CAVALIÈRE

Dès la sixième, on utilise les dessins en perspective cavalière. Le dessinateur tente généralement de faire un dessin qui correspond le plus possible à ce que l'on voit (dessins avec point de fuite). Malheureusement, ce genre de dessin n'est pas pratique pour voir et mettre en évidence des vérités mathématiques.

Voici les règles que l'on utilise pour faire une représentation en perspective cavalière :

1) Les lignes et arêtes cachées sont représentées en pointillés. Les arêtes visibles sont représentées en traits pleins.

2) Les éléments situés dans un plan frontal (un plan face au dessinateur, perpendiculaire au regard) sont représentés en vraie grandeur, non déformés : mêmes angles, mêmes longueurs.

Pour les collégiens, on demande de respecter les propriétés suivantes :

a) Deux droites parallèles dans la réalité restent parallèles sur le dessin ;

b) Des points alignés dans la réalité restent alignés sur le dessin ;

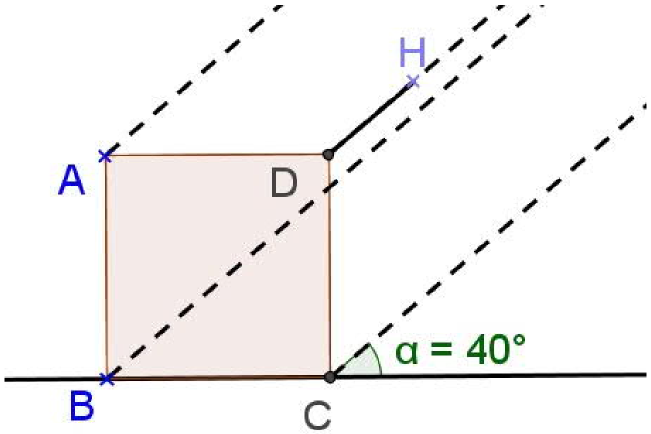
c) Les milieux sont conservés ;

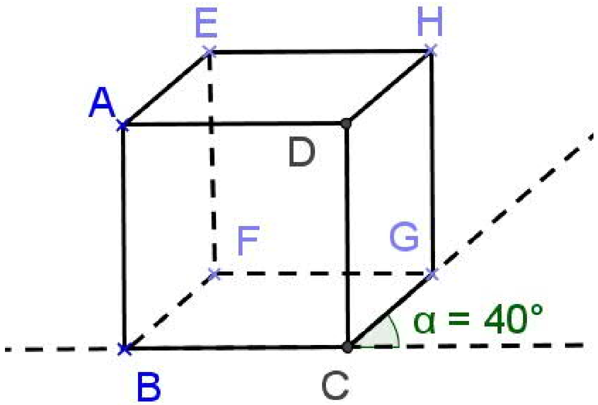
d) Des droites concourantes restent concourantes.

En seconde on rajoute les deux règles suivantes :
3) On appelle fuyante une droite perpendiculaire au plan frontal. Les fuyantes sont toutes parallèles et forment un angle donné avec l'horizontale. Cet angle s'appelle angle de fuite (à ne pas confondre avec le point de fuite vu en dessin). En général cet angle est compris entre 30° et 60°.
4) On peut calculer les longueurs que l'on va dessiner si le segment est sur une fuyante. Pour cela on multiplie la longueur réelle par un coefficient de perspective donné (en général 0,7 ou 0,5).

Exemple : Dessiner un cube de côté 4 cm en perspective cavalière avec un angle de fuite de 40° et un coefficient de perspective de 0,5.

Réponse, je dessine un carré pour représenter la face frontale ABCD. Je trace des fuyantes à partir de A,B,C,D formant un angle de 40° avec l'horizontale, puis je mesure 4×0,5=2 cm sur ces demi-droites. Je finis en traçant la face frontale arrière E, F, G, H.





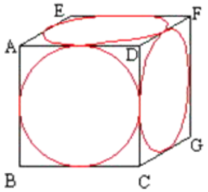
Le 19 décembre 2021

J'ai noté le site warmaths perpspective
https://warmaths.fr/MATH/geomdescrip/perspnotelem.htm

https://warmaths.fr/MATH/geometr/perslinehistoir.htm
http://warmaths.fr/MATH/Resum3/nivvgePerspective.htm

WARMATHS Perspective Introduction. Définitions. Exemple 1: le carré. Exemple 2: le cube. Exemple 3: le cercle. Exemple 4: pas de faces frontales. Utilisation d'un quadrillage. Jeu de construction. Introduction: La perspective exposée dans ce document est ...
warmaths.fr

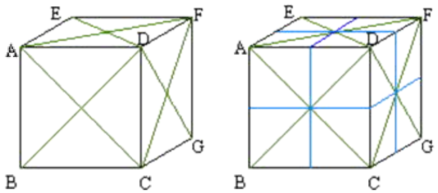
Exemple 3 : ***dessin d'un cercle de 3 cm de diamètre.***



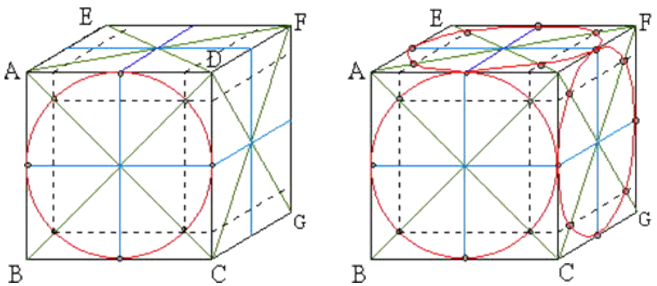
Dessiner sur trois faces d'un cube (une frontale, une latérale et une de dessus) un cercle de 3 cm de diamètre avec comme angle de fuite 30°, comme coefficient de fuite 0,5 (ce qui revient à diviser par 2) et comme point de vue : dessus-droite.

Les faces d'un cube étant des carrés, nous allons utiliser le cercle inscrit dans un carré de 3 cm de côté.

Nous allons commencer par le plus facile : tracer le cube ABCDEHGF et le cercle inscrit dans le carré de la face frontale ABCD. Son centre est à l'intersection des diagonales (en vert) et des médianes (en bleu) du carré ABCD. Nous traçons aussi les diagonales et les médianes des autres faces (les milieux restent des milieux sur les fuyantes).



Dès que le cercle inscrit dans ABCD est tracé nous obtenons huit points caractéristiques : intersections de ce cercle et des médianes et des diagonales. Sur les autres faces, qui sont aussi des carrés, les cercles inscrits dans ADFE et CDFG passent par des points identiques. Pour les obtenir, nous traçons (en pointillés) des lignes de report (parallèles aux côtés des carrés et passant par ces points 2 par 2).



Il ne reste plus qu'à joindre ces points, sur chaque face, par un trait continu tout en rondeurs... ce qui n'est pas forcément le plus facile ! Vous venez de dessiner deux cercles sur des faces fuyantes.

Le 8-11-2022

On effectue un tracé point par point.

Voir vidéo sur perspective d'une sphère IREM avec contour apparent.

Le 11-11-2022

Dans le cas des cercles, on utilise une perspective avec un angle de fuite de 90°, ce que l'on ne fait théoriquement jamais.

De même, pour la sphère, on utilise une représentation en perspective cavalière approchée avec un angle de fuite de 90°.

Le 29 décembre 2021

J'ai découvert le site zpag.net avec un excellent cours sur la perspective (perspective cavalière).
Il y a des perspectives de cercles.

Le 4 novembre 2020

- rhomboèdre

- taille des pierres (diamant bleu de Louis XIV placé dans la Toison d'or)
Certains diamants portaient des noms, comme par exemple, le Régent.

Le 17-6-2020

Vidéo projection stéréographique d'un cercle.

Enseignement scientifique en $1^{\text{ère}}$: pas mal de calculs dans l'espace (structure cristalline, maille élémentaire)

Formule d'un prisme tronqué (planche 1935 sur volumes de solides)

Formule d'un secteur sphérique.

Perspectives impossibles (dessin de M. Escher)

Cas de surface que l'on sait étudier en mathématiques

Ellipsoïde de révolution
Paraboloïde de révolution
Hyperboloïde de révolution

On sait donner des équations dans un repère.

Cas de surfaces compliquées :
Ruban de Moebius (on sait l'étudier mathématiquement)

Le 28-11-2021

- Le métier de géomètre Jérôme Haxaire qui a mesuré le Mont-Blanc au cm près

- Le GPS

Le 26-11-2021

On « étend » la droite.

Jean-Baptiste Boyenval

Le 30 novembre 2021

Voir livre Brachet et Dumarqué *Eléments de géométrie*, 1935
Il y a des renseignements très intéressants sur l'hélice circulaire.

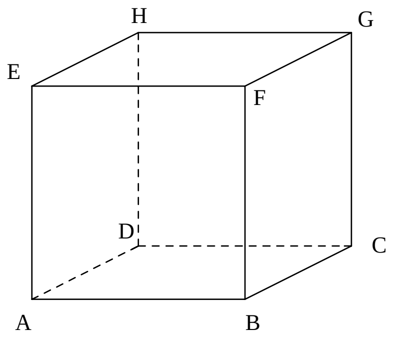
Rappel / complément : segments et droites joignant les milieux de deux côtés dans un triangle (« droite des milieux »)
Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Thalès et de sa réciproque.
Nous les démontrerons dans le chapitre sur vecteurs de l'espace.

Représentation en perspective cavalière de quelques solides dans l'espace

Un même solide peut être représenté de plusieurs points de vue.

1) Cube

On évite un angle de fuite de 45°.
On utilise des pointillés pour les arêtes cachées.



3 faces visibles, 3 faces cachées.

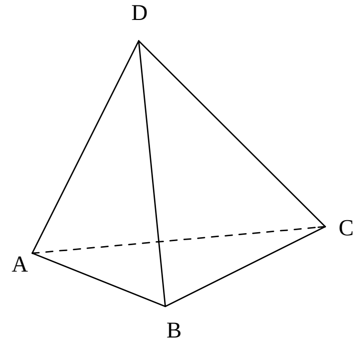
On prendra garde à la disposition des lettres.

8 sommets
12 arêtes
6 faces

On a donné une représentation du cube en perspective cavalière.
Il y a d'autres représentations possibles (sous différents angles).

2) Tétraèdre (tetra : 4 ; edre : faces)

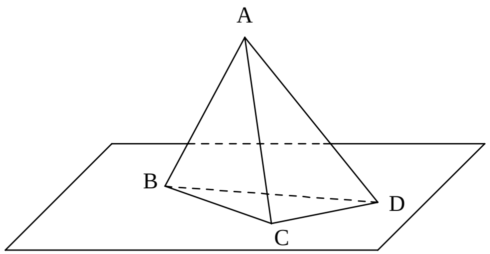
Définition :
Un tétraèdre est un solide limité par 4 faces.
Ces faces sont des triangles.



pyramide à base triangulaire

2 faces visibles
2 faces cachées
4 faces
4 sommets
6 arêtes

Tétraèdre posé sur un plan

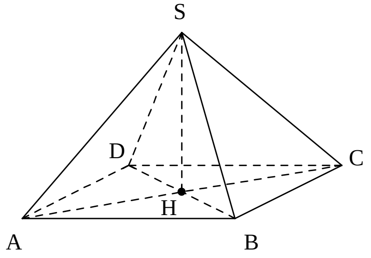


Le placement n'est point pour un tétraèdre n'est pas immuable.
On peut comme sur la figure prendre le triangle BCD comme « base » posée sur un plan horizontal. Le sommet A est alors placé au-dessus.

On peut aussi prendre le triangle ABC pour « base » posée sur un plan horizontal. Le point D est alors placé au-dessus.

3) Pyramide régulière à base carrée

On commence par tracer ABCD (parallélogramme en perspective cavalière).
On place ensuite le point H, centre du carré ABCD c'est-à-dire point d'intersection des diagonales.



2 faces visibles
3 faces cachées

Question : quel est le nombre maximal de faces visibles que l'on peut avoir en représentation d'une pyramide régulière à base carrée ?

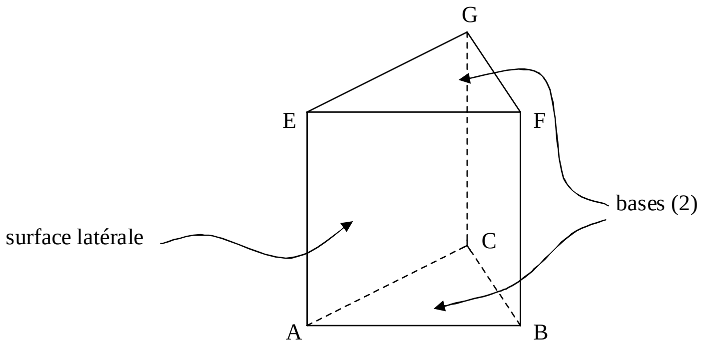
Réponse : 4 en faisant une vue de dessus.
On a alors un carré et ses diagonales. C'est une représentation en perspective cavalière dont on n'a pas l'habitude.
On aura 4 faces visibles et 1 face cachée.

5 sommets
8 arêtes
5 faces

Il faut s'entraîner à représenter en perspective cavalière une pyramide régulière à base carrée. Il faut à tout prix éviter de faire une perspective d'enfant de quatre ans où le carré ABCD serait représenté par un « vrai » carré vu de face.

4) Prisme droit

Prisme droit à base triangulaire



5 faces
6 sommets
9 arêtes

Comment placer les points sur la figure (ordre des points) :

Pour un prisme droit ABCDEF dont les bases sont ABC et DEF, on commencer par nommer les points A, B, C de la « première » base puis, pour la « seconde » base (base opposée), on reprend le même ordre que pour la première base.

On notera qu'un cube est un prisme droit particulier. Le placement des points obéit à la même règle (pour le cube représenté dans le 1) : on a le carré ABCD avec les points A, B, C, D dans cet ordre puis le carré EFGH (face opposée) avec les points E, F, G, H dans le même ordre (E au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C, H au-dessus de D).

5) Remarques

- Tous les solides représentés précédemment sont limités par des faces. On dit que ce sont des polyèdres (plusieurs faces).

- Un polyèdre particulier : le ballon de foot constitué de faces pentagonales ou hexagonales (cf. patron)

- Relation entre le nombre de faces F, le nombre d'arêtes A et le nombre de sommets S d'un polyèdre convexe quelconque : $S - A + F = 2$ (relation d'Euler ou relation d'Euler-Descartes)

La démonstration de cette propriété est très astucieuse et utilise une mise à plan sous forme de graphe (graphe planaire). Elle est due au mathématicien français Augustin Cauchy au début du XIX^{e} siècle (1811 exactement).

Cette relation ne présente pas d'intérêt pratique si ce n'est qu'elle permet de trouver l'un des trois nombres S, F ou A quand on en connaît deux.
Elle est cependant très intéressante car elle présente un invariant numérique remarquable valable pour tout polyèdre convexe de l'espace.

Définition (partie convexe) :

Une partie *D* du plan ou de l'espace est dite convexe lorsque pour tout couple $(M\,;N)$ de points de *D*, le segment $[MN]$ est inclus dans *D*.

Exemples :

Les solides étudiés au collège dont on vient de rappeler les noms et les représentations en perspective sont des polyèdres convexes.
Il en est de même du cône et du cylindre de révolution ainsi que de la boule.

Les solides de Platon sont convexes (voir plus loin paragraphe à la fin du cours).

Au XVI^{e} siècle, Kepler s'est intéressé à des polyèdres non convexes (par exemple, la *stella octangula*) présentant de belles symétries.

Pour traduire ce qu'est une partie non convexe, on fonctionne par négation de la proposition quantifiée : le « quel que soit » devient alors un « il existe ».

Une partie D du plan ou de l'espace n'est pas convexe lorsqu'il existe (au moins) un couple $(\mathrm{M}\,;\mathrm{N})$ de points de D tel que le segment $[\mathrm{MN}]$ ne soit pas inclus dans D.

- Le cylindre droit, la boule, l'ellipsoïde de révolution (ballon de rugby), le tore ne sont pas des polyèdres ainsi que le cône de révolution.

Un ellipsoïde de révolution est la surface engendrée en faisant tourner une ellipse autour de l'un de ses axes.

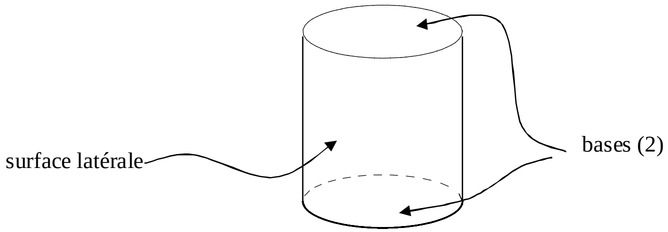
Un paraboloïde de révolution est la surface engendrée en faisant tourner une ellipse autour de son axe.

- La sphère, l'ellipsoïde de révolution, le tore ont une particularité : ce sont des surfaces sur lesquelles on ne peut pas tracer de segment dessus.

Il y a plusieurs manières de représenter un cube, un tétraèdre, une pyramide ou un prisme en perspective cavalière.

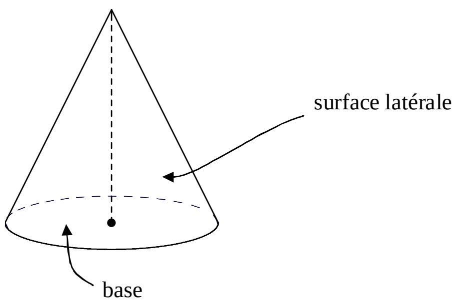
En général, on les représente toujours de sorte qu'une face ou qu'une base soit « posée » sur un plan horizontal.

Cylindre de révolution



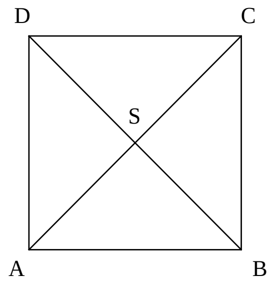
Il y a une surface latérale qui mise à plat sur un patron est un rectangle et deux bases qui sont des disques.
Ce n'est pas un polyèdre car les bases ne sont pas des polygones.

Cône de révolution



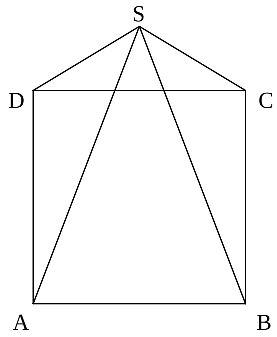
Il y a une surface latérale qui mise à plat sur un patron est un secteur circulaire et une base qui est un disque.
Ce n'est pas un polyèdre car la base n'est pas un polygone.

Une pyramide à base carrée en vue de dessus :



Possible mais à éviter car on ne peut pas voir qu'il s'agit d'une pyramide

La perspective suivante, en revanche, n'est pas possible.



Calculs dans l'espace

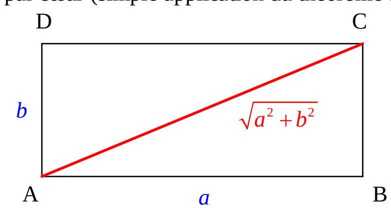
1°) Aires et volumes (cf. chap. 1)

2°) Exemple de calcul de longueur : grande diagonale d'un cube

Rappel :

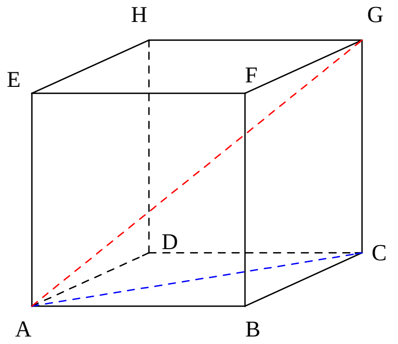
Longueur des diagonales d'un rectangle de dimensions *a* et *b*

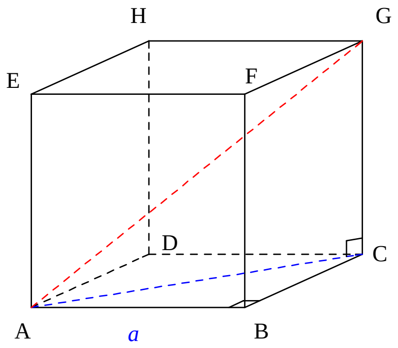
Le résultat suivant est à connaître par cœur (simple application du théorème de Pythagore) :



Cas particulier : longueur des diagonales d'un carré (en faisant $a=b$) $a\sqrt{2}$

ABCDEFGH est un cube d'arête a ($a > 0$).
Calculer AG en fonction de a.





On observera la représentation en perspective cavalière des angles droits (non conservés pour les deux angles marqués car ils ne sont pas dans un plan frontal.

On travaille dans le triangle ACG rectangle en C (on justifiera plus tard dans le chapitre sur l'orthogonalité dans l'espace que l'on a bien ici un angle droit).

On sait que $\text{AC} = a\sqrt{2}$ (formule donnant la longueur des diagonales d'un carré).

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACG, on a

$$\text{AG}^2 = \text{AC}^2 + \text{CG}^2$$

$$= \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2$$

$$= 2a^2 + a^2$$

$$= 3a^2$$

On en déduit que $\boxed{\text{AG} = a\sqrt{3}}$.

Ce résultat est à apprendre par cœur et peut-être utilisé directement.

On peut le voir comme une représentation en trois dimensions de la spirale de Pythagore.

Petite remarque de Hyacinthe Villin le vendredi 20-11-2021

diagonale d'un carré dans le plan = $a\sqrt{2}$

diagonale d'un cube dans l'espace = $a\sqrt{3}$

On note que le chiffre sous le radical est la dimension.

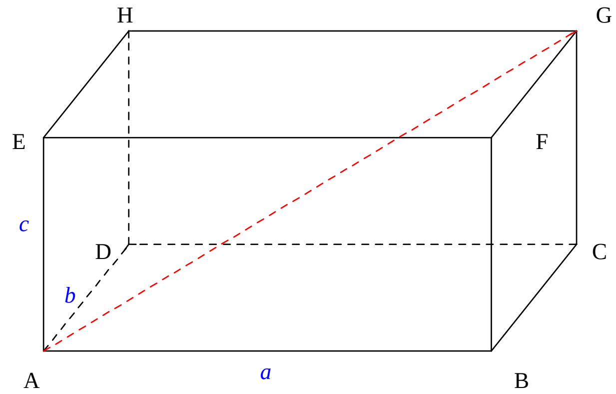
On pourrait généraliser à des dimensions supérieures.

Grande diagonale d'un pavé droit :

ABCDEFGH est un pavé droit dont les dimensions sont a, b, c ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

$$\text{AG} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

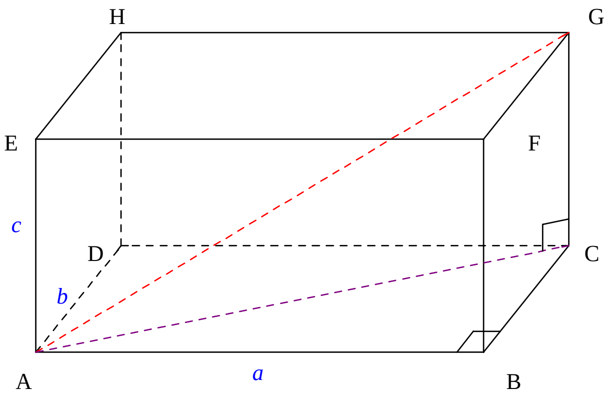
Ce résultat est à apprendre par cœur et peut-être utilisé directement.



Démonstration :

On applique deux fois le théorème de Pythagore.

On peut par exemple considérer les triangles ABC et ACG.



Le triangle ABC est rectangle en B car le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Le triangle ACG est rectangle en C (nous admettons ce résultat qui sera justifié dans le chapitre sur l'orthogonalité dans l'espace).

Comme $BC = AD = b$, on a $AC^2 = a^2 + b^2$.

Comme $CG = AE = c$, on a $AC^2 = AC^2 + CG^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

On en déduit que $AG = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ce résultat permet de retrouver la longueur de la grande diagonale d'un cube.

Le 13-11-2019 (tapé le 31-10-2021)

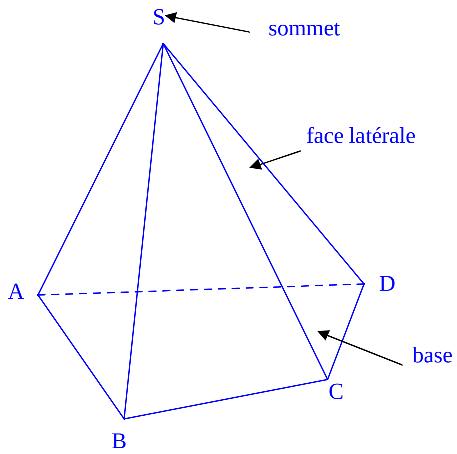
J'avais noté sur une feuille « le coin de cube »

volume

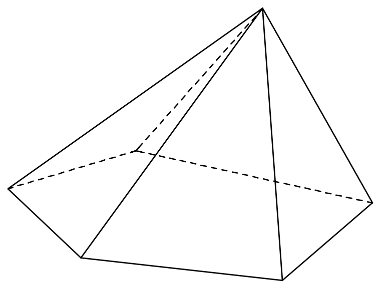
Il est possible aussi de calculer le volume d'un « coin de parallélépipède rectangle » (qui correspond au volume d'un tétraèdre trirectangle).

Une pyramide est un solide constitué :
- d'une base qui est un polygone (plan) ;
- de faces latérales qui sont des triangles ayant un sommet commun appelé le sommet de la pyramide.

Remarque : Il y a autant de faces latérales que de côtés à la base.



Pyramide à base pentagonale (base à 5 côtés) :



Le 24-10-2016

Une pyramide est un solide constitué :
- d'une base qui est un polygone
- de faces latérales qui sont des triangles ayant un sommet commun appelé le sommet de la pyramide

Remarque : Il y a autant de faces latérales que de côtés à la base.

La hauteur de la pyramide désigne :
- la droite passant par le sommet de la pyramide et perpendiculaire à la base
- la longueur du segment joignant le sommet de la pyramide au pied de la hauteur

Une pyramide est régulière si :
- la base est un polygone régulier, c'est-à-dire ayant tout ses côtés égaux (exemple carré, triangle équilatéral) ;
- le pied de la hauteur est le centre de la base.

Cas particulier : Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Ce chapitre a pour objectif de reprendre contact avec l'espace.
Nous allons donc revoir les notions de base étudiées en seconde.
L'observation de droites et de plans dans un cube permet de dégager les règles de base d'incidence et de parallélisme qui sont rappelés dans ce chapitre.

Volume d'un prisme à base triangulaire tronqué (planche de 1935) et d'un secteur sphérique.

I. Le « passage à l'illimité »

1°) Les solides

Au collège on s'est intéressé à l'étude de solides de l'espace.

On a vu au collège que les solides usuels tels que cube, pavé droit, prisme droit, pyramide possèdent tous des faces (polygonales) limitées par des arêtes.

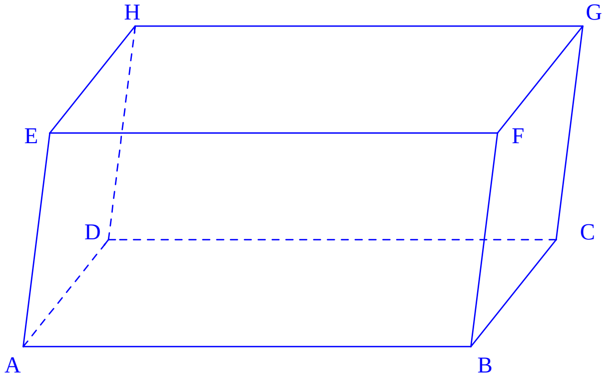
D'autres solides, tels que la boule, le cylindre de révolution, le cône de révolution n'ont pas de faces (les bases d'un cylindre de révolution ou la base d'un cône de révolution, qui sont des disques, ne sont pas des faces).

Les solides qui possèdent des faces sont appelés des **polyèdres** (du grec *poly* : « plusieurs » et *hedron* : « face »).
Les cubes, les pavés droits, les prismes, les pyramides sont des polyèdres.
Les boules, les cylindres de révolution, les cônes de révolution ne sont pas des polyèdres.

On notera que la sphère n'est pas un solide ; c'est une surface.

Un solide assez peu étudié au collège est le parallélépipède quelconque. C'est un solide dont toutes les faces sont des parallélogrammes.

Figure



Il s'agit d'un cas particulier de prisme oblique (« parallélogramme en 3 D »).

Dans un parallélépipède, les faces opposées sont parallèles.

2°) Droites et plans

Comme dans le plan, on ne peut se limiter à des segments. On est obligé de faire appel à la notion de droite.

En seconde, on a vu que le prolongement des arêtes d'un cube (ou de tout autre polyèdre) permettait de définir des **droites**.
De même, on a vu que les faces d'un cube (ou de tout autre polyèdre) permettaient de définir des **plans**.

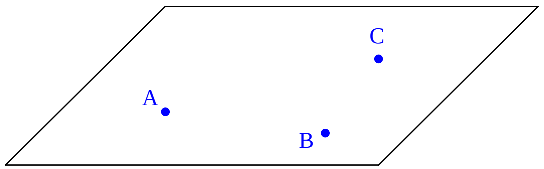
Principe fondamental :

Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (le théorème de Thalès, le théorème de Pythagore…).

On retiendra que la géométrie dans l'espace fait intervenir des points, des droites et des plans.

3°) Caractérisation d'un plan

Trois points A, B, C de l'espace non alignés définissent un plan de l'espace et un seul.



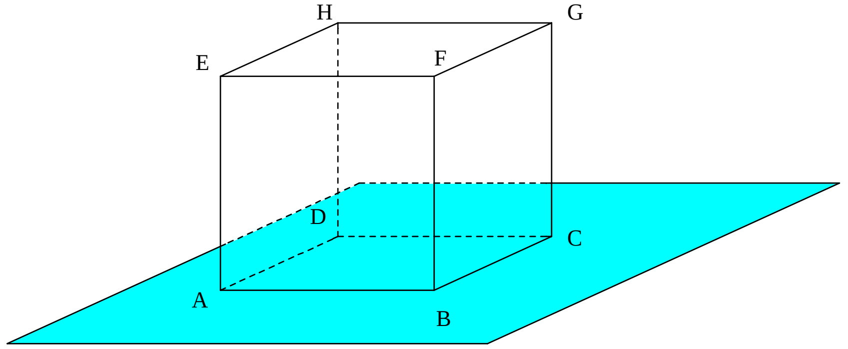
Ce plan est noté (ABC) (ou (BAC) etc…).

Le 8 novembre 2022

Par 1 point de l'espace, il passe une infinité de plans.
Par 2 points distincts de l'espace, il passe une infinité de plans.
Par 4 points deux à deux à deux distincts, il ne passe pas forcément un plan.

Bien qu'un plan de l'espace soit infini, on le représente souvent sous la forme d'un parallélogramme, comme une feuille de papier.
De même, une droite n'est jamais représentée entièrement. On n'en représente qu'une portion.

Exemple :



La face ABCD permet de définir un plan illimité (comme une feuille de papier, mais infinie).
Ce plan peut être noté (ABC) ou (ABD) ou (ACD) ou (BCD) etc.
On évite de le noter (ABCD). On désigne toujours un plan par trois points non alignés.

Pour désigner un plan, on choisit trois points quelconques non alignés dans ce plan (peu importe le choix).

Dès lors que l'on parle du plan (ABC), on sait que l'on considère le plan qui « contient » les points A, B, C.
Il s'agit de toute la surface.

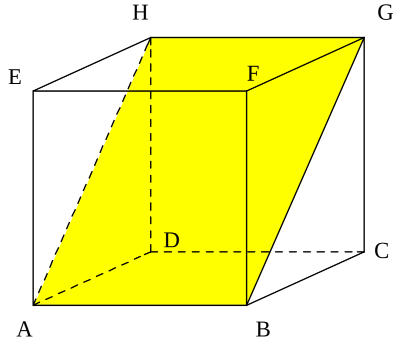
cf. ex. 3 corrigé le 18-11-2021 en T6 et T7

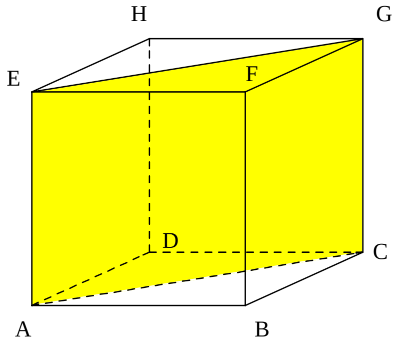
Les points M, N, F, G sont dans le plan (EFG) …
Un plan est noté par trois points : c'est considéré comme toute la surface.
Les trois points sont choisis peu importe.

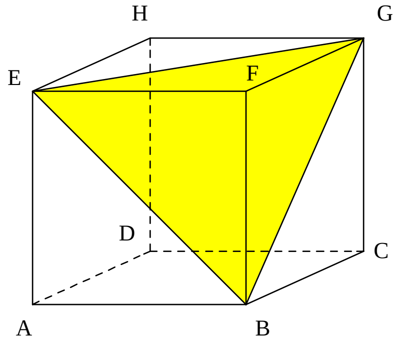
Toutes les faces du cube définissent des plans.

On peut aussi considérer d'autres plans qu'il faut s'entraîner à « voir » :

Exemples :
- plan défini par les points A, B, G, H (on peut parler de « plan oblique » ; ce plan coupe – partage – le cube en deux solides de même volume ; ce plan « contient » aussi le centre du cube)
- plan défini par les points A, C, G, E (même remarque que précédemment)
- plan défini par les points B, E, G (il n'y a pas d'autres points du cube dans ce plan ; il passe par les centres de trois faces).







Dans les deux premiers cas, on peut parler de « plans transversaux ».

Le 24-11-2021

On peut aussi considérer d'autres plans que ceux définis par des faces du cube.

Exemple :

(BEG) est un plan qui n'est pas défini par une face.
Il ne contient pas d'autres sommets du cube que B, E, G.
Il ne contient aucune arête du cube.

Le plan (ABG) contient les centres de deux faces opposées.
Il contient aussi le centre du cube.

4°) Définition

On dit que des points sont « coplanaires » pour exprimer qu'ils appartiennent à un même plan.

La signification de l'adjectif « coplanaire » s'explique par son étymologie : le mot est formé de « co » et de « planaire ».

La notion de coplanaire n'a d'intérêt que pour un ensemble d'au moins quatre points.

En effet :
- si l'on a deux points distincts de l'espace, il existe une droite qui les contient tous les deux ; il suffit de considérer un plan qui contient cette droite.
- si l'on a trois points distincts de l'espace, soit ils sont alignés et dans ce cas, ils sont forcément coplanaires ; soit ils ne sont pas alignés et dans ce cas, ils sont forcément coplanaires.

5°) Remarque sur la notation d'un plan

Même quand on connaît quatre points non alignés d'un plan, on le note toujours avec trois points non alignés entre parenthèses.

C'est la même chose pour les droites du plan. On les désigne toujours par deux points distincts même si on connaît plus de deux points.

Par exemple, dans un cube ABCDEFGH, le plan défini par la face ABCD (ou contenant la face ABCD) peut être noté (ABC) ou (ABD) ou (BCD) etc. L'ordre des points n'a aucune importance.

Le 10 novembre 2022

Propriété (en réponse à un problème de vision)

Soit A, B, C trois points d'un plan *P*.
Le point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme appartient au plan *P*.

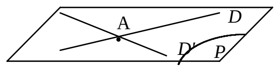
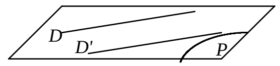
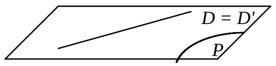
Cette propriété permet de voir que le point H appartient au plan (ABG) dans un cube.

II. Position relative de deux droites de l'espace

1°) Différents cas possibles

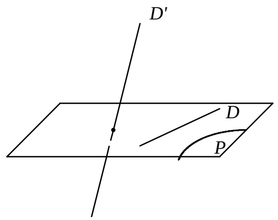
Deux droites *D* et *D*' de l'espace peuvent être :

• **coplanaires** (c'est-à-dire contenues ou incluses dans un même plan)

		
sécantes	**strictement parallèles**	**confondues**
	parallèles	

ou

• **non coplanaires** (il n'existe aucun plan que les contienne toutes les deux)



Le mardi huit novembre 2022

On réserve l'adjectif « sécantes » au cas où l'on a deux droites qui se coupent en un seul point.
On ne l'emploie pas dans le cas où l'on a deux droites confondues.

2°) Définitions

On dit que deux droites de l'espace sont coplanaires pour exprimer qu'elles sont contenues dans un même plan.

On dit que deux droites de l'espace sont parallèles pour exprimer :
• soit quelles sont coplanaires sans point commun ;
• soit qu'elles sont confondues.

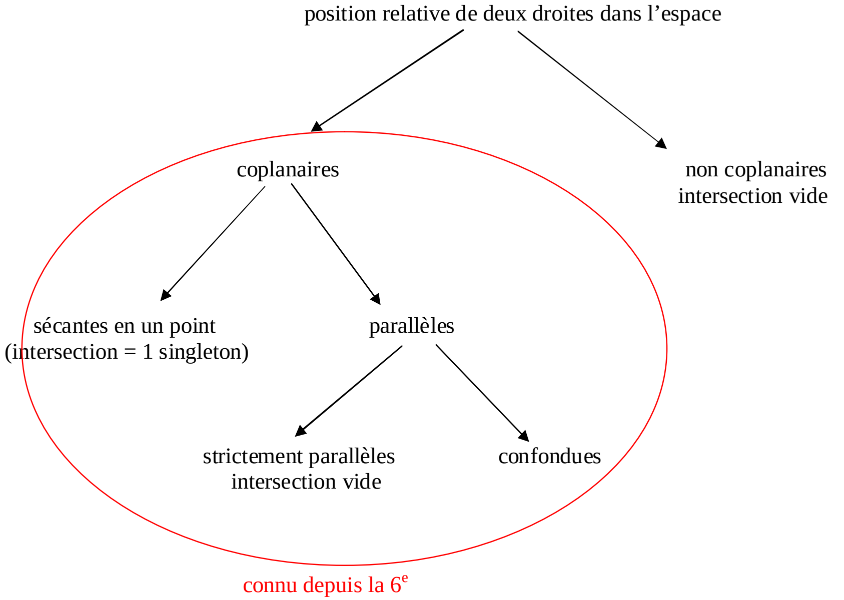
3°) Remarque

Deux droites non coplanaires de l'espace ne sont pas parallèles.

Deux droites sécantes de l'espace sont coplanaires.

Deux droites parallèles de l'espace sont coplanaires.

Donc en résumé, **deux droites non coplanaires sont deux droites qui ne sont ni sécantes ni parallèles**.



• position relative d'une droite et d'un cercle dans le plan ; cas de tangence

• position relative de deux cercles dans le plan

• position relative de deux sphères dans l'espace ; cas de tangence

L'adjectif coplanaire s'applique à des points et à des droites (mais pas à des plans).
Plus tard, nous verrons qu'il s'utilise aussi pour des vecteurs.

Le 17 novembre 2021

Propriété

Soit A, B, C, D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

• Si A, B, C, D sont coplanaires, alors les droites (AB) et (CD) sont coplanaires.

• Si A, B, C, D ne sont pas coplanaires, alors les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

On peut exprimer une équivalence.

Propriété

Soit A, B, C, D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont coplanaires.

Deux droites sécantes de l'espace sont forcément coplanaires.

Deux droites parallèles de l'espace sont forcément coplanaires.

Complément sur les droites parallèles :

• Deux droites parallèles de l'espace sont toujours coplanaires.

• En revanche, en général, c'est faux en revanche pour 3 droites parallèles.

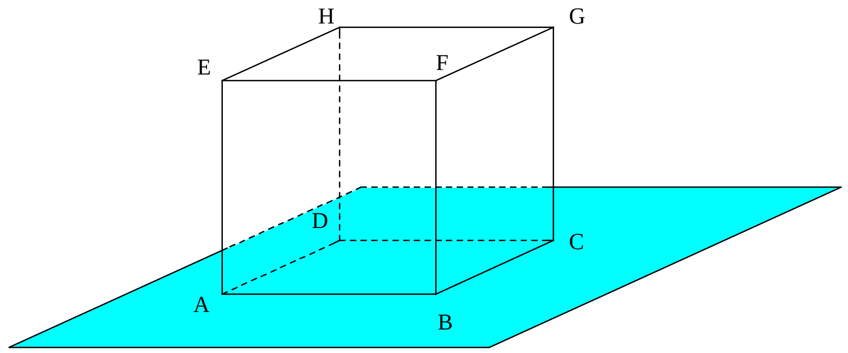
Exemples :

On se place dans un cube ABCDEFGH.

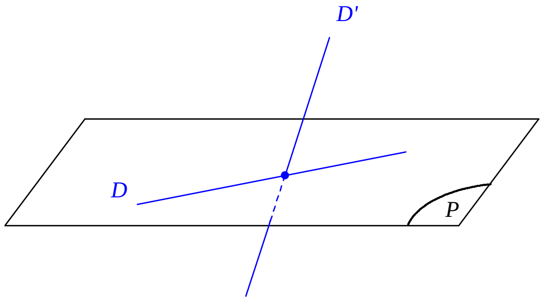
Les droites (AB) et (EF) sont parallèles. Elles sont coplanaires, contenues tooutes les deux dans le plan de la face (ABFE).

Les droites (AB) et (GH) sont parallèles. Elles sont coplanaires, contenues toutes les deux du rectangle ABGH (ce n'est pas un plan défini par une face).

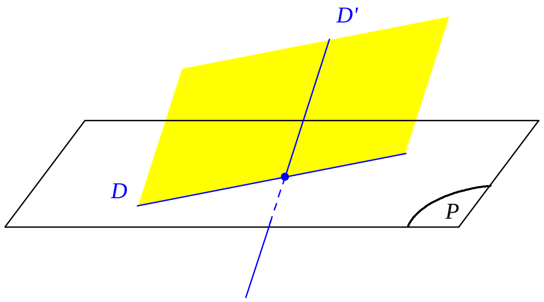
Les droites (AB), (EF), (GH) sont toutes parallèles mais non coplanaires.



Attention, sur la figure ci-dessous les droites *D* et *D*' sont sécantes.



Elles sont bien coplanaires. On peut trouver un plan qui les contienne toutes les deux.



Vocabulaire :

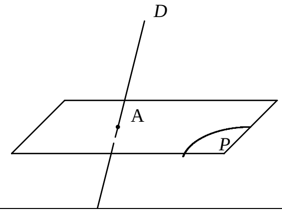
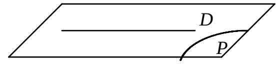
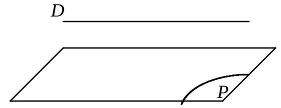
Comme dans le plan, lorsque plusieurs droites se coupent en un même point, on dit qu'elles sont concourantes.
On parle de point de concours pour désigner leur point commun.

Exemples :
Les médianes d'un triangle sont concourantes.
Idem pour les médiatrices, les hauteurs et les bissectrices intérieures.
Il s'agit de propriétés (qui se démontrent donc…) très importantes pour les triangles.

III. Position relative d'une droite et d'un plan

1°) Différents cas possibles

Une droite D et un plan P de l'espace peuvent être :

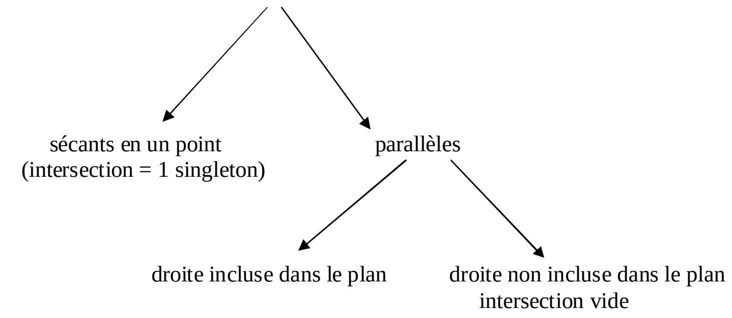
sécants	**parallèles**	
	 $D \subset P$	 strictement parallèles

$D \cap P = \{A\}$ $\qquad$ $D \cap P = D$ $\qquad$ $D \cap P = \varnothing$

Dans le premier cas, l'intersection est un singleton.

On peut représenter la droite sous n'importe quel angle.

Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace



Les symboles :

- $\in$: « appartient », « est élément de »

- $\subset$: « est inclus dans », « est contenu dans »

Le premier symbole s'appelle symbole d'appartenance.
Il provient de la lettre grecque ε qui correspond au e en français. Il s'agit de la première lettre du mot « élément ».

Le deuxième symbole s'appelle symbole d'inclusion.
Il provient de la lettre C. Il s'agit de la première lettre du mot « contenu ».

Utilisation :

… ∈ … → un élément, un ensemble

… ⊂ … → un ensemble, un ensemble

Les éléments sont les points de l'espace.

Un plan, une droite sont des ensembles de points.

Le vendredi 19-11-2021

Par un léger abus de langage (et de vocabulaire), on s'autorise fréquemment à dire qu'un plan contient un point.

Exemple :

« Le plan *P* contient les points A et B. »

Le mercredi novembre 2022

L'adjectif « sécant » est réservé au cas où une droite coupe un plan en un seul point.
On ne l'emploie pas dans le cas où l'on a deux plans confondus.

2°) Définition

On dit qu'une droite de l'espace est parallèle à un plan pour exprimer

• soit qu'elle n'a aucun point commun avec ce plan ;

• soit qu'elle est incluse dans ce plan.

3°) Remarques

• Une droite et un plan non parallèles sont sécants en un point.

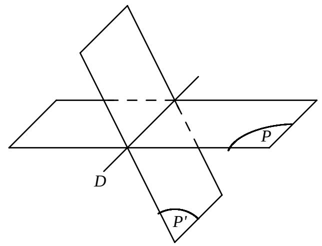
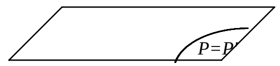
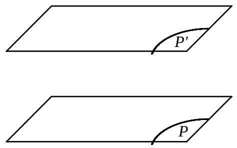
• Du point de vue du vocabulaire, on retiendra que l'on dit qu'un point appartient à une droite ou à un plan.
Mais qu'en revanche, on ne dit pas qu'une droite « appartient » à un plan (ou « fait partie » d'un plan).
On dit qu'elle est incluse dans ce plan ou qu'elle est contenue dans ce plan.

• On notera également que si un plan contient deux points distincts A et B, alors il contient la droite (AB).

IV. Position relative de deux plans de l'espace

1°) Différents cas possibles

Deux plans *P* et *P*' de l'espace peuvent être :

sécants (suivant une droite *D*)	**parallèles**	
		
	confondus	**strictement parallèles**

Position relative de deux plans de l'espace

sécants selon une droite
(intersection = 1 droite)

parallèles

confondus

strictement parallèles
intersection vide

2°) Définition

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles pour exprimer

• soit qu'ils n'ont aucun point commun ;

• soit qu'ils sont confondus.

V. Un premier bilan de quelques notions

1°) Plans de l'espace

Un plan de l'espace peut être défini par :
- **3 points non alignés (noté avec parenthèses) ;**
- **2 droites sécantes ;**
- **2 droites strictement parallèles ;**
- **1 droite et un point n'appartenant pas à cette droite.**

2°) Règles d'incidence

Le mot « incidence » s'emploie pour étudier l'intersection de deux droites, de deux plans ou d'une droite et d'un plan.
C'est un mot du langage courant qui s'emploie dans un autre sens (« La sécheresse a eu une incidence sur le prix des fruits »).

- **2 droites sécantes de l'espace se coupent en point.**
- **1 droite et un plan sécants se coupent en un point.**
- **2 plans sécants se coupent suivant une droite.**

3°) L'adjectif « coplanaire »

● **Points coplanaires :** points situés dans un même plan

● **Droites coplanaires :** droites | contenues dans un même plan
| incluses

Deux droites sont coplanaires lorsqu'elles sont sécantes ou parallèles.

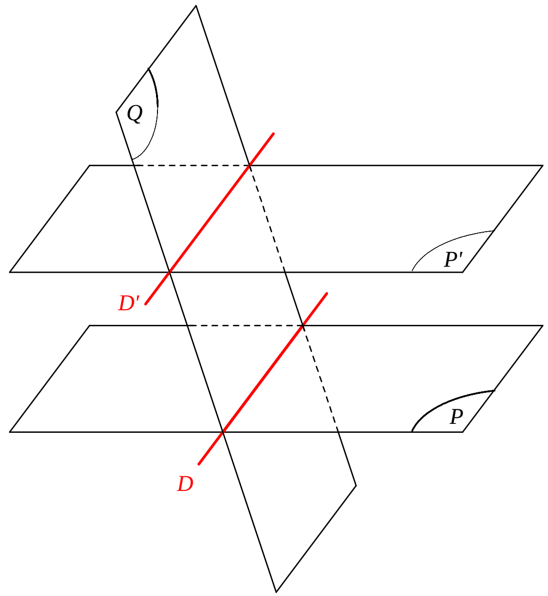
Attention, on ne dit pas que deux plans sont coplanaires.
Nous verrons plus tard un dernier usage possible de l'adjectif coplanaire avec les vecteurs (chapitre sur les vecteurs de l'espace).

4°) L'adjectif « confondu »

Il vient du verbe « confondre ».
Il s'emploie pour des points, pour des droites, pour des plans.

VI. Théorèmes de parallélisme (admis sans démonstration)

1°) Théorème 1



(Figure à savoir refaire avec les pointillés)

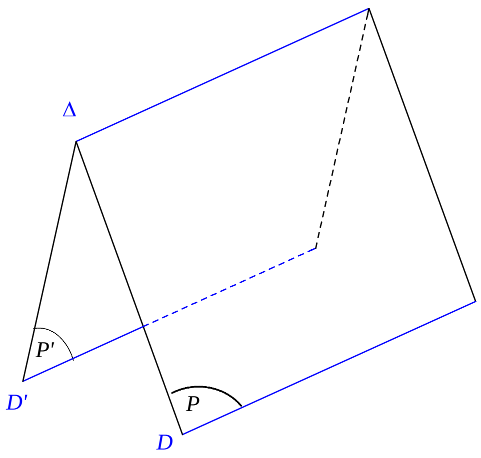
Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors leurs droites d'intersection sont parallèles.

(Ce théorème sert à démontrer que deux droites sont parallèles).
Il s'agit de la version courte du théorème : « Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui couple l'un coupe l'autre et leurs droites d'intersection sont parallèles ».

Exemple dans un cube :

On se place dans un cube ABCDEFGH.
On applique le théorème aux plans parallèles (ABC) et (EFG) coupés par le plan (BCE).
Les droites d'intersection sont (AD) et (EH). Elles sont parallèles.

2°) Théorème 2 (« théorème du toit »)

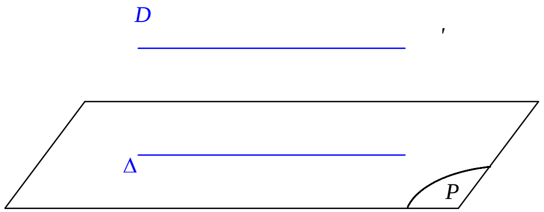


Si deux droites contenues dans deux plans sécants sont parallèles, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection.

Ce théorème se démontre facilement par l'absurde.

Le nom fait référence à un toit, comme le montre la figure.
On peut aussi utiliser l'image d'un livre ouvert.

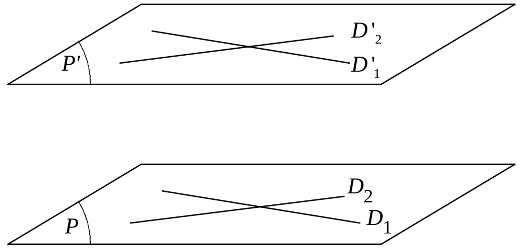
3°) Théorème 3



Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

(Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est parallèle à un plan).

4°) Théorème 4



Si deux droites <u>sécantes</u> d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Attention : Une droite ne suffit pas.

(Ce théorème sert à démontrer que deux plans sont parallèles.)

5°) Théorème 5

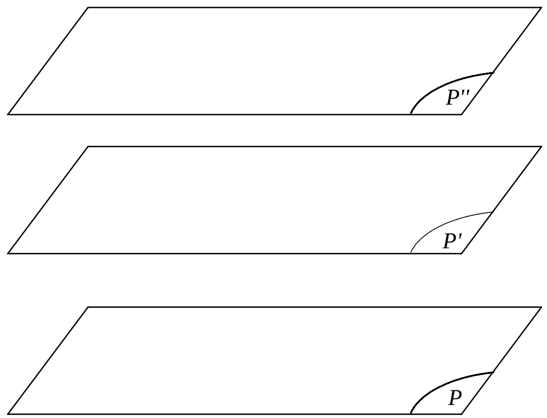
Il s'agit d'un théorème similaire à celui pour les droites du plan.

Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Le théorème peut s'exprimer sous la forme suivante : « Si $D \,//\, D'$ et $D' \,//\, D''$, alors $D \,//\, D''$ ».

On dit que la relation de parallélisme des droites de l'espace est transitive (on parle de « transivité » de la relation de parallélisme des droites de l'espace).

6°) Théorème 6

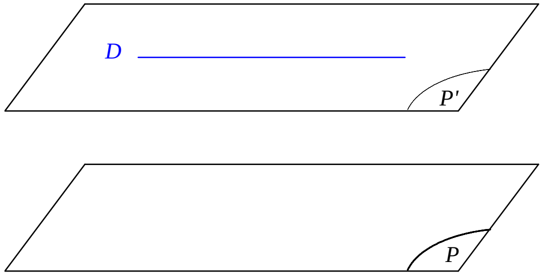


Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

Le théorème peut s'exprimer sous la forme suivante : « Si P // P' et P' // P'', alors D // P'' ».

On dit que la relation de parallélisme des plans de l'espace est transitive (on parle de « transivité » de la relation de parallélisme des plans de l'espace).

7°) Théorème 7



Si deux plans sont parallèles, alors toute droite (de l'espace) incluse dans l'un (des plans) est parallèle à l'autre.

(Ce théorème sert à démontrer qu'une droite est parallèle à un plan).

VII. Démonstrations dans l'espace

1°) Utilisation des théorèmes

• Démontrer que deux droites sont parallèles

Théorème 1
Théorème 2
Théorème 5

• Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

Théorème 3
Théorème 7

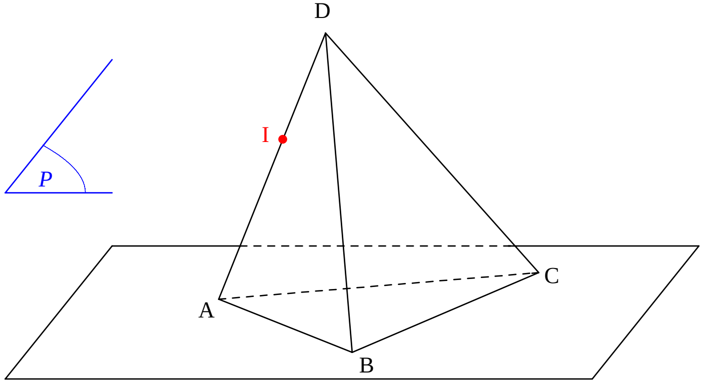
• Démontrer que deux plans sont parallèles

Théorème 4
Théorème 6

2°) Exemple de rédaction modèle

ABCD est un tétraèdre.
$I \in]DA[$
P : plan passant par I parallèle à (ABC)
P coupe (BD) en J.

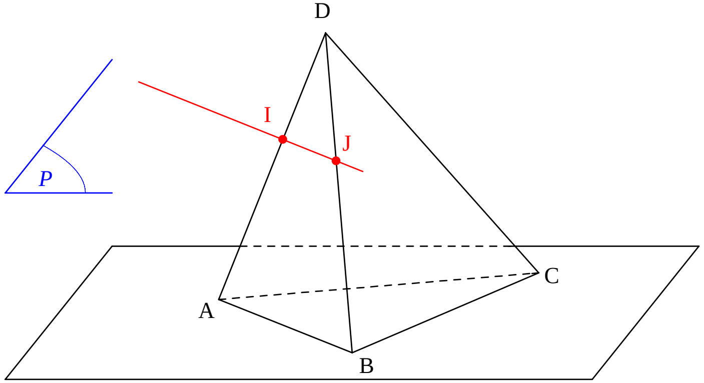
Démontrer que (IJ) // (AB).



Théorème 1 (le citer)

Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors leurs droites d'intersection sont parallèles.

$$\left.\begin{array}{l} P//(\mathrm{ABC}) \\ P\cap(\mathrm{ABD})=(\mathrm{IJ}) \\ (\mathrm{ABC})\cap(\mathrm{ABD})=(\mathrm{AB}) \end{array}\right\} \text{ donc } (\mathrm{IJ}) \ // \ (\mathrm{AB}).$$



3°) Remarque de vocabulaire

On ne dit pas qu'une droite « appartient » (ou « fait partie ») d'un plan.
On dit qu'elle est « incluse » ou « contenue » dans ce plan.

Notation : $D \subset P$

« est inclus dans »

(à ne pas confondre avec $\in$: « appartient à », « est élément de »)

En revanche, on dit qu'un point appartient à une droite ou à un plan.

VIII. Exemples de sections planes de solides

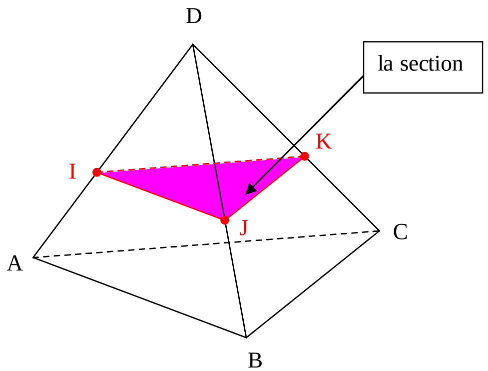
Le mot *section* vient du latin $\boxed{\text{secare}}$ qui signifie « couper » et qui a donné les mots français section, sécateur, sécable, sexe…

La difficulté consiste à visualiser, imaginer (avec la difficulté : deux droites qui se coupent sur la représentation en perspective cavalière ne se coupent pas forcément dans la réalité).

Il faut créer des points.

1°) Exemple 1

ABCD est un tétraèdre.
$I \in]DA[$



Tracer la section du tétraèdre par le plan *P* passant par I et parallèle au plan (ABC) (le plan de section).

On utilise le théorème 1.

On construit le point J de $[BD]$ tel que (IJ) // (AB).
On construit le point K de $[CD]$ tel que (JK) // (BC).

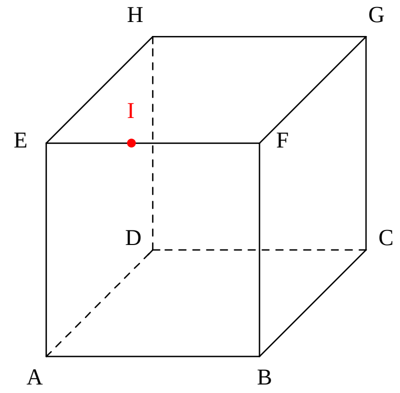
La section du tétraèdre par le plan *P* est le triangle IJK.

On respecte les conventions de tracé : le segment $[IK]$ est tracé en pointillés.

Remarque : Le théorème 1 permet de justifier que (IK) // (AC), parallélisme qui apparaît sur la figure.

2°) Exemple 2

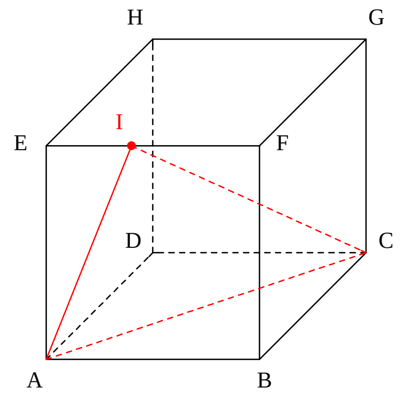
ABCDEFGH est un cube.
$I \in]EF[$



Tracer la section du cube par le plan (ACI).

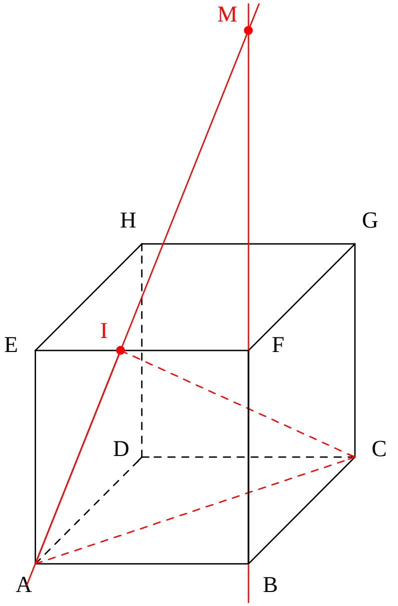
1ère méthode : par tracé hors solide

On marque en rouge tous les points du plan (ACI).
Étape 1 :



On respecte les conventions de tracé de la perspective cavalière : tout ce qui est caché est en pointillés.

Étape 2 :



On prolonge les droites (AI) et (BF). Il s'agit de prolongements hors du cube (d'où le nom de la méthode « tracé hors solide »).

Les droites (AI) et (BF) sont sécantes en un point M.

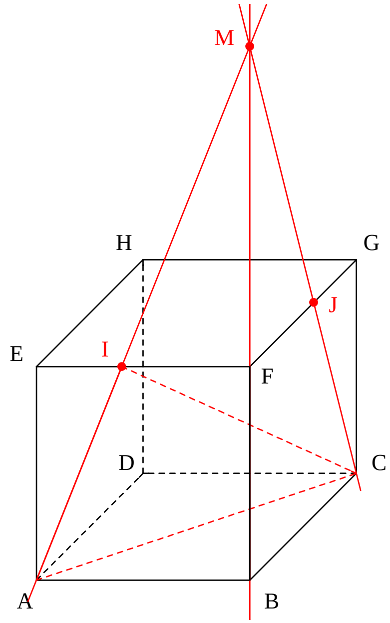
Ce point appartient à la droite (AI). Or la droite (AI) est contenue dans le plan (ACI).

Donc le point M appartient au plan (ACI). Il est donc marqué en rouge.

Il vaut mieux ne pas tracer le segment $[\mathrm{CI}]$.

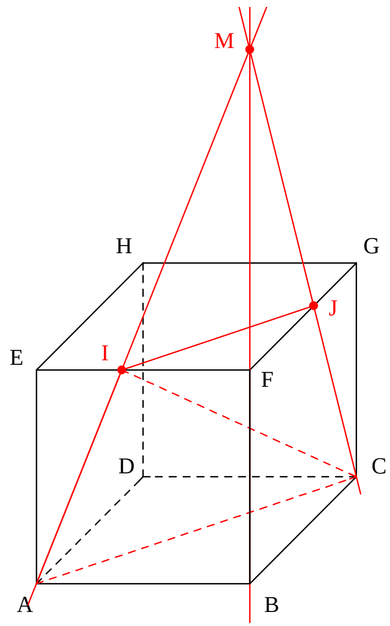
M est un point de construction (point intermédiaire).

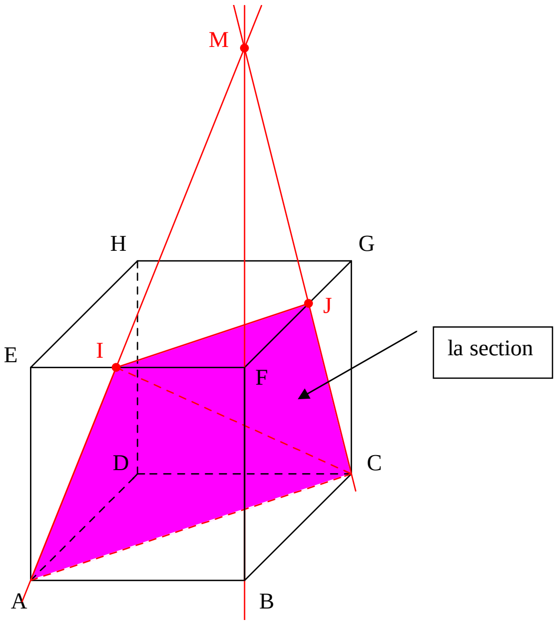
Étape 3 :



Les droites (CM) et (FG) sont sécantes en un point J. Ce point appartient à la droite (CM). Or la droite (CM) est contenue dans le plan (ACI). Donc le point J appartient au plan (ACI). Il est donc marqué en rouge.

Étape 4 :





On construit le point M d'intersection des droites (AI) et (BF).
On construit ensuite le point J d'intersection des droites (CM) et (FG).
La section du pavé droit par le plan (ACI) est le quadrilatère AIJC qui est un trapèze (isocèle).
En effet, le parallélisme des droites (AB) et (IJ) se justifie par la propriété « Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors les droites d'intersection sont parallèles. ».

2^e méthode : par parallélisme

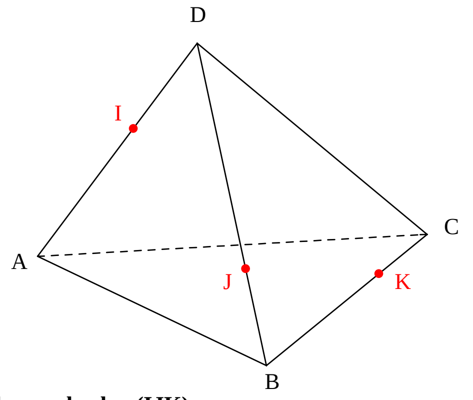
On trace la parallèle à (AC) passant par I.
On obtient ainsi le point J que l'on relie au point C.

La section du cube est le quadrilatère AIJC (trapèze isocèle).

L'utilisation d'un cube en plastique transparent (plexiglas) rempli de liquide coloré pour visualiser la section est particulièrement intéressante.

3°) Exemple 3

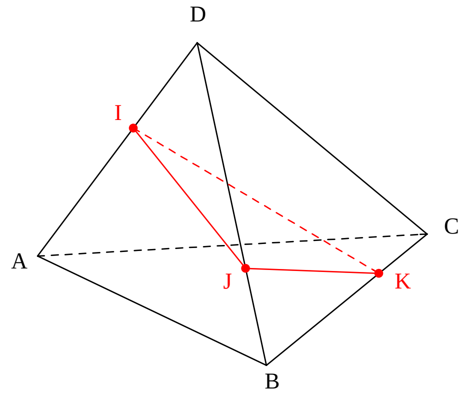
ABCD est un tétraèdre.
$I \in]DA[$
$J \in]BD[$
$(IJ) \nparallel (AB)$
$K \in]BC[$



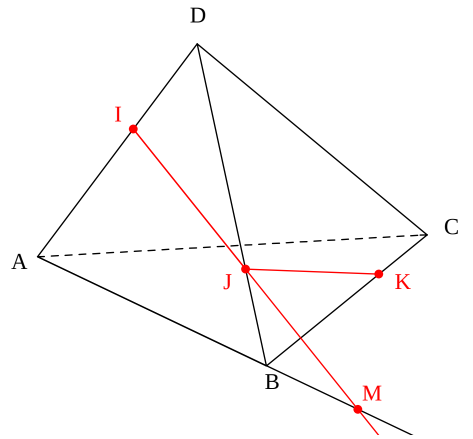
Tracer la section du tétraèdre par le plan (IJK).

Méthode par tracé hors solide (méthode des points rouges)

Étape 1 :



Étape 2 :



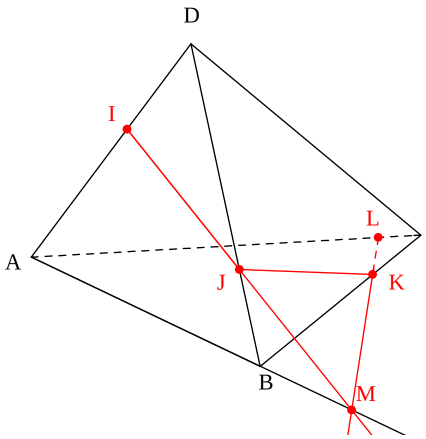
On prolonge la droite (IJ). Elle rencontre la droite (AB) en un point M.

En effet, (IJ) et (AB) sont deux droites contenues dans le plan (ABD) non parallèles donc elles sont sécantes.

prolonge la droite (IJ). Elle rencontre la droite (AB) en un point M.

Attention, les droites (IJ) et (BC) ne sont pas coplanaires donc ne se coupent pas (il faut imaginer, visualiser la figure dans l'espace).

Étape 3 :

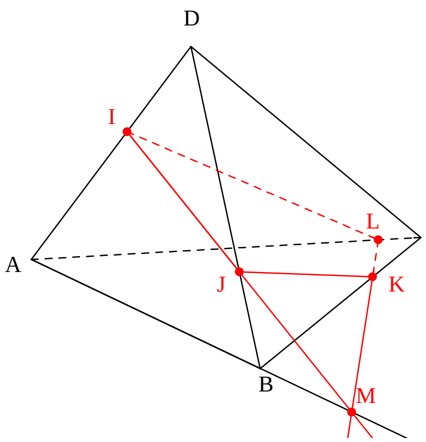


On prolonge la droite (MK). Elle rencontre la droite (AC) en un point L.

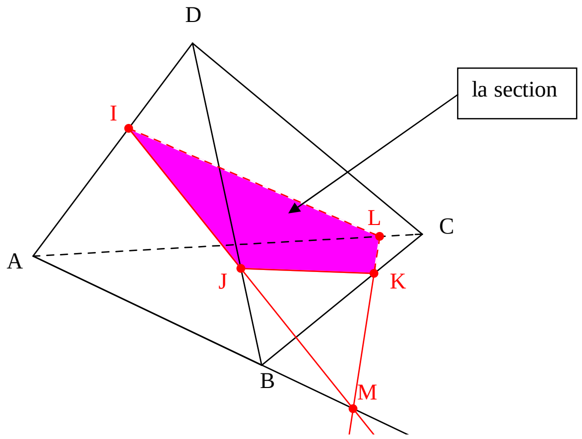
En effet, (MK) et (AC) sont deux droites contenues dans le plan (ABC) non parallèles donc elles sont sécantes.

On joint L et K en pointillés puisque le segment est caché.

Étape 4 :



On joint les points I et L en pointillés.



La section du tétraèdre par le plan (IJK) est le quadrilatère IJKL (quadrilatère quelconque).

Autre méthode :

Les droites (JK) et (CD) se coupent. On note N leur point d'intersection.

On se sert de ce point à la place de M pour effectuer la construction de la section.

4°) Bilan

La section d'un polyèdre (solide qui possède des faces) par un plan est un polygone (sauf si c'est un point ou un segment).

Section d'un tétraèdre : 3 ou 4 sommets (la section peut être un triangle ou un quadrilatère quelconque).

Section d'un cube : entre 3 et 6 sommets.

Remarque : Dans un cube, la méthode de tracé d'une section par la méthode de parallélisme utilise le fait que les plans définis par les faces opposées sont parallèles.

Un logiciel de géométrie dynamique tel que Geogebra 3D permet de faciliter l'étude des sections de solides.

On peut aussi utiliser des solides en plexiglas que l'on peut remplir de liquide coloré ou de semoule.

IX. Figures dans l'espace

1°) Règles de perspective parallèle

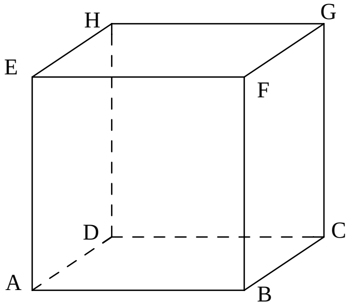
• Une droite est représentée par une droite et donc trois points alignés dans l'espace sont représentés par trois points alignés.

• Deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par deux droites parallèles.

• Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné et, plus généralement, la représentation conserve sur un segment les proportions de longueurs.

2°) Dispositions des points pour les cubes

Le cube est une figure de référence dans l'espace.
Un cube ABCDEFGH est représenté « posé » sur la face ABCD (dans un plan horizontal, perpendiculaire au plan frontal) avec ABFE pour face frontale (c'est-à-dire qui apparaît devant).



Les points A, B, C, D correspondent aux points E, F, G, H (on tourne dans le même sens).

Cette disposition reste valable pour un parallélépipède (en particulier, pour un parallélépipède rectangle ou pavé droit).

Mettre une figure.

3°) Un angle de fuite à éviter

Lorsque l'on représente un cube en perspective cavalière, on évite à tout prix un angle de fuite de 45 °.
C'est un angle de fuite pratique quand on travaille sur du papier quadrillé mais qui peut créer des problèmes de perspective (problème de chevauchement).
En effet, si l'on représente par exemple un cube ABCDEFGH en perspective cavalière avec un angle de fuite de 45° et la face ABFE en face frontale, les points A,D, F, G alignés (et de même le centre de la face ABFE).
De même, le centre de la face ABFE peut être – par malheur – sur le segment [DH] sur la représentation comme le montre la figure ci-dessous.

4°) Les fausses intersections dans l'espace

Lorsque deux droites de l'espace se coupent sur une figure en perspective mais pas dans la réalité, on parle de « fausse intersection » (au sens où l'on a des droites non coplanaires qui se coupent sur la figure mais pas dans la réalité c'est-à-dire dans l'espace).
D'où la nécessité de raisonner quand on a des tracés à faire dans l'espace (on doit s'imaginer ce qui se passe dans la réalité).

X. Solides de Platon

Platon est un philosophe grec de l'Antiquité (V^{e} siècle avant Jésus-Christ).

Platon en parle dans l'un de ses célèbres dialogues, le *Timée*.

1°) Définition

On appelle les solides de Platon 5 solides (polyèdres) particuliers :
- le cube (le plus connu)
- le tétraèdre régulier
- l'octaèdre régulier
- l'icosaèdre régulier
- le dodécaèdre régulier

Représentation en perspective

2°) Deux tableaux célèbres de la Renaissance

● Portrait de Luca Pacioli - 1495 - Jacopo de Barbari
De la main droite, le mathématicien Luca Pacioli (1445-1514) fait de la géométrie et de la main gauche, il fait de l'arithmétique. Entourant Pacioli, sont placés de nombreux objets mathématiques.

● Portrait de Johannes Neudorfer et son fils - 1561 - Nicolaus Neufchatel
Cette peinture montre Johannes Neudorfer enseignant les mathématiques à son fils. Neudorfer pointe sur un dodécaèdre régulier qu'il tient dans sa main gauche.

3°) Patrons

Pour chacun d'eux, on donne un patron possible.

4°) Propriétés

Il s'agit de polyèdres réguliers convexes.
Ils sont dits réguliers car pour chacun, leurs faces, leurs côtés et leurs angles sont identiques.
Par exemple, le cube possède 6 faces carrées identiques, le tétraèdre possède 4 faces triangulaires équilatérales identiques, l'octaèdre en possède 8 et l'icosaèdre en possède 20. Reste le dodécaèdre qui possède 12 faces pentagonales régulières identiques.

On démontre qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers convexes.

Ils sont tous inscrits dans une sphère.

5°) Interprétation

Ces 5 formes sont connues depuis la nuit des temps. Platon les associe aux 5 éléments : le cube à la terre, l'icosaèdre à l'eau, l'octaèdre à l'air, le tétraèdre au feu et le dodécaèdre à l'univers.

XI. Patrons

1°) Introduction

Au collège, on vu que la plupart des solides admettent un patron (pavé droit, pyramide et cône).
En revanche, on peut démontrer que la boule (la sphère) n'admet pas de patron.

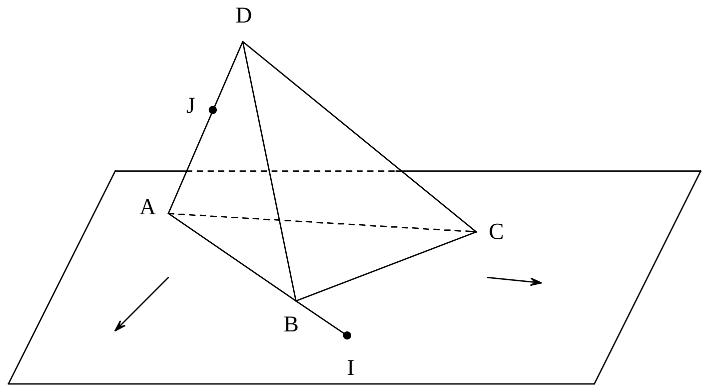
2°) Théorème (admis dans démonstration)

Tout polyèdre admet un patron.

Voir le livre *How to fold it*, de Joseph O'Rourke.

3°) Maquette d'un tétraèdre régulier à l'aide d'une feuille de papier

On peut réaliser un tétraèdre régulier par pliage d'une feuille de papier A4.



On considère une tétraèdre ABCD.

On considère le plan (ABC).

I …… (ABC)

I …… (ABC)

(AB) …… (ABC)

(BC) …… (ABC)

(AC) …… (ABC)

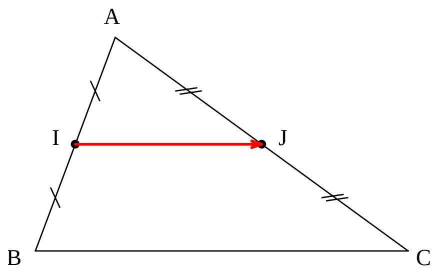
(AD) …… (ABC)

(BD) …… (ABC)

(BC) …… (ABC)

Droite des milieux dans un triangle quelconque

Soit A, B, C trois points quelconques du plan.
On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.



On suppose que B et C sont distincts.

On alors (IJ) // (BC) et $IJ = \dfrac{BC}{2}$.

Propriété 1 :

- Dans un triangle, la droite joignant les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté.
- Dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.

Propriété 2 :

Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

On peut aussi les voir comme un cas particulier du théorème de Thalès et de sa réciproque.

Une application : le théorème de Varignon