TS1

Contrôle du jeudi 27 septembre 2012 (50 minutes)

Dans les exercices **I** à **III**, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Aucune figure n'est demandée.

I. (6 points) On note U le point d'affixe – 1 et on pose $P^* = P \setminus \{\mathrm{U}\}$.

On note f l'application de P^* dans P qui, à tout point M de P^*, d'affixe $z \neq -1$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{z+1}$.

1°) On note A, B, C les points d'affixes respectives $z_\mathrm{A} = -\dfrac{1}{2}$, $z_\mathrm{B} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$, $z_\mathrm{C} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Calculer les affixes des points A', B', C', images respectives de A, B, C par *f*. Donner les résultats sans justifier.

$z_{\mathrm{A}'} =$ ………………	$z_{\mathrm{B}'} =$ ………………	$z_{\mathrm{C}'} =$ ………………

2°) Étant donné un nombre complexe *z* distinct de – 1, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec *x*, *y*, *x*′, *y*′ réels.

Exprimer *z*′ en fonction de *x* et *y* ; en déduire *x*′ et *y*′ en fonction de *x* et *y* (ne pas développer les dénominateurs).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

$x' =$ ………………………………………………	$y' =$ ………………………………………………

II. (5 points) Pour tout nombre complexe *z*, on note M, M′, M″ les points de *P* d'affixes respectives z, z^2, $z-2$.
Déterminer les valeurs de *z* (sous forme simplifiée) telles que le quadrilatère OMM′M″ soit un parallélogramme.
On rédigera selon le modèle suivant (à recopier) :

OMM′M″ est un parallélogramme ⇔ …

⇔ …

⇔ ….

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (5 points) Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z^2 - 2\mathrm{i}\overline{z}$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ $\left(\left(x\,;\,y\right) \in \mathbb{R}^2\right)$. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

$\mathrm{Re}\,Z =$ ……………………………	$\mathrm{Im}\,Z =$ ……………………………

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que Z soit réel.
On rédigera ainsi :

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ $\left(\left(x\,;\,y\right) \in \mathbb{R}^2\right)$.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ …

$\Leftrightarrow$ ….

On conclura clairement : « L'ensemble E est … ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points) On considère les équations $\left(z+\mathrm{i}\right)^2 + \left(z-\mathrm{i}\right)^2 = -4$ (1) et $\mathrm{i}z \times \overline{z} = z$ (2) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Compléter les phrases suivantes très lisiblement et sans rature :

Les solutions de l'équation (1) sont : ………………………………………………………………. .

Les solutions de l'équation (2) sont : ………………………………………………………………. .

Corrigé

I.

$U(-1)$

$P^* = P \setminus \{U\}$

f : application de P^* dans P qui, à tout point M de P^*, d'affixe $z \neq -1$, associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{1}{z+1}$

1°) $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $z_B = -\dfrac{1}{2} + i$, $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Calculons les affixes des points A′, B′, C′, images respectives de A, B, C par *f*.

$z_{A'} = 2$	$z_{B'} = \dfrac{2-4i}{5}$	$z_{C'} = 1+i$

2°) $z \neq -1$

$z = x + iy \quad \left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$

$z' = x' + iy' \quad \left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$

Exprimons z' en fonction de x et y.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{z+1} \\ &= \frac{1}{x+iy+1} \\ &= \frac{1}{x+1+iy} \\ &= \frac{1}{(x+1)+iy} \\ &= \frac{((x+1))-iy}{\left[((x+1))+iy\right]\left[((x+1))-iy\right]} \\ &= \frac{(x+1)-iy}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}$$

On a $x' = \operatorname{Re} z'$ et $y' = \operatorname{Im} z'$

donc

$x' = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$	$y' = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

II. $M(z) \qquad M'(z^2) \qquad M''(z-2) \qquad (z \in \mathbb{C})$

Déterminons les valeurs de *z* telles que le quadrilatère OMM′M″ soit un parallélogramme.

OMM′M″ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M''M'}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{M''M'}} \\ &\Leftrightarrow z_M - z_O = z_{M''} - z_{M'} \\ &\Leftrightarrow z = z^2 - z + 2 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

Considérons le polynôme $z^2 - 2z + 2$.

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2$

$b' = \dfrac{b}{2}$

Son discriminant réduit est égal à $\Delta' = -1$.

On a : $\Delta' < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_1 = 1 - i$ $\qquad$ $z_2 = 1 + i$

Donc **OMM′M″ est un parallélogramme si et seulement si $z = 1+i$ ou $z = 1-i$.**

III. $Z = z^2 - 2i\bar{z} \quad (z \in \mathbb{C})$

1°) $z = x + iy \quad \left((x\,;y) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$\begin{aligned} Z &= z^2 - 2i\bar{z} \\ &= (x+iy)^2 - 2i(x-iy) \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy - 2ix - 2y \\ &= x^2 - y^2 + 2ix(y-1) \end{aligned}$$

Donc :

$\operatorname{Re} Z = x^2 - y^2 - 2y$	$\operatorname{Im} Z = 2x(y-1)$

2°) **Déterminons l'ensemble.** $E = \{M(z) \in P / Z \in \mathbb{R}\}$.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ ($(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$).

$$M \in E \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, Z = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{ou} \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}$$

La conclusion peut se formuler de deux façons :

***E* est la réunion de la droite d'équation $x = 0$ (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) et de la droite d'équation $y = 1$.**

ou

$E = \Delta \cup \Delta'$ avec $\Delta :\ x = 0$ et $\Delta' :\ y = 1$

IV.

• **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+\mathrm{i})^2 + (z-\mathrm{i})^2 = -4$ (1).**

$$(1) \Leftrightarrow z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 + z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 = -4$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow z = \mathrm{i} \text{ ou } z = -\mathrm{i}$$

Les solutions de l'équation (1) sont i et – i.

• **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z \times \overline{z} = z$ (2).**

$$(2) \Leftrightarrow \mathrm{i}z\overline{z} - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z(\mathrm{i}\overline{z} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \mathrm{i}\overline{z} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \overline{z} = -\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \mathrm{i}$$

Les solutions de l'équation (2) sont 0 et i.