TS spé — Exercices sur les nombres premiers

Le 2-2-2023

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 4$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 10u_n + 21$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.

1°) Les nombres u_1, u_2, u_3 sont-ils premiers ?

2°) La phrase « Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n est un nombre premier » est-elle vraie ou fausse ?

Solution :

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}$$

1°)

$u_1 = 31$ est premier

$u_2 = 331$ est premier

$u_3 = 3331$ est premier

2°) $u_8 = 3333333331 = 17 \times 19607843$ n'est pas un nombre premier donc la phrase est fausse.

$u_8 = 333333331 = 17 \times 19607843$ est premier

Python

On peut rentrer la suite dans la calculatrice.

Le 2-2-2023

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers dans l'ordre croissant : $p_1 = 2$, $p_2 = 3\ldots$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Ces nombres sont-ils premiers ?

2°) La phrase « Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n est un nombre premier » est-elle vraie ou fausse ?

Solution :

1°)

$u_1 = 3$ est premier

$u_2 = 7$ est premier

$u_3 = 31$ est premier

$u_4 = 211$ est premier

$u_5 = 2311$ est premier

2°) $u_6 = 30031 = 59 \times 509$ n'est pas premier.

1 Quelques curiosités

Pour cet exercice, on utilisera la liste suivante de nombres premiers jusqu'à 200 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 , 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

1°) Nombres premiers palindromes

Un nombre palindrome est un entier naturel dont l'écriture en base dix peut se lire dans les deux sens (comme 272, 10301, …).
On admet que les nombres premiers dont l'écriture en base dix ne comporte qu'un seul chiffre sont des nombres premiers palindromes.
Quels sont les nombres premiers palindromes inférieurs à 200 ?

Mot palindrome : mot qui peut se lire dans les deux sens
Exemples : kayak, ressasser, Anna (prénom), été

2°) Nombres premiers jumeaux

Deux nombres premiers jumeaux sont deux nombres premiers impairs consécutifs (comme 11 et 13 ou 17 et 19). Il s'agit de deux nombres premiers qui ont un écart de 2.
Quelles sont les paires de nombres premiers jumeaux inférieurs à 200 ?

Information :

• Les Français Lifchitz et Gallot ont démontré en 1998 que les nombres suivants forment des paires de nombres premiers jumeaux :

a) $40\,883\,037 \times 2^{3\,356} - 1$ et $40\,883\,037 \times 2^{3\,356} + 1$;

b) $361\,700\,055\ \times 2^{3\,356} - 1$ et $361\,700\,055\ \times 2^{3\,356} + 1$.

• Le 25 décembre 2011, on a trouvé deux nombres jumeaux qui constituent le record actuel :
$3\,756\,801\,695\,685 \times 2^{666\,669} - 1$ et $3\,756\,801\,695\,685 \times 2^{666\,669} + 1$.

Le 1-6-2023

Plus grands nombres premiers jumeaux aujourd'hui (2016)
$2996863034895 \times 2^{1290000} + 1$ et $2996863034895 \times 2^{1290000} - 1$
Découvert dans le cadre du projet de calcul distribué Prime Grid

3°) Nombres premiers circulaires

Un nombre premier circulaire est un nombre premier tel que, si l'on fait tourner ses chiffres, on obtient d'autres nombres premiers (exemple : 197, 719 et 971 sont premiers). Entre 2 et 200, il existe 12 nombres premiers circulaires.
Lesquels ?
On précise que, par convention, les nombres premiers qui s'écrivent avec un seul chiffre en base dix sont circulaires.

On exclut 11.

$\boxed{2}$ **Nombres de Mersenne**

On nomme ainsi les entiers naturels de la forme $2^n - 1$ avec n entier naturel en l'honneur du père Marin Mersenne, qui les étudia en 1644.
1°) Vérifier que ces nombres sont premiers pour $n \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$.
2°) Étudier le cas $n = 11$.

En janvier 2018, une équipe de chercheurs a prouvé que $2^{77232917} - 1$ est un nombre premier. Il s'écrit avec 23 249 425 chiffres.

$\boxed{3}$ Soit p un entier naturel strictement supérieur à 3.
1°) Démontrer que si p est premier, alors p est de la forme $3k+1$ ou $3k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
2°) La réciproque est-elle vraie ?

$\boxed{4}$ Démontrer que tout nombre premier p strictement supérieur à 3 est de la forme $6k-1$ ou $6k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{5}$ 1°) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous :

$p \equiv \ldots\ [3]$	0	1	2
$8p-1 \equiv \ldots\ [3]$			
$8p+1 \equiv \ldots\ [3]$			

2°) En déduire que si p est un entier naturel non nul qui n'est pas un multiple de 3, alors l'un au moins des deux nombres $8p-1$ ou $8p+1$ n'est pas premier.

$\boxed{6}$ On pose $a = n^2 - 2n - 3$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
1°) Factoriser a en produit de deux entiers. Justifier alors que a est un entier naturel.
2°) Déterminer pour quelles valeurs de n les deux facteurs du produit sont supérieurs ou égaux à 2.
3°) Existe-t-il des valeurs de n telles que a soit un nombre premier ?

$\boxed{7}$ On pose $a = n^2 + 3n + 2$ où n désigne un entier naturel.
Justifier que a est un entier naturel.
1°) Factoriser a en produit de deux entiers.
2°) Quelle est la parité de n ?
3°) Existe-t-il des valeurs de n telles que a soit un nombre premier ?

$\boxed{8}$ 1°) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3.
Déterminer le(s) couple(s) $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$.
On attend un raisonnement par équivalences.
2°) **Application :** Déterminer le(s) couple(s) $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 173$.

$\boxed{9}$ Décomposer en produit de facteurs premiers chacun des nombres suivants :
$\text{A} = 8820$; $\text{B} = 73205$; $\text{C} = 24 \times 14$; $\text{D} = 48 \times 17$.

$\boxed{10}$ En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, déterminer le PGCD et le PPCM de 1400 et 10780.

$\boxed{11}$ 1°) Démontrer que 324 est un carré parfait en utilisant la décomposition en facteurs premiers.
2°) Démontrer que 216 est un cube parfait en utilisant la décomposition en facteurs premiers.
3°) Quel est le plus petit entier naturel non nul :
a) qui, multiplié par 2000, donne un carré parfait ?
b) qui, multiplié par 2100, donne un cube parfait ?

$\boxed{12}$ **Nombres premiers d'Euler**

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien et physicien suisse qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n) = n^2 + n + 41$.
1°) Vérifier que pour tous les entiers naturels n de 0 à 39, $P(n)$ est un nombre premier.
On pourra utiliser une table de nombres premiers ou une fonction Python.
2°) Justifier que le nombre $P(40)$ n'est pas premier.

$\boxed{13}$ Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels, b le plus petit possible, en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers : $\text{A} = \sqrt{24200}$; $\text{B} = \sqrt{66150}$.

$\boxed{14}$ En utilisant la décomposition en facteurs premiers, déterminer l'écriture irréductible de chacune des fractions suivantes : $\text{A} = \dfrac{84}{150}$; $\text{B} = \dfrac{2214}{2829}$; $\text{C} = \dfrac{15 \times 25}{50 \times 22}$; $\text{D} = \dfrac{10^2}{25^4}$; $\text{E} = \dfrac{(-8)^2 \times (-15)^3}{12^2 \times 5}$.

$\boxed{15}$ En utilisant la décomposition en facteurs premiers et un arbre de possibilités, déterminer la liste des diviseurs positifs de 84.

$\boxed{16}$ 1°) Décomposer 60 en produit de facteurs premiers. En déduire le nombre de diviseurs positifs de 60.
2°) Même question avec 90.

$\boxed{17}$ **Conjecture de Goldbach**

« Tout entier naturel pair autre que 2 peut s'écrire comme la somme de deux entiers premiers. »

Cette conjecture, formulée au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, n'a pas encore été démontrée.

Christian Goldbach (18 mars 1690 à Königsberg en Prusse - 20 novembre 1764 à Moscou en Russie) est un mathématicien allemand surtout connu pour cette conjecture.

1°) Écrire chacun des nombres 8, 18, 24 comme somme de deux nombres premiers.
2°) Aller sur la page du site « dcode » à l'adresse suivante https://www.dcode.fr/conjecture-goldbach. Cette page n'a pas pour but d'apporter une aide à la démonstration de la conjecture de Goldbach.
Elle permet simplement d'obtenir toutes les décompositions en sommes de deux nombres premiers pour un entier naturel pair supérieur ou égal à 4 saisi en entrée par l'utilisateur.
Utiliser l'outil pour le nombre 2020 puis pour d'autres entiers pairs au choix.
Constater que les grands nombres pairs ont plutôt tendance à avoir de plus en plus de décompositions différentes.

Faire une recherche sur la « comète de Golbach ».
Question de Théo Reigner-Vigouroux le mardi 1$^{\text{er}}$ juin 2021 :
Est-ce qu'il y a une formule pour trouver le nombre de décompositions ?

18 Le but de cet exercice est de caractériser les entiers naturels qui admettent exactement 15 diviseurs positifs à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers puis de proposer une application.
Soit n un entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs.
De manière évidente, n est supérieur ou égal à 2.
1°) Dans cette question, on suppose que n admet un seul diviseur premier p. Ainsi $n = p^{\alpha}$ où α est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Déterminer la valeur de α.
2°) Dans cette question, on suppose que n admet deux diviseurs premiers distincts p et q.
Ainsi $n = p^{\alpha} \times q^{\beta}$ où α et β sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Déterminer les valeurs de α et β.
3°) Est-il possible que le nombre de diviseurs premiers de n soit supérieur ou égal à 3 ?
4°) Formuler une conclusion claire sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Les entiers naturels qui admettent exactement 15 diviseurs positifs sont les entiers de la forme…. ».
5°) À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer le plus petit entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs.

19 Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a = n^5 - n$.
Le but de l'exercice est de démontrer que a est divisible par 30.
On pourrait raisonner en effectuant un tableau de congruences modulo 30 mais ce serait fastidieux car il y aurait 30 cas à envisager pour n et beaucoup de calculs (n congru à 0 modulo 30, n congru à 1 modulo 30, … n congru à 29 modulo 30). La méthode proposée ici est beaucoup plus courte (surtout plus économe en calculs).
On utilisera le corollaire du petit théorème de Fermat.

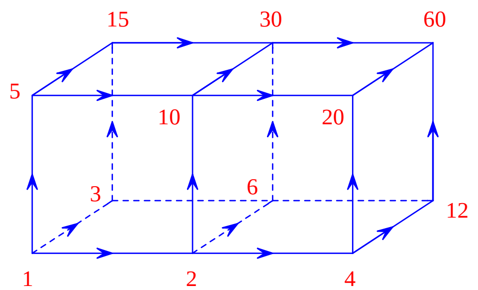
Soit p un nombre premier.
Pour tout entier relatif n, $n^p - n$ est divisible par p.

On pourra utiliser les factorisations suivantes à compléter : $a = \left(n^3 - n\right) \times \ldots = \left(n^2 - n\right) \times \ldots$.

1°) Démontrer que a est divisible par 5.
2°) Démontrer que a est divisible par 3.
3°) Démontrer que a est divisible par 2.
4°) Conclure à l'aide des questions précédentes.

20 Démontrer que pour tout entier relatif n, le nombre $n^7 - n$ est divisible par 42.
On s'inspirera de la démarche employée dans l'exercice précédent.

21 **Représentation des diviseurs positifs d'un entier naturel dans l'espace**
1°) Dans cette question, on s'intéresse au nombre 60. On a : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
Comprendre et reproduire la figure suivante où l'on a représenté les diviseurs positifs de 60 à l'aide de leur décomposition en facteurs premiers.



Indications :
On se réfèrera aux repères de l'espace.
Chaque flèche horizontale vers la droite représente une multiplication par 2.
Chaque flèche oblique vers le fond représente une multiplication par 3.
Chaque flèche verticale vers le haut représente une multiplication par 5.
2°) Représenter de la même façon l'ensemble des diviseurs positifs de 1800.

22 1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Le but de la question est de démontrer que l'ensemble $[\![n!+2\,;\,n!+n]\!]$ ne contient que des nombres non premiers.
Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $u_k = n! + k$.
Ainsi, $u_1 = n!+1$, $u_2 = n!+2$, $u_3 = n!+3$, … $u_n = n!+n$.
On note également c_k le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n (1 et n étant compris) sauf k.
On peut écrire $c_k = \prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} i$.

- Que vaut $c_k \times k$?
- En déduire une écriture factorisée de u_k.
- Les nombres u_2, u_3, …, u_n sont-ils premiers ?

2°) **Application concrète :**
En utilisant le résultat de la question 1°), donner un exemple de dix entiers naturels consécutifs non premiers.

23 **Les entiers naturels qui ne s'écrivent qu'avec des 1 en base dix peuvent-ils être premiers ?**

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on pose $\mathrm{N}_p = \overline{1...1}$ où le chiffre 1 apparaît p fois.
On rappelle que $\mathrm{N}_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$.
1°) Les nombres $\mathrm{N}_1 = 1$, $\mathrm{N}_2 = 11$, $\mathrm{N}_3 = 111$, $\mathrm{N}_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
2°) Démontrer que si p et q sont deux entiers naturels non nuls tels que q divise p, alors N_q divise N_p.
Indication : Utiliser après l'avoir justifiée l'égalité $9\mathrm{N}_p = 10^p - 1$.
3°) En déduire que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

- Les nombres N_p sont appelés « repunits ».
- Les cinq seuls repunits premiers connus, et cela pour N_p avec p jusqu'à au moins 30000.

N_2, N_{19}, N_{23}, N_{317}, N_{1031}

- Certains auteurs ne donnent le nom de repunit qu'à ces nombres premiers. Le dernier a été découvert en 1986 par Williams et Dubner. Un repunit ne peut être premier que si son nombre de chiffres est premier. On conjecture que les repunits (premiers) sont en nombre infini.

N_{49081} est pseudo premier ; il est probablement premier (Harvey Dubner – 1999)

- On pense que les trois suivants sont premiers :

N_{86453} (Baxter – 2000), N_{109297} (Dubner – 2007) et N_{270343} (Vozny et Budnyy – 2007).

- Pour être premier, un repunit doit nécessairement comporter un nombre premier de 1. Les nombres 2, 19, 23, 317 et 1031 sont effectivement premiers. La réciproque n'est pas vraie.

24 1°) **Les nombres premiers de Sophie Germain**

On donne la définition suivante :

Soit p un nombre premier.

On dit que p est un nombre premier de Sophie Germain lorsque $2p+1$ est aussi un nombre premier.

Par exemple, 5 est un nombre premier de Sophie Germain car 5 est premier et $2\times5+1=11$ est aussi premier.
En revanche, 7 n'est pas un nombre premier de Sophie Germain car $2\times7+1=15$ qui n'est pas un nombre premier.

Déterminer tous les nombres premiers de Sophie Germain inférieurs à 50.

Marie-Sophie Germain (1776-1831) fut une des premières femmes mathématiciennes françaises reconnues. Cette autodidacte fut reconnue pour ses travaux sur le dernier théorème de Fermat que vérifient les nombres qui portent désormais son nom. Il est conjecturé qu'il existe une infinité de nombres premiers de Sophie Germain, mais sans preuve pour le moment.
Les nombres premiers de Sophie Germain n'ont pas d'applications utiles en mathématiques.

Programme Python pour déterminer les nombres de Sophie Germain inférieurs ou égaux à …

Plus grand nombre de Sophie Germain connu à ce jour.

2°) On appelle **chaîne de Cunningham** de première espèce une suite finie $\left(p_1,\ p_2,...,\ p_r\right)$ de nombres premiers vérifiant la relation $p_{i+1}=2\times p_i+1$.

Les chaînes de Cunningham furent nommées en l'honneur du mathématicien britannique Allan Cunningham (1842-1928). Son œuvre est poursuivie dans le projet Cunningham (voir Wikipedia).

On notera que, par définition, une chaîne de Cunningham de première espèce est constituée uniquement de nombres premiers.
Par exemple, $\left(2,5,11,\ 23,47\right)$ est une chaîne de Cunningham de première espèce.
À l'aide de la question 1°), déterminer une autre chaîne de Cunningham de première espèce.

25 **Crible de Matiyasevich**

Yuri Matiyasevich est un mathématicien russe né le 2 mars 1947 qui a résolu le dixième problème de Hilbert. Il est aujourd'hui directeur du laboratoire de logique mathématique de l'Institut mathématique de Saint-Pétersbourg.

On se propose de découvrir dans cet exercice la multiplication de Yuri Matiyasevich et d'observer la nature des nombres qu'il met en évidence dans son crible géométrique.

1°) **Réalisation de la figure**
La figure serait très fastidieuse à faire à la main. C'est la raison pour laquelle il est commode de la réaliser sur ordinateur.
a) À l'aide du logiciel *Geogebra*, tracer la représentation graphique de la fonction « carré ».
Créer un curseur m de 2 à 20 avec pour incrément 1.
Dans la zone de saisie, taper Séquence[(i,i²),i,2,m] et Séquence[(–i, i²),i,2,m] pour obtenir les points à coordonnées entières de la parabole.
b) Pour relier deux à deux les points des Liste 1 et Liste 2, taper :
Séquence[Séquence[Segment[(i,i²),(-j,j²)],i,2,m],j,2,m]. Déplacer le curseur m.
c) Conjecturer l'ordonnée du point d'intersection du segment reliant les points de coordonnées (i,i²) et (-j,j²) avec l'axe des ordonnées.
d) Par certains points de coordonnées $\left(0\,;k\right)$, avec $k\in\mathbb{N}$, ne passe aucun de ces segments. Conjecturer une propriété de ces nombres *k*.

2°) **Quelques justifications**
On se place dans un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. Sur la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $y=x^2$, on considère les points M et N d'abscisses respectives m et $-n$ où m et n sont deux entiers naturels tels que $m\geqslant2$ et $n\geqslant2$.
a) Déterminer une équation de la droite (MN).
b) En déduire les coordonnées du point d'intersection K de la droite (MN) et de l'axe des ordonnées.

Le crible de Matiyasevich orthographe permet de multiplier des nombres de manière géométrique (sans faire de calcul).

26 **Postulat de Bertrand**
Répartition des nombres premiers : de moins en moins nombreux ? (Recherche)
Pour n ∈ N ∗, on note n! et on appelle "factorielle n" le produit des entiers de 1 a` n : n! = 1 × 2 × 3 × ... × n
1°) Pour tout entier k ∈ J2; nK, donner un diviseur de (n! + k) autre que 1 et (n! + k) (on appelle cela un diviseur propre ou diviseur non trivial).
2°) Utiliser ce résultat pour donner 5 entiers consécutifs non premiers.
3°) Existe-t-il une liste de cent milliards d'entiers consécutifs ne comportant aucun nombre premier ?

Le résultat précédent donne l'impression qu'à mesure que l'on s'éloigne de 0, les nombres premiers sont de plus en plus rares. Cependant, une conjecture du mathématicien français Joseph Bertrand (1822-1900) démontrée par son confrère Russe Pafnouti Tchebychev (1821-1894) tempère cette impression :
Si $n>3$, il y a toujours un nombre premier compris entre n et $2n$ ($n<p<2n$).

Vérifier cette conjecture pour n de 4 à 8.

Le terme de postulat est inapproprié (cf. article Wikipedia). Il faudrait mieux parler conjecture.
Cette conjecture a été démontrée. L'une des plus belles démonstrations est due à Paul Erdös, mathématicien du XX^{e} siècle, en utilisant les coefficients binomiaux. Il la publia à 19 ans.

27 **Conjecture de Legendre**
Dans cet exercice, on s'intéresse à un problème apparenté à celui de l'exercice précédent : il s'agit de la conjecture de Legendre, affirme l'existence, pour tout entier naturel $n\geqslant1$, d'un nombre premier p tel que $n^2<p<\left(n+1\right)^2$, autrement dit l'ensemble $\left[\!\left[n^2\,;\left(n+1\right)^2\right]\!\right]$ contient toujours au moins un nombre premier.
Vérifier cette conjecture pour n de 1 à 5.

Adrien-Marie Legendre est un mathématicien français (1752 à Paris - 1833 à Paris).
Cette conjecture n'a pas encore été confirmée ou infirmée. Elle touche à l'hypothèse de Riemann.

28 Quels sont les nombres premiers dont l'inverse est un nombre décimal ?

Corrigé

$\boxed{1}$ Quelques curiosités autour des nombres premiers

1°) **Nombres premiers palindromes inférieurs à 200**

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 101 ; 131 ; 151 ; 181 ; 191

2°) **Nombres premiers jumeaux inférieurs à 200**

Les paires de nombres premiers jumeaux inférieurs à 200 sont :
{3 ; 5}, {5 ; 7}, {11 ; 13}, {17 ; 19}, {29 ; 31}, {41 ; 43}, {59 ; 61}, {71 ; 73}, {101 ; 103}, {107 ; 109}, {137 ; 139}, {149 ; 151} ; {179 ; 181}, {191 ; 193}, {197 ; 199}.

3°) **Nombres premiers circulaires inférieurs à 200**

On enlève déjà dans la recherche tous les nombres (à part 2) qui contiennent au moins un chiffre pair dans leur écriture en base dix.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 31 ; 37 ; 71 ; 73 ; 79 ; 97 ; 113 ; 131 ; 197 ; 199

Tiré de l'article de Jean-Paul Delahaye « Les chasseurs de nombres premiers » :

Les seuls nombres premiers circulaires connus sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, 79, 113, 197, 199, 337, 1193, 3779, 11939, 19937, 193939, 199933, 11...1 (19 fois le "1"), 11...1 (23 fois le "1") 11...1 (317 fois le "1") 11...1 (1031 fois le "1").

On pourrait faire un programme permettant de déterminer les nombres premiers circulaires inférieurs ou égaux à 1000 (cf. document d'Anthony Mansuy intitulé « Marche aléatoire, tri par insertion et nombres premiers circulaires »).

$\boxed{2}$ Nombres de Mersenne (entiers naturels de la forme $2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$)

1°) **Vérifions que les entiers naturels de la forme $2^n - 1$ sont premiers pour $n \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$.**

$2^2 - 1 = 3$

$2^3 - 1 = 7$

$2^5 - 1 = 31$

$2^7 - 1 = 127$

$2^{13} - 1 = 8191$

Tous ces nombres sont premiers.

2°) **Étudions le cas $n = 11$.**

$2^{11} - 1 = 2047$
D'après la calculatrice, $\sqrt{2047} = 45,243784103...$.

On teste la divisibilité de 2047 par les nombres premiers inférieurs à 45.
2047 est divisible par 23 ($2047 = 23 \times 89$) donc ce nombre n'est pas premier.
11 est la plus petite valeur de n telle que n soit premier et $2^n - 1$ ne soit pas premier.

Direct Matin du mardi 26-1-2016 :

Le nouveau plus grand nombre premier est long de 22 338 618 chiffres. Il bat le précédent de 5 millions de chiffres. Les nombres premiers sont divisibles seulement par 1 et eux-mêmes, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13... Selon *The New Scientist*, le petit nouveau ($2^{74\,207\,281} - 1$) a été découvert par Curtis Cooper de l'université Central Missouri à Warrensburg, membre du *Great Internet Mersenne Prime Search*, un projet de calcul partagé. Cette quête incessante des mathématiciens pour les plus grands nombres premiers possible permet de tester le matériel informatique, comme des microprocesseurs, et d'apprendre beaucoup de choses sur la distribution des nombres premiers.

$\boxed{3}$

1°) p : nombre premier tel que $p > 3$

Démontrons que p est de la forme $3k+1$ ou $3k-1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

1ère méthode :

Tout entier naturel est de la forme $3k - 1$, $3k$, $3k + 1$ avec k entier naturel.

Comme p est premier strictement supérieur à 3, il ne peut être de la forme $3k$.
Il est donc de la forme $3k - 1$ ou $3k + 1$ avec k entier naturel.

En présentation rapide de recherche d'exercice, on peut présenter ainsi : $3k - 1$, $\cancel{3k}$, $3k + 1$.

2e méthode :

Tout nombre entier est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.

• 1er cas : $p \equiv 0\ [3]$ impossible (sinon 3 diviserait p et p est premier)

• 2e cas : $p \equiv 1\ [3]$

Dans ce cas, p peut s'écrire sous la forme $3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

• 3e cas : $p \equiv 2\ [3]$

Or 2 est congru à – 1 modulo 3 donc $p \equiv -1\ [3]$.
Dans ce cas, p peut s'écrire sous la forme $3k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

2°) **La réciproque est-elle vraie ?**

La réciproque est fausse. On raisonne par contre-exemples.

• 4 est de la forme $3k+1$ mais n'est pas premier.

On peut aussi prendre 10, 16, 22 etc…

• 8 est de la forme $3k-1$ mais n'est pas premier.

$\boxed{4}$

Démontrons que tout nombre premier $p>3$ est de la forme 6*k* – 1 ou 6*k* + 1 ($k \in \mathbb{N}^*$).

• On raisonne modulo 6.

• On raisonne en division euclidienne par 6.

Soit *p* un nombre premier strictement supérieur à 3.

p est donc impair (tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est impair ; la démonstration est quasiment évidente).

Tout entier naturel est congru modulo 6 à l'un des 6 restes modulo 6 : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Si $p \equiv 0$ (6), alors $p=6k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc *p* est pair, ce qui est exclu.

Si $p \equiv 2$ (6), alors $p=2+6k=2(1+3k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc *p* est pair, ce qui est exclu.

Si $p \equiv 4$ (6), alors $p=4+6k=2(2+3k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc *p* est pair, ce qui est exclu.

Si $p \equiv 3$ (6), alors $p=3+6k=3(1+2k)$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $3 \mid p$ et comme $p>3$, 3 est un diviseur strict* de *p*, qui n'est donc pas un nombre premier.

Il reste deux possibilités :

$p \equiv 1$ (6) et $p \equiv 5$ (6) soit $p \equiv -1$ (6)

Ainsi, tout nombre premier *p* strictement supérieur à 3 est de la forme $6k-1$ ou $6k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Cette propriété ne reste pas vraie pour les nombres premiers 2 et 3 : 2 est de la forme $6k+2$ et 3 est de la forme $6k+1$.

* C'est-à-dire strictement inférieur au nombre (ce qui est bien le cas ici, puisque l'on a supposé $p>3$).

Le dimanche 19 février 2017

$\cancel{6k}$, $6k+1$, $\cancel{6k+2}$, $\cancel{6k+3}$, $\cancel{6k+4}$, $6k+5$, $\cancel{6k+6}$

$\boxed{5}$

1°) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous :

$p \equiv ...\ [3]$	0	1	2
$8p-1 \equiv ...\ [3]$	2	1	0
$8p+1 \equiv ...\ [3]$	1	0	2

2°) En déduire que si *p* est un entier naturel non nul qui n'est pas un multiple de 3, alors l'un au moins des deux nombres $8p-1$ ou $8p+1$ n'est pas premier.

Soit *p* est un entier naturel non nul.
On suppose que *p* n'est pas un multiple de 3.
On peut donc dire que *p* est congru soit à 1 soit à 2 modulo 3.

1er cas : $p \equiv 1\ [3]$

Alors $8p+1 \equiv 0$ [3] donc $8p+1$ est un multiple de 3.
Or $p \geqslant 1$ donc $8p+1 \geqslant 9$.
Donc on en déduit que $8p+1$ n'est pas premier.

2e cas : $p \equiv 2\ [3]$

Dans ce cas, on a alors $8p-1 \equiv 0$ [3] donc $8p-1$ est un multiple de 3.
Or $p \geqslant 1$ donc $8p-1 \geqslant 7$.
Donc on en déduit que $8p-1$ n'est pas premier.

Dans les deux cas, l'un au moins des deux nombres $8p-1$ ou $8p+1$ n'est pas premier.

N. B. : Le seul multiple de 3 qui est un nombre premier est 3.

$\boxed{6}$

$n \geqslant 3$
$a=n^2-2n-3$

1°) Factoriser *a* en produit de deux entiers.

Le polynôme $P(x)=x^2-2x-3$ (trinôme du second degré en *x*) s'annule en – 1 et en 3.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)=(x+1)(x-3)$.

On en déduit que $a=(n+1)(n-3)$.

Cette écriture fait apparaître *a* comme produit des deux diviseurs associés $n+1$ et $n-3$.
De plus, comme $n \geqslant 3$, ils sont tous deux positifs ou nuls. Par suite (signe d'un produit), *a* est positif ou nul.

2°) Déterminer pour quelles valeurs de *n* les deux facteurs du produit sont supérieurs ou égaux à 2.

Les deux entiers sont supérieurs ou égaux à 2 pour $n \geqslant 5$.

3°) Existe-t-il des valeurs de *n* telles que *a* soit un nombre premier ?

Si $n \geqslant 5$, *a* est le produit de deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 ($n+1$ et $n-3$ sont deux diviseurs associés de *a* supérieurs ou égaux à 2) donc *a* n'est pas premier.

Il reste deux cas à examiner :

Si $n=3$, alors $a=0$ et *a* est n'est pas premier.

Si $n=4$, alors $a=5$ et *a* est premier.

Conclusion : *a* est premier si et seulement si $n=4$.

$\boxed{7}$

$a=n^2+3n+2 \quad (n \in \mathbb{N})$

De manière quasiment évidente, on peut dire que *a* est positif ou nul.
On peut même préciser que *a* est supérieur ou égal à 2.
a est donc un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le but de l'exercice est de déterminer s'il existe des valeurs de *n* elles que *a* soit premier.
On peut commencer par tester des valeurs de *n* (notamment avec la calculatrice).

1°) Factoriser *a* en produit de deux entiers.

On peut écrire directement $a=(n+1)(n+2)$.

Si, on ne trouve pas directement, on peut dire que le polynôme $P(x)=x^2+3x+2$ (trinôme du second degré en *x*) s'annule en – 1 et en – 2. Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)=(x+1)(x+2)$.

2°) Quelle est la parité de *n* ?

a est le produit de deux entiers naturels consécutifs donc *a* est un nombre pair.

3°) Existe-t-il des valeurs de *n* telles que *a* soit un nombre premier ?

D'après le résultat de la question précédente, *a* est pair.
Or le seul nombre premier pair est 2.
On cherche s'il existe des valeurs de *n* telles que $a=2$.
On trouve immédiatement $n=0$.
Le seul entier naturel *n* tel que *a* soit premier est 0.

$\boxed{8}$

1°) p : nombre premier supérieur ou égal à 3

Déterminons le(s) couple(s) $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2-y^2=p$ (E).

(E) est une équation diophantienne du second degré que l'on résout dans $\mathbb{N}^2$.

On raisonne par équivalences dans $\mathbb{N}^2$.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)=p$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs associés positifs de *p*
Cette ligne est facultative. On peut tout simplement dire que, comme *p* est premier, la seule manière d'écrire *p* comme produit de deux entiers naturels, est $1\times p$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=p \end{cases}$ (puisque $x-y \leqslant x+y$ et *p* a deux diviseurs positifs associés : 1 et *p*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=p+1 \\ 2y=p-1 \end{cases}$ (résolution du système linéaire par addition et soustraction membre à membre)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{p+1}{2} \\ y=\dfrac{p-1}{2} \end{cases}$$

On peut noter que comme *p* est un nombre premier supérieur ou égal à 3, *p* est impair et donc $p+1$ et $p-1$ sont des entiers pairs, ce qui est entraîne à son tour que $\dfrac{p+1}{2} \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$.

Conclusion : La solution de (E) est le couple $\left(\dfrac{p+1}{2}\,;\dfrac{p-1}{2}\right)$.

2°) **Déterminons le(s) couple(s) $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $x^2-y^2=173$.**

• On vérifie tout d'abord que 173 est un nombre premier.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On utilise une table de nombres premiers.

2$^{\text{e}}$ méthode :

Avec la calculatrice, on trouve : $\sqrt{173}=13,15\ldots$.

On teste la divisibilité de 173 par les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13.

On vérifie aisément que 173 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

173 est donc un nombre premier.

3^e^ méthode :

On utilise un programme sur calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

• On applique le résultat du 1°) avec $p=173$ (équation (E)).

Le couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tel que $x^2-y^2=173$ est (87 ; 86).

9 Décomposition en produit de facteurs premiers

Décomposition de grands nombres (A et B) : présentation en colonnes, utilisation de la liste des nombres premiers (qui doit être connue) et des critères de divisibilité. On teste tous les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

Vérification sur ordinateur possible (on rentre le nombre et l'on obtient immédiatement la décomposition en facteurs premiers).

8820	2
4410	2
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

73205	5
14641	11
1331	11
121	11
11	11
1	

Il faut prendre les nombres premiers dans l'ordre croissant. Il faut d'abord épuiser le 2.

$\mathrm{A}=2^2\times3^2\times5\times7^2$

$\mathrm{B}=5\times11^4$

Décomposition de petits nombres (C et D) : présentation en lignes

$\mathrm{C}=24\times14=2\times12\times2\times7=2^4\times3\times7$

$\mathrm{D}=48\times17=2^4\times3\times17$

La méthode pour C est de décomposer 24 et 14 en produit de facteurs premiers.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

14	2
7	7
1	

La méthode pour D est de décomposer 48 et 17 en produit de facteurs premiers.

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

17	17
1	

Autre façon pour A et B :

$\mathrm{A}=8820$ $=2205\times2^2$ $=441\times5\times2^2$ $=49\times3^2\times5\times2^2$ $=2^2\times3^2\times5\times7^2$	$\mathrm{B}=73205$ $=5\times14641$ $=5\times11^4$
$\mathrm{C}=24\times14$ $=2^3\times3\times7\times2$ $=2^4\times3\times7$	$\mathrm{D}=48\times17$ $=2^4\times3\times17$

On peut aussi vérifier ces décompositions en facteurs premiers à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
Avec XCas, la commande est ifactor(…) (on tape le nombre à l'intérieur des parenthèses).

10 Détermination du PGCD et de PPCM à l'aide des décompositions en facteurs premiers

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

10780	2
5390	2
2695	5
539	7
77	7
11	11
1	

$1400=2^3\times5^2\times7$

$10780=2^2\times5\times7^2\times11$

On peut aussi vérifier ces décompositions en facteurs premiers à l'aide d'un programme sur calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

On utilise la propriété donnant l'expression du PGCD et du PPCM de deux entiers naturels à partir de leur décomposition en facteurs premiers (propriété très importante).

$\mathrm{PGCD}(1400\,;10780)=2^2\times5\times7=140$

En effet, les diviseurs premiers communs à 1400 et 10780 sont 2, 5, 7.
On prend à chaque fois le plus petit exposant dans les deux décompositions.

$\text{PPCM}(1400\,;10780) = 2^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 = 107\,800$

C'est le « contraire » (si l'on peut dire, car le terme contraire n'est ici pas bien adapté) pour le PPCM.
On prend tous les facteurs premiers dans les deux décompositions et on met à chaque le plus grand exposant.
Les nombres premiers qui apparaissent dans les deux décompositions sont 2, 5, 7, 11.

On vérifie ces résultats à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.

11

Cet exercice porte sur la reconnaissance de carrés et de cubes parfaits à partir de la décomposition en facteurs premiers.

1°) **Démontrons que 324 est un carré parfait à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.**

Pour cela, on adopte la présentation en colonnes.

$324 = 2^2 \times 3^4 = 2^2 \times 9^2 = 18^2$

324 peut s'écrire comme produit de puissances d'entiers dont tous les exposants sont des entiers naturels pairs donc c'est un carré parfait.

On utilise le lemme suivant : si un entier naturel est le produit de puissances d'entiers avec des exposants entiers naturels pairs, alors c'est un carré parfait.

Pour aller plus loin, on peut écrire : $324 = 2^2 \times 9^2 = 18^2$; 324 est donc le carré de 18.

2°) **Démontrons que 216 est un cube parfait à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.**

$216 = 2^3 \times 3^3$

216 peut s'écrire comme produit de puissances d'entiers dont tous les exposants sont des entiers naturels multiples de 3.

Pour aller plus loin, on peut écrire : $216 = (2 \times 3)^3 = 6^3$; 216 est donc le cube de 6.

3°)

a) **Déterminons le plus petit entier naturel non nul qui, multiplié par 2000, donne un carré parfait.**

Pour répondre à la question, on commence par déterminer la décomposition en facteurs premiers de 2000.

$2000 = 2 \times 1000 = 2 \times 10^3 = 2 \times (2 \times 5)^3 = 2 \times 2^3 \times 5^3 = 2^4 \times 5^3$

Remarque : On peut adopter aussi la présentation en colonne classique.

On regarde les exposants des facteurs premiers dans la décomposition de 2000 : l'exposant de 2 est 4, c'est un nombre pair ; l'exposant de 5 est 3, c'est un nombre impair (propriété du cours).

Pour obtenir un carré parfait, $\boxed{\text{il faut et il suffit}}$ que les exposants qui interviennent dans la décomposition en facteurs premiers soient tous des entiers pairs.

Le plus petit entier naturel non nul qui multiplié par 2000 donne un carré parfait est 5 :
$5 \times 2000 = 5 \times 2^4 \times 5^3 = 2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4 = (10^2)^2 = 100^2$
(on peut aussi écrire : $5 \times 2000 = 10000 = 100^2$)

b) **Déterminons le plus petit entier naturel non nul qui, multiplié par 2100, donne un cube parfait.**

Pour répondre à la question, on commence par déterminer la décomposition en facteurs premiers de 2100.
$2100 = 21 \times 100 = 3 \times 7 \times 4 \times 25 = 3 \times 7 \times 2^2 \times 5^2 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Pour obtenir un cube parfait, $\boxed{\text{il faut et il suffit}}$ que les exposants qui interviennent dans la décomposition en facteurs premiers soient tous des multiples de 3 (propriété du cours).

Le plus petit entier naturel non nul qui, multiplié par 2100, donne un cube parfait est : $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 4410$.

12 **Nombres premiers d'Euler**

1°) **Vérifions que $n^2 + n + 41$ est premier pour $n \in \{0\,;1\,;\ldots\,;39\}$.**

On peut rentrer la fonction $f : x \mapsto x^2 + x + 41$ afin d'obtenir rapidement un tableau de valeurs.
Éventuellement, on peut se placer en mode suite.

$0^2 + 0 + 41 = 41$ nombre premier
$1^2 + 1 + 41 = 43$ nombre premier
$2^2 + 2 + 41 = 47$ nombre premier
$3^2 + 3 + 41 = 53$ nombre premier
$4^2 + 4 + 41 = 61$ nombre premier
$5^2 + 5 + 41 = 71$ nombre premier
$6^2 + 6 + 41 = 83$ nombre premier
etc.

On peut utiliser une table de nombres premiers.
On peut aussi vérifier ces résultats à l'aide de la calculatrice (programme ou fonction permettant de déterminer si un entier naturel est premier) ou d'un logiciel de calcul formel.

Utilisation de logiciels :
Tableur : Excel
Logiciel de calcul formel : test de primalité (sur XCas : isprime(…))

2°) **Vérifions que $n^2 + n + 41$ n'est pas premier pour $n = 40$.**

On va démontrer ce résultat à la main, sans effectuer de calculs.

$40^2+40+41=40\times(40+1)+41$

$=40\times41+41$

$=41^2$

Donc pour $n=40$, n^2+n+41 n'est pas premier.

Remarque : pour $n=41$

$41^2+41+41=41\times(41+2)=41\times43$ n'est pas un nombre premier (car il est divisible par 41).
[On peut observer que 43 est un nombre premier].

Pour aller plus loin :

$f_p(n)=n^2+n+p$ (si $p\in\{2,3,5,11,17,41\}$)

$f_p(n)$ donne des nombres premiers pour $n\in[0\,;\,p-2]$.

$$\begin{aligned}f_p(p-1)&=(p-1)^2+(p-1)+p\\&=(p-1)\times[(p-1)+1]+p\\&=(p-1)\times p+p\\&=p^2\end{aligned}$$

$f_p(p)=p(p+1+1)$

• En 1772, Leonhard Euler proposa le polynôme $E(n)=n^2+n+41$ qui donne des nombres premiers pour n entier allant de 0 à 39.

• En 1798, le mathématicien français Adrien-Marie Legendre proposa le polynôme $L(n)=2n^2+29$, qui produit des nombres premiers pour n entier allant de 10 à 28.

• Aujourd'hui, le record est détenu par Russel Ruby qui proposa le polynôme $R(n)=36n^2-810n+2753$.
L'expression $|R(n)|$ fournit le plus grand nombre de nombres premiers consécutifs.

Source : livre Mathématiques Repère Terminale S spécialité mathématiques édition 2012 page 43.

Point info : polynômes générateurs de nombres premiers

Le polynôme $P(n)=n^2+n+B$ est dû au mathématicien Euler. Une conjecture très vraisemblable (car liée à une autre bien testée) est qu'aussi grand que soit A, on peut trouver un polynôme de la forme n^2+n+B qui donne des nombres premier pour $n\in\{0\,;\,...\,;\,A\}$. On sait cependant que B sera nécessairement très grand : le B correspondant à $A=41$ a été montré plus grand que 10^{18} mais pour l'instant reste inconnu.

Source : livre Mathématiques Hyperbole Terminale S spécialité mathématiques édition 2012 page 92 N°41.
Livre Math'x TS spé Programme 2012 page 65

Point info :

Il n'existe pas de polynôme $P(x)$, non constant, tel que tous les entiers $P(n)$ soient premiers ($n\in\mathbb{Z}$).
Les mathématiciens Minac et Willans ont imaginé une formule ne comportant que 52 symboles qui donne tous les nombres premiers dans l'ordre et sans répétition ! On ignorait qu'une telle formule pouvait exister avant sa publication en 1995. Mais la mise en œuvre de telles formules se révèle très coûteuse en temps de calcul et aucun programme d'ordinateur aujourd'hui n'utilise une telle formule. Le véritable problème est de définir des algorithmes de calculs qui donneront rapidement des nombres premiers.

$\boxed{13}$ Simplification d'expressions avec des racines carrées

On commence par écrire les décompositions en facteurs premiers des nombres qui figurent sous le radical.

24200	2
12100	2
6050	2
3025	5
605	5
121	11
11	11
1	

66150	2
33075	3
11025	3
3675	3
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$24200=2^3\times5^2\times11^2$

$66150=2\times3^3\times5^2\times7^2$

$\mathrm{A}=\sqrt{2^2\times2\times5^2\times11^2}$
$\mathrm{A}=2\times5\times11\times\sqrt{2}$
$\mathrm{A}=110\sqrt{2}$

$\mathrm{B}=\sqrt{2\times3^3\times5^2\times7^2}$
$\mathrm{B}=3\times5\times7\times\sqrt{2\times3}$
$\mathrm{B}=105\sqrt{6}$

14 **Simplifications de fractions**

$$A=\frac{84}{150}=\frac{2^2\times3\times7}{2\times3\times5^2}=\frac{2\times7}{5^2}=\frac{14}{25}$$

$$B=\frac{2214}{2829}=\frac{2\times3\times3\times3\times41}{3\times943}=\frac{2\times\cancel{3}\times3\times3\times\cancel{41}}{\cancel{3}\times\cancel{41}\times23}=\frac{18}{23}$$

$$C=\frac{15\times25}{50\times22}=\frac{\cancel{5}\times3\times\cancel{5}\times5}{\cancel{5}\times\cancel{5}\times2\times2\times11}=\frac{15}{44}$$

$$D=\frac{10^2}{25^4}=\frac{2\times5\times2\times5}{5^8}=\frac{4}{5^6}=\frac{4}{15625}$$

$E=\dfrac{(-8)^2\times(-15)^3}{12^2\times5}=-\dfrac{2^6\times5^3\times3^3}{2^4\times3^2\times5}=-2^2\times5^2\times3=-300$ (il ne s'agit pas vraiment d'une fraction irréductible !)

Pour le calcul de E, on commence par déterminer son signe (ici négatif). On le place donc dès la première étape devant la barre de fraction de manière à ne plus avoir que des puissances d'entiers naturels.

15

Déterminons les diviseurs positifs de 84 à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

On a : $84=2^2\times3\times7$.

Les diviseurs positifs de 84 sont les entiers de la forme $2^\alpha\times3^\beta\times7^\gamma$ où α, β, γ sont des entiers naturels tels que $0\leqslant\alpha\leqslant2$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $0\leqslant\gamma\leqslant1$.

Les diviseurs positifs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 (voir cours pour une méthode de présentation rapide sans passer par une représentation en arbre).

On a : $84=2^2\times3\times7$.

Faire un arbre de possibilités à 3 niveaux (car il y a 3 facteurs).

Il n'est pas forcément utile de faire un arbre. On peut aussi utiliser le résultat du cours : les diviseurs positifs de 84 sont les entiers de la forme $2^\alpha\times3^\beta\times7^\gamma$ où α, β, γ sont des entiers naturels tels que $0\leqslant\alpha\leqslant2$, $0\leqslant\beta\leqslant1$, $0\leqslant\gamma\leqslant1$.

Les diviseurs positifs de 84 sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

16

Propriété [nombre de diviseurs positifs d'un entier naturel à partir de sa décomposition en produit de facteurs premiers]

Si $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_r^{\alpha_r}$, les p_i étant des nombres premiers deux à deux distincts et les α_i étant des entiers naturels, le nombre de diviseurs positifs de n est égal à $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\ldots\times(\alpha_r+1)$.

1°) Décomposer 60 en produit de facteurs premiers.
En déduire le nombre de diviseurs positifs de 60.

$60=4\times15$
$60=2^2\times3\times5$

On peut écrire $60=2^2\times3^1\times5^1$.

Donc, d'après la formule du cours, le nombre de diviseurs positifs de 60 est égal à $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=3\times2\times2=12$.

2°) Même question avec 90.

$90=9\times10$
$=3^2\times2\times5$

On peut écrire $90=3^2\times2^1\times5^1$.

Donc le nombre de diviseurs de 90 est égal à $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=3\times2\times2=12$.

On obtient le même nombre de diviseurs positifs que pour 60.

17 **Conjecture de Goldbach**

1°)

$8=5+3$

$18=13+5=11+7$ (il y a deux décompositions)

$24=17+7=11+13=5+19$ (il y a trois décompositions)

La conjecture que nous étudions dans cet exercice est due au mathématicien Christian Goldbach (1690-1764) qui la formule dans une lettre à Euler de 1742.
L'une des grandes difficultés de la démonstration, selon Benoît Rittaud, tient au fait que l'énoncé de la conjecture fait intervenir les nombres premiers dans un registre additif et non dans leur registre naturel multiplicatif.

Voir article Wikipedia sur la conjecture de Goldbach.

2°)

$\boxed{\mathbf{18}}$

1°) On sait que $n = p^{\alpha}$ où α est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Le nombre de diviseurs positifs de n est égal à $\alpha+1$ (résultats du cours qui provient du fait que les diviseurs positifs de p^{α} sont 1, p, p^2, …, $p^{\alpha-1}$, p^{α}).
On a donc $\alpha+1=15$ ce qui donne immédiatement $\alpha=14$.

2°) On sait que $n = p^{\alpha}\times q^{\beta}$ où α et β sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Déterminer les valeurs de α et β.

On va s'intéresser aux exposants.

D'après le cours, le nombre de diviseurs positifs de n est égal à $(\alpha+1)(\beta+1)$.

On a $(\alpha+1)(\beta+1)=15$ donc $\begin{cases}\alpha+1=3\\ \beta+1=5\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha+1=5\\ \beta+1=3\end{cases}$.

Donc $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ ou $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$.
Donc n s'écrit $p^2\times q^4$ ou $p^4\times q^2$.

3°) Est-il possible que le nombre de diviseurs premiers de n soit supérieur ou égal à 3 ?

Supposons que le nombre de diviseurs premiers de n soit supérieur ou égal à 3.
Notons p_1, p_2,… p_r ($r \geqslant 3$) les diviseurs premiers de n (il s'agit donc de nombres premiers deux à deux distincts).

La décomposition en facteurs premiers de n s'écrit donc $n = p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_r^{\alpha_r}$ où α_1, α_2,… α_r sont des entiers naturels non nuls.

Le nombre de diviseurs positifs de n est alors égal à : $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)$ (formule donnée dans le cours).

On sait que n admet exactement 15 diviseurs positifs donc on a $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)=15$.

Comme on a dit que α_1, α_2,… α_r sont des entiers naturels non nuls c'est-à-dire supérieurs ou égaux à 1, on a :
$\alpha_1+1\geqslant 2$, $\alpha_2+1\geqslant 2$ … $\alpha_r+1\geqslant 2$.

Or le nombre 15 s'écrit d'une seule façon comme produit d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 :
$15=3\times 5$.

15 ne peut donc s'écrire comme produit de plus de deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

Il est donc impossible que le nombre de diviseurs premiers de n soit supérieur ou égal à 3.

4°) Formuler une conclusion claire sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Les entiers naturels qui admettent exactement 15 diviseurs positifs sont les entiers de la forme.… ».

On peut formuler la conclusion de la manière suivante qui est la plus simple possible.

Les entiers naturels qui admettent exactement 15 diviseurs positifs sont les entiers de la forme p^{14} où p est un nombre premier et les entiers de la forme $p^2\times q^4$ où p et q sont deux nombres premiers distincts.

15 est impair et une propriété dit qu'un entier naturel qui admet un nombre impair de diviseurs positifs est un carré parfait (propriété donnée dans le cours sur les algorithmiques liés à la divisibilité et à la division euclidienne). On vérifie bien ici que les entiers de la forme p^{14} avec p nombre premier ou de la forme $p^2\times q^4$ avec p et q deux nombres premiers distincts sont des carrés parfaits.

5°) À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer le plus petit entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs.

1ère catégorie :
On choisit p le plus petit possible donc $p=2$.
On obtient $2^{14}=16384$.

2e catégorie :

Pour que n soit le plus petit possible, on choisit p et q les plus petits possible.
On les prend donc dans l'ensemble $\{2\,;3\}$.

Pour $p=2$ et $q=3$, on obtient $2^4\times 3^2=144$.
Pour $p=3$ et $q=2$, on obtient $3^4\times 2^2=81\times 4=324$.

On en déduit que le plus petit entier naturel qui admet exactement 15 diviseurs positifs est 144.

Autres méthodes :

① L'entier naturel cherché admet un nombre impair de diviseurs positifs donc c'est un carré parfait (propriété donnée dans le cours sur les algorithmiques liés à la divisibilité et à la division euclidienne).
On examine les carrés parfaits en partant de 1 : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 etc.
On trouve assez vite que l'entier cherché est 144.

② On peut utiliser un algorithme (avec boucle « Tantque »).

19

$n \in \mathbb{N}$

$\boldsymbol{a = n^5 - n}$

Rappel de l'énoncé du corollaire du petit théorème de Fermat :

> p est un nombre premier.
> Pour tout entier relatif n, $n^p - n$ est divisible par p.

1°) Démontrons que a est divisible par 5.

5 étant un nombre premier donc d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, $n^5 - n$ est divisible par 5.

2°) Démontrons que a est divisible par 3 après avoir démontré que a est divisible par $n^3 - n$.

On commence par démontrer que a est divisible par $n^3 - n$.

$$\begin{aligned} a &= n^5 - n \\ &= n\left(n^4 - 1\right) \\ &= n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right) \\ &= \left(n^3 - n\right)\left(n^2 + 1\right) \end{aligned}$$

$n^2 + 1 \in \mathbb{N}$ donc a est divisible par $n^3 - n$.

3 étant un nombre premier donc d'après le corollaire du petit théorème de Fermat, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Comme a est divisible par $n^3 - n$, on en déduit que a est divisible par 3.

3°) Démontrer que a est divisible par 2.

1ère méthode :

$a = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right)$

$n\left(n^2 + 1\right) \in \mathbb{N}$ donc a est divisible par $n^2 - n$.

2e méthode :
On a démontré à la question 1°) que $a = \left(n^2 + 1\right)\left(n^3 - n\right) = \left(n^2 + 1\right)n\left(n - 1\right)\left(n + 1\right)$.
Parmi les deux entiers consécutifs, n et $n + 1$, l'un est pair, l'autre est impair.
Leur produit $n\left(n + 1\right)$ est donc pair, et il en va de même pour a.
Donc a est divisible par 2.

3e méthode :
n^5 a la même parité que n.
Or la somme ou la différence de deux entiers de même parité est un nombre pair.
On en déduit que a est pair ce qui signifie que a est divisible par 2.

Une variante consisterait à utiliser raisonner par disjonction de cas (suivante la parité de n).
On pourrait aussi utiliser les congruences (congruences modulo 2).

4°) Conclure à l'aide des questions précédentes.

On a : $30 = 2 \times 3 \times 5$.

1ère méthode :

On a démontré que 5 | a (question 1°)) et 3 | a (question 2°).
Or 5 et 3 sont premiers entre eux, donc 15 | a.

On a démontré que 2 | a (question 3°)) et 15 | a avec 2 et 15 premiers entre eux.

Donc 30 | a.

2e méthode (plus rapide et plus efficace) :

a est divisible par 2, 3 et 5.
Donc a est divisible par leur PPCM qui est égal à 30.

> On peut aussi dire que a est divisible par le PPCM de 2, 3, 5.

20

Démontrons que pour tout entier relatif n, $n^7 - n$ est divisible par 42.

On se donne un entier relatif n quelconque.
On pose $a = n^7 - n$.

Pour répondre à la question, on va démontrer que a est divisible par 2, 3 et 7.

• La divisibilité par 7 est évidente par le corollaire du petit théorème de Fermat.

• Pour les divisibilités par 2 et 3, on est amené à utiliser des factorisations.
On va démontrer que a est divisible $n^2 - n$ et par $n^3 - n$.
Pour cela, on transformer l'expression de a en utilisant des identités algébriques classiques ou effectuer des divisions polynomiales.

→ On peut écrire $a = n\left(n^6 - 1\right)$.

D'après la formule fondamentale de l'algèbre, $n^6 - 1 = \left(n - 1\right)\left(n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1\right)$.

On a donc $a = n\left(n - 1\right)\left(n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1\right)$.
Il en résulte que a est divisible par $n^2 - n$.

→ On a :

$$n^6-1=\left(n^2\right)^3-1^3$$

$$=\left(n^2-1\right)\left[\left(n^2\right)^2+n^2+1\right] \quad \text{(identité cubique : } a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b\right)\text{)}$$

$$=\left(n^2-1\right)\left(n^4+n^2+1\right)$$

Par suite, $a=n\left(n^2-1\right)\left(n^4+n^2+1\right)=\left(n^3-n\right)\left(n^4+n^2+1\right)$.

Il en résulte que a est divisible par n^3-n.

Conclusion :

a est divisible par 2, 3 et 7.
Or 2, 3 et 7 sont premiers entre eux deux à deux, donc a est divisible par leur produit.
On en déduit que a est divisible par 42.

Autre méthode pour finir (plus rapide et plus efficace) :

a est divisible par 2, 3 et 7.
Donc a est divisible par leur PPCM qui est égal à 42.

Autre voie pour la divisibilité par 2 (méthode de Diégo Blétry durant l'année scolaire 2013-2014) :

$$n^7-n=n\left(n^6-1\right)$$
$$=n\left(n^3+1\right)\left(n^3-1\right)$$

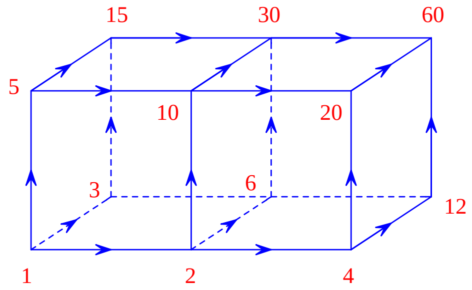
n et n^3+1 sont de parité différente donc $n\left(n^3+1\right)$ est divisible par 2.

Il est possible de vérifier directement la propriété « à la main » pour de petites valeurs de n, par exemple dans les cas où $n\in\{0\,;1\,;2\}$.

$\boxed{21}$ Représentation en 3D des diviseurs positifs d'un entier naturel

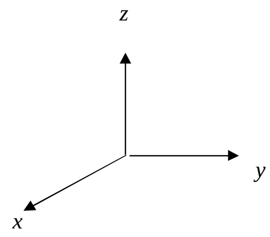
1°) Représentation dans l'espace des diviseurs positifs de 60

$60=2^2\times3\times5$



Les diviseurs positifs de 60 sont les entiers de la forme $2^a\times3^b\times5^c$ avec $0\leqslant a\leqslant2$, $0\leqslant b\leqslant1$, $0\leqslant c\leqslant1$.

On se réfère à la représentation des points dans un repère. Chaque axe correspond à un facteur premier (axe vers la droite : axe des puissances de 2, axe vers le fond : axe des puissances de 3, axe vers le haut : axe des puissances de 5).

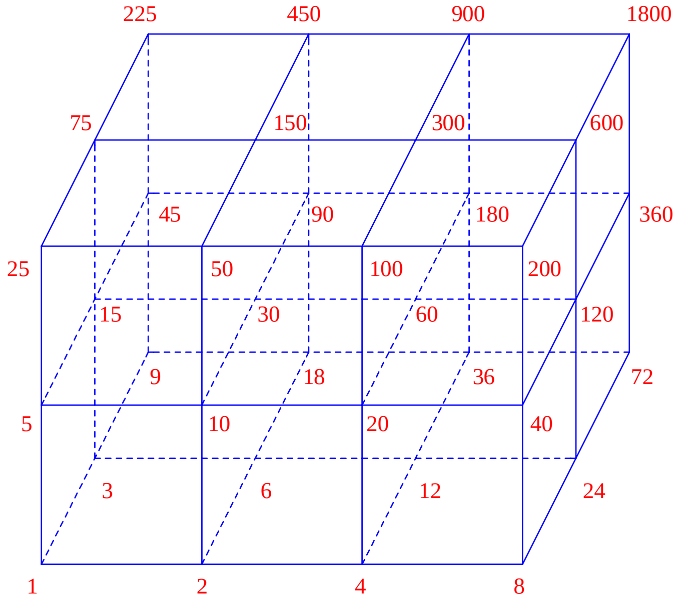


On obtient un pavé droit.
On respecte les conventions de la représentation en perspective cavalière en utilisant des pointillés pour les arêtes cachées.

2°) Représentation dans l'espace des diviseurs positifs de 1800

$1800=2^3\times3^2\times5^2$

La figure est assez grande.



Cela ressemble à un réseau cristallographique.

Question de Donatien Lenoir le 16-1-2014 à propos de l'exercice sur la représentation de diviseurs d'un nombre entier :

« Si on a 4 nombres premiers, on fait comment ? »

Si on a 4 facteurs premiers, on passe en dimension 4 qui n'est pas représentable.
De même pour 5, 6 etc. facteurs premiers.

$\boxed{22}$

1°) $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
$u_k = n! + k$

Rappel : $n! = \displaystyle\prod_{i=1}^{i=n} i$

$$c_k = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} i$$

c_k = produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n sauf k

• Que vaut $c_k \times k$?

$c_k \times k = n!$

On observe que le résultat est indépendant de k.

• En déduire une écriture factorisée de u_k.

$u_k = k \times c_k + k$ et par suite $u_k = k \times (c_k + 1)$.

• Les nombres u_2, u_3, …, u_n sont-ils premiers ?

Soit k un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant n$.
$c_k \in \mathbb{N}$ par définition donc $(c_k + 1) \in \mathbb{N}$.
Par ailleurs, c_k est un entier naturel non nul donc supérieur ou égal à 1 ce qui entraîne immédiatement que $c_k + 1 \geqslant 2$.
Ainsi u_k peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels tous deux supérieurs ou égaux à 2.
Par suite, u_k n'est pas premier.
On a donc démontré que les nombres u_2, u_3, …, u_n ne sont pas premiers.

2°) **Application :**

À l'aide du résultat de la question 1°), donnons un exemple de dix entiers naturels consécutifs non premiers.

En reprenant le 1°), on observe que u_1, u_2, …, u_n sont des entiers naturels consécutifs puisque pour tout entier naturel k compris entre 1 et $n-1$ on a $u_{k+1} = u_k + 1$.

Le résultat de la question 1°) permet d'énoncer :

> Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
> $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, … $n!+n$ sont $n-1$ entiers consécutifs non premiers.

Pourquoi $n-1$? $n-2+1$

Ce résultat permet de donner des séquences aussi longues que l'on veut d'entiers consécutifs non premiers.

On applique le résultat de la question précédente. On choisit n tel que $n-1=10$ c'est-à-dire $n=11$.

On prend $n=11$.

$11!+2$, $11!+3$, $11!+4$, $11!+5$, $11!+6$, $11!+7$, $11!+8$, $11!+9$, $11!+10$, $11!+11$ sont 10 entiers naturels consécutifs non premiers.

$11\,!+2=39\ 916\ 802$
$11!+3=39\ 916\ 803$
$11!+4=39\ 916\ 804$
$11!+5=39916805$
$11\,!+6=39916806$
$11!+7=39916807$
$11!+8=39916808$
$11!+9=39916809$
$11!+10=39916810$
$11!+11=39916811$

Sinon, avec la table des nombres premiers, on peut donner la séquence : 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 302, 303 et 304.
Il s'agit d'une application concrète de la question 1°).

Cet exercice montre que l'on peut trouver des séquences de nombres consécutifs non premiers aussi longues que l'on veut (ce résultat est démontré au 1°)).
On peut remarquer qu'il s'agit d'une « preuve constructive ».

Cet exercice est à relier aux problèmes de répartition des nombres premiers.
En effet, on peut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists p \in \mathrm{P} \quad n \leqslant p \leqslant 2n$ où P désigne l'ensemble des nombres premiers (théorème de Bertrand).
Ce théorème n'est pas facile à démontrer. Il a pour corollaire le fait qu'il y a une infinité de nombres premiers que l'on avait démontré dans le cours assez simplement selon la démonstration d'Euclide.

Raréfaction des nombres premiers

Objectif : s'interroger sur la répartition des nombres premiers

La première chose qui a attiré l'attention des mathématiciens de l'Antiquité était l'absence de règles quant à l'apparition de nombres premiers dans la liste des nombres entiers naturels. Ils peuvent être relativement proches ou, au contraire, très éloignés les uns des autres.

On se propose d'étudier la présence de grands intervalles sans nombres premiers.

On parle parfois de « structure lacunaire » comme en sciences physiques en 2[e], on parle de structure lacunaire de la matière (avec le modèle de l'atome élaboré par …).

$\boxed{23}$ Cet exercice sera corrigé en classe.

Nombres entiers dont l'écriture en base dix ne comporte que des 1

1°) **Les nombres $N_1=1$, $N_2=11$, $N_3=111$, $N_4=1111$ sont-ils premiers ?**

$N_1=1$ n'est pas premier.

$N_2=11$ est premier.

$N_3=111$ n'est pas premier (divisible par 3).

$N_4=1111$ n'est pas premier (divisible par 11).

2°) Par hypothèse, il existe un entier naturel k tel que $p=kq$.

$$\begin{aligned}9N_p &= 10^p-1\\ &= 10^{kq}-1\\ &= \left(10^q\right)^k-1\\ &= \left(10^q-1\right)\underbrace{\left(10^{q(k-1)}+10^{q(k-2)}+\ldots+1\right)}\\ &= 9N_q\times n\end{aligned}$$

On en déduit que $N_p=N_q\times n$.

3°) En déduire que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

Soit p un entier naturel non nul.

1[er] cas : $p=1$

Dans ce cas, N_1 n'est pas premier.

2[e] cas : $p\geqslant 2$

Comme p est n'est pas premier et est supérieur ou égal à 2, il existe deux entiers k et q supérieurs ou égaux à 2 tels que $p=kq$.
D'après la question 2°), N_q divise N_p.

Or $N_q\neq N_p$ et $N_q\neq 1$.
On en déduit que N_p n'est pas premier.

La contraposée de cette implication est : « Si N_p est premier, alors p est premier ».
Comme la première implication est vraie, la contraposée est également vraie.

1°) Les nombres premiers de Sophie Germain

On dit qu'un nombre premier p est un nombre premier de Sophie Germain lorsque $2p+1$ est aussi un nombre premier.

Les nombres premiers de Sophie n'ont pas beaucoup d'applications.

Déterminons les nombres premiers de Sophie Germain inférieurs à 50.

On commence par écrire une liste de nombres premiers jusqu'à 100 (obtenue par exemple grâce au crible d'Eratosthène).

2 × 2 + 1 = 5 → nb premier de S.G.

3 × 2 + 1 = 7 → nb premier de S.G.

5 × 2 + 1 = 11 → nb premier de S.G.

7 × 2 + 1 = 15 7 n'est pas un nombre de Sophie Germain

11 × 2 + 1 = 23 → nb premier de S.G.

13 × 2 + 1 = 27 13 n'est pas un nombre de Sophie Germain

17 × 2 + 1 = 35

19 × 2 + 1 = 39

23 × 2 + 1 = 47 → nb premier de S.G.

29 × 2 + 1 = 59 → nb premier de S.G.

31 × 2 + 1 = 63

37 × 2 + 1 = 75

41 × 2 + 1 = 83 → nb premier de S.G.

43 × 2 + 1 = 87

47 × 2 + 1 = 95

Les nombres premiers de Sophie Germain inférieurs à 50 sont : 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41.

Il y a 7 nombres premiers de Sophie Germain inférieurs à 50.

On pourrait utiliser un programme.

Observation de Marin Bergerot (le 30-1-2013) :

Une propriété qui marche pour 2 (mais pas pour 3)

11 × 2 + 1 = 23

23 × 2 + 1 = 47

---

41 × 2 + 1 = 83

83 × 2 + 1 = 167

2°) On déterminer des chaînes de Cunningham de première espèce.

1ère suite :

On démarre par 2.
$2\times2+1=5$
$2\times5+1=11$
$2\times11+1=23$
$2\times23+1=47$
On s'arrête là car $2\times47+1=95$ qui n'est pas un nombre premier.

Autre suite :

On démarre à 3.
$3\times2+1=7$
$7\times2+1=15$

15 n'est pas premier

$(3\,;7\,;15)$ est une chaîne de Cunningham de première espèce.

Le 18-4-2019

On donne des chaînes de longueurs 2 ou 3.

Dans une chaîne de Cunningham de première espèce, tous les termes sont des nombres premiers de Sophie Germain sauf le dernier.

$(3\,;7)$
$(11\,;23\,;47)$
$(29\,;59\,;119)$
$(41\,;83\,;167)$
$(53\,;107\,;215)$

On pourrait éventuellement utiliser un programme.

$\boxed{25}$ Crible de Matiyasevich

1°) **Conjectures**

On peut mettre la figure en animation avec le curseur.

d) Par certains points de coordonnées (0 ; k), avec $k \in \mathbb{N}$, ne passe aucun de ces segments.

On peut conjecturer que les entiers naturels k tels qu'il ne passe aucun segment par le point de coordonnées (0 ; k) sont les entiers naturels qui ne sont pas premiers.

2°) **Quelques justifications**

$\mathcal{C}$: $y = x^2$
M : point de $\mathcal{C}$ d'abscisse m $(m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 2)$
N : point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$

Déterminons une équation de la droite (MN).

On utilise le résultat suivant :

La droite D passant par un point $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}\ ;\ y_{\mathrm{A}}\right)$ et de coefficient directeur a a pour équation $y = a\left(x - x_{\mathrm{A}}\right) + y_{\mathrm{A}}$.

$\mathrm{M}\left(m\ ; m^2\right)$
$\mathrm{N}\left(-n\ ; n^2\right)$

Calculons le coefficient directeur de la droite (MN).

$$a = \frac{y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{N}}}{x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{N}}} = \frac{m^2 - n^2}{m + n} = m - n$$

La droite (MN) a donc pour équation $y = (m-n)(x-m) + m^2$ soit $y = (m-n)x + mn$.

Le point d'intersection K de la droite (MN) et de l'axe des ordonnées a donc pour coordonnées $(0\ ; mn)$.

Le crible de Matyassevitch permet de multiplier des nombres de manière géométrique (sans faire de calcul).

Ce crible est dû à deux mathématiciens russes contemporains : Yuri Matiyasevitch et Boris Stechkin.

$\boxed{26}$ Postulat de Bertrand

$n < p < 2n$

Pour $n = 4$, on peut prendre 7.
Pour $n = 5$, on peut prendre 7.
Pour $n = 6$, on peut prendre 7.
Pour $n = 7$, on peut prendre 11.
Pour $n = 8$, on peut prendre 11.