$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 4 juin 2012 (50 min)

Ne rien écrire, ne rien surligner sur le sujet.

I. (2 points) Question de cours

Citer les quatre formules d'addition en trigonométrie (écrire une égalité par ligne).

II. (3 points) Résoudre l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans les intervalles suivants :

a) $[-\pi\ ;\ \pi]$ b) $[0\ ;\ 2\pi]$ c) $[-2\pi\ ;\ 0]$

Réponse sur la copie (aucune figure n'est demandée sur la copie) :

Recopier sur la copie en bleu le début des phrases suivantes et compléter la fin en vert sans explication :

• L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est ………….. .

• L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ est ………….. .

• L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 0]$ est ………….. .

III. (3 points) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ les équations et l'inéquation suivantes :

$\sin x = 0$ $\sin x = 1$ $\sin x \leqslant 0$

Réponse sur la copie (aucune figure n'est demandée sur la copie) :

Recopier sur la copie en bleu le début des phrases suivantes et compléter la fin en vert sans explication :

• L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ est ………….. .

• L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x = 1$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ est ………….. .

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x \leqslant 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ est ………….. .

IV. (2 points) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$.

Réponse sur la copie :

• Tracer un cercle trigonométrique et représenter l'arc correspondant aux images des solutions de l'inéquation.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ est ……………

V. (2 points) On donne $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{4\pi}{5}$ (détailler les calculs).

VI. (2 points) Soit x un réel quelconque de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

Démontrer que l'on a : $\sqrt{1-\cos 2x} = \sin x \times \sqrt{2}$.

VII. (2 points)

Soit x un réel quelconque.

Démontrer que l'on a : $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \sin x$.

VIII. (4 points) Soit x un réel quelconque.

1°) Le but de cette question est de démontrer l'égalité : $\sin 3x = \sin x \times \left(4\cos^2 x - 1\right)$.

Recopier, compléter et achever les calculs dont le début est donné dans le cadre ci-dessous (en rajoutant des lignes si nécessaire).

$\sin 3x = \sin(2x + x)$

$= \sin 2x \times \cos x + \sin x \times \dots$

$= \dots \times \cos x + \sin x \times (\dots)$

$= \dots$

2°) À l'aide de ce résultat, démontrer que l'on a : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin x \cos x\,(2\cos x + 1)$.

Consignes orales

II et III

Ne pas faire de figure.

Compléter juste la fin de la phrase en vert (recopier sur la copie le début de la phrase en bleu et compléter la fin de la phrase en vert).

Ne pas donner de noms aux ensembles de solutions des équations (ne pas mettre $S = \ldots$).

VIII

On peut évidemment continuer les lignes.
Continuer de recopier en vert.

Pour les exercices V à VIII, encadrer les résultats en rouge à la règle.

I à IV : écriture des ensembles de solutions (crochets, accolades…)

VII et VIII : présentation des calculs

Corrigé du contrôle du 4 juin 2012

I. Question de cours : formules d'addition

cos ($a + b$) = cos a cos b – sin a sin b

cos ($a – b$) = cos a cos b + sin a sin b

sin ($a + b$) = sin a cos b + sin b cos a

sin ($a – b$) = sin a cos b – sin b cos a

II.

Pour résoudre les équations proposées on utilise les valeurs remarquables du cosinus et du sinus.
On utilise également le cercle trigonométrique.

• L'ensemble des solutions de l'équation cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ est $\left\{-\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\right\}$.

• L'ensemble des solutions de l'équation cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ est $\left\{\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\right\}$.

• L'ensemble des solutions de l'équation cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 0]$ est $\left\{-\frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{11\pi}{6}\right\}$.

Attention aux notations des ensembles de solutions des équations : les accolades sont indispensables.
Certains élèves se sont trompés et ont utilisé des crochets pas du tout adaptés (les crochets servent à noter des intervalles).

III.

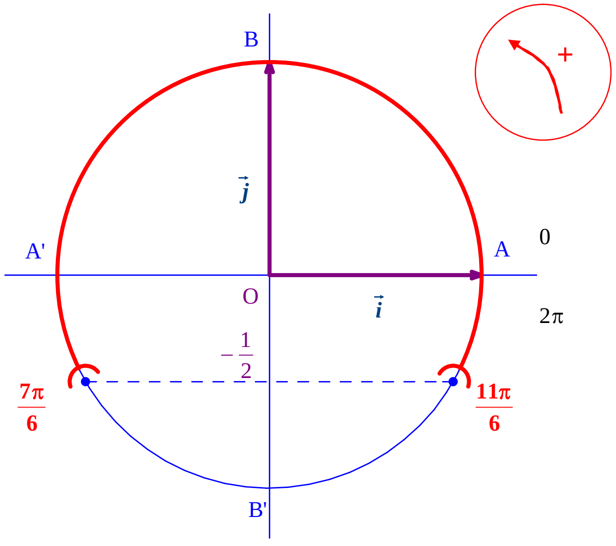
• L'ensemble des solutions de l'équation sin $x = 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ est **$\{0\ ;\ \pi\ ;\ 2\pi\ ;\ 3\pi\}$**.

• L'ensemble des solutions de l'équation sin $x = 1$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ est $\left\{\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{2}\right\}$.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation sin $x \leqslant 0$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ est **$\{0\} \cup [\pi, 2\pi] \cup \{3\pi\}$ ou plutôt $[\pi, 2\pi] \cup \{0\ ;\ 3\pi\}$**.

Cette dernière inéquation comportait une petite difficulté aisément surmontable.
L'ensemble des solutions est la réunion d'un intervalle et d'un ensemble constitué de deux éléments.

IV. On représente l'arc auquel appartiennent les images des solutions de l'inéquation sin $x > -\frac{1}{2}$ sur le cercle trigonométrique.



L'ensemble des solutions de l'inéquation sin $x > -\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ est $\left[0\ ;\ \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right]$.

V. $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Calculons $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{4\pi}{5}&=\cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right)\\&=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\\&=2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2-1\\&=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1\\&=2\times\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}-1\\&=\frac{6-2\sqrt{5}}{8}-1\\&=\frac{3-\sqrt{5}}{4}-1\\&=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

VI. $x\in[0\,;\pi]$

Démontrons que $\sqrt{1-\cos 2x}=\sin x\times\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos 2x}&=\sqrt{1-1+2\sin^2 x}\\&=\sqrt{2\sin^2 x}\\&=\sqrt{2}\times\sqrt{\sin^2 x}\\&=\sin x\times\sqrt{2}\quad(\text{car } x\in[0\,;\pi] \text{ donc } \sin x\geqslant 0)\end{aligned}$$

La précision sur le signe de $\sin x$ est indispensable.
En effet, pour X réel quelconque, on a : $\sqrt{X^2}=|X|$.

VII. $x\in\mathbb{R}$ quelconque

Démontrons que $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\sin x$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)&=\sin\frac{\pi}{3}\ \cos x+\sin x\ \cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\ \cos x+\sin x\ \cos\frac{\pi}{3}\\&=2\sin x\ \cos\frac{\pi}{3}\\&=2\times\frac{1}{2}\times\sin x\\&=\sin x\end{aligned}$$

VIII. $x\in\mathbb{R}$ quelconque

1°) **Démontrons que $\sin 3x=\sin x\times\left(4\cos^2 x-1\right)$.**

$$\begin{aligned}\sin 3x&=\sin(2x+x)\\&=\sin 2x\times\cos x+\sin x\times\cos 2x\\&=2\sin x\times\cos x\times\cos x+\sin x\times\left(2\cos^2 x-1\right)\\&=2\sin x\times\cos^2 x+\sin x\times\left(2\cos^2 x-1\right)\\&=\sin x\times(2\cos^2 x+2\cos^2 x-1)\\&=\sin x\times(4\cos^2 x-1)\end{aligned}$$

2°) **Démontrons que : $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin x\cos x\,(2\cos x+1)$.**

$$\begin{aligned}\sin x+\sin 2x+\sin 3x&=\sin x+2\sin x\cos x+\sin x\,(4\cos^2 x-1)\\&=\sin x\,(1+2\cos x+4\cos^2 x-1)\\&=\sin x\,(2\cos x+4\cos^2 x)\\&=2\sin x\cos x\,(1+2\cos x)\end{aligned}$$

On en déduit que $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin x\cos x\,(2\cos x+1)$.