1$^{\text{ère}}$ S1

IE du mardi 5 juin 2012 (30 min)

I. Question de cours

Soit a et b deux réels quelconques.

Recopier et compléter :

$\cos a = \cos b \quad \Leftrightarrow$ ……………………………….

$\sin a = \sin b \quad \Leftrightarrow$ ……………………………….

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos x = \frac{1}{2}$ (1)

$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)

$\cos 3x = \cos x$ (3)

$\cos 2x = \sin x$ (4)

$\cos x = \cos \frac{3\pi}{5}$ (5)

$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$ (6)

L’équation (6) sera comptée en bonus.

Corrigé de l'IE du 5 juin 2012

I. Questions de cours

$$\cos a = \cos b \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin a = \sin b \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

II. Résolutions d'équations trigonométriques

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ (1).

$$(1) \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S_1 = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2).**

$$(2) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k'\pi}{3} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$\boxed{S_2 = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3},\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = \cos x$ (3).**

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x = -x + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 4x = 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{k'\pi}{2} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

On peut aisément observer, éventuellement en plaçant les valeurs sur la droite réelle, que les nombres de la première famille de solutions sont compris dans la deuxième.
On peut donc écrire l'ensemble des solutions de (3) sous la forme d'une seule famille.

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$\boxed{S_3 = \left\{ \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 2x = \sin x$ (4).**

$$(4) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$$\boxed{S_4 = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \right\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \cos \frac{3\pi}{5}$ (5).**

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{5} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = -\frac{3\pi}{5} + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$$\boldsymbol{S_5 = \left\{\frac{3\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{5} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ (6).

(6) $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k''\pi \quad (k'' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k''\pi \quad (k'' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Soit S_6 l'ensemble des solutions de (6).

$$\boldsymbol{S_6 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,\ k'' \in \mathbb{Z}\right\}}$$