1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 7 mai 2012 (3 heures 30)

• Des copies déjà préparées sont jointes au sujet.

• Des conseils de rédaction sont donnés sur une feuille à part jointe au sujet.
Il est demandé de les lire attentivement et de les respecter scrupuleusement.

• Le barème des exercices est donné sur 40.

Énoncé à conserver.

Ne rien écrire, ne rien surligner dessus.

*

* *

<u>Résultat non souligné ou non encadré : – 1</u>

I. (10 points) QCM

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Compléter le tableau donné sur la copie en indiquant les réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte deux points. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse fausse enlève un point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse.

1°) La somme $S = 7 + 13 + 19 + \ldots + 2005$ est égale à :

a. 330 000
b. 335 998
c. 336 004
d. 336 010

2°) On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.
Les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ dans le plan muni d'un repère sont alignés sur la droite D d'équation :

a. $x - 2y - 3 = 0$
b. $x - 2y - 6 = 0$
c. $6x + 2y - 1 = 0$
d. $x + 2y - 6 = 0$

3°) On a modélisé, pour un département du centre de la France, l'évolution de sa population depuis le 1er janvier 2010. Le département compte 600 000 habitants le 1er janvier 2010.
On fait l'hypothèse que la population diminue de 2 % chaque année.
Si on applique ce modèle, la population du département sera inférieure à 300 000 à partir du 1er janvier :

a. 2015
b. 2020
c. 2030
d. 2045

4°) Si la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est arithmétique telle que $u_3 = -7$ et $u_8 = -22$, alors sa raison est :

a. 3
b. $-\frac{1}{3}$
c. -3
d. $-\frac{29}{5}$

5°) Si la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est géométrique telle que $u_2 = 2$ et $u_5 = \frac{1}{4}$, alors sa raison est :

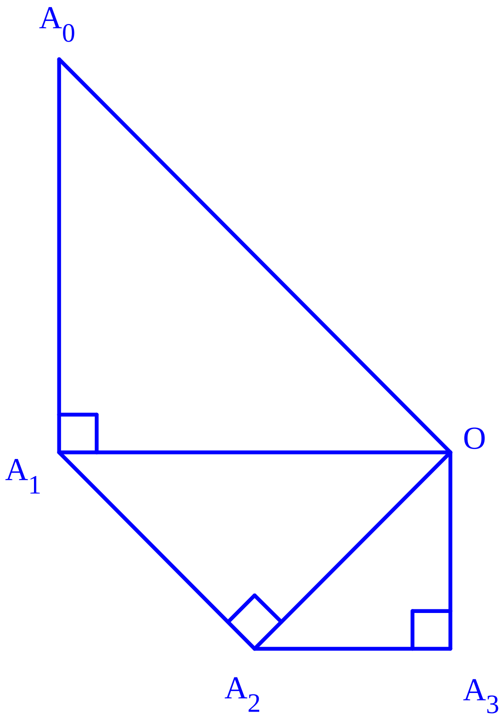
a. 2
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{2}$
d. $-\frac{1}{2}$

II. (4 points) On réalise la figure ci-dessous en exécutant les instructions suivantes.

Étape 1 :
Soit OA_0A_1 un triangle rectangle isocèle en A_1 tel que $A_0A_1 = a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé).

Étape 2 :
Extérieurement au triangle OA_0A_1, construire le triangle OA_1A_2 rectangle isocèle d'hypoténuse $[OA_1]$.

Étape 3 :
Extérieurement au triangle OA_1A_2, construire le triangle OA_2A_3 rectangle isocèle d'hypoténuse $[OA_2]$.



On poursuit de la même façon : pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle d'hypoténuse $[OA_n]$.
Il n'est pas demandé de refaire la figure sur la copie.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = A_nA_{n+1}$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (détailler le raisonnement).

b) En déduire la nature de la suite (u_n).

2°) Pour chaque étape n (où n est un entier naturel non nul), on s'intéresse à la longueur S_n de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_n$:

$$S_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $S_n = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \left[1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$.

b) Dans cette question, on prend $a = 1$.
À l'aide de la calculatrice, calculer la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{20}$ (donner la valeur arrondie au centième). Aucune rédaction n'est attendue pour cette question.

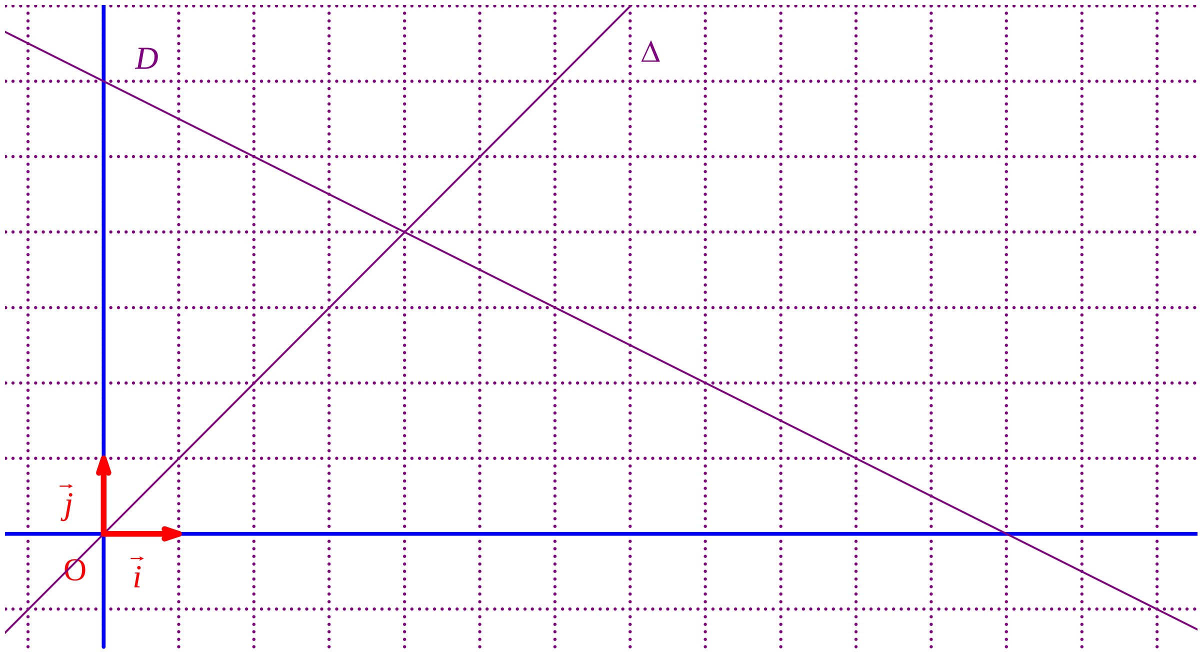
III. (7 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 12$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Donner sans explication l'équation réduite des droites D et Δ, dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracées sur le graphique ci-dessous (écrire les équations de droites directement sur le graphique).

À l'aide de ces droites, faire apparaître, sans calcul, sur l'axe des abscisses les nombres u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Laisser les traits de construction apparents. Aucune explication n'est demandée sur la copie.



2°) On souhaite obtenir à l'aide d'un algorithme la valeur de u_n pour n'importe quel entier naturel *n* donné.

On propose les trois algorithmes suivants. Lequel (lesquels) répond(ent) à la question ? Répondre sans justifier. Il n'est pas demandé de les programmer sur calculatrice.

Algorithme A	Algorithme B	Algorithme C
Variables : *n*, *i* : entiers naturels *u* : réel **Entrée :** Saisir *n* **Initialisation :** *u* prend la valeur 12 **Traitement :** **Pour** *i* allant de 1 à *n* **Faire** u prend la valeur $-\frac{1}{2}u+6$ **FinPour** **Sortie :** Afficher *u*	**Variables :** *n*, *i* : entiers naturels *u* : réel **Entrée :** Saisir *n* **Initialisations :** *u* prend la valeur 12 *i* prend la valeur 0 **Traitement :** **Tantque** $i < n$ **Faire** *i* prend la valeur *i* + 1 u prend la valeur $-\frac{1}{2}u+6$ **FinTantque** **Sortie :** Afficher *u*	**Variables :** *n*, *i* : entiers naturels *u* : réel **Entrée :** Saisir *n* **Initialisations :** *u* prend la valeur 12 *i* prend la valeur 0 **Traitement :** **Tantque** $i \leqslant n$ **Faire** *i* prend la valeur *i* + 1 u prend la valeur $-\frac{1}{2}u+6$ **FinTantque** **Sortie :** Afficher *u*

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 4$.

a) Soit *n* un entier naturel fixé. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n (détailler la démonstration).

En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

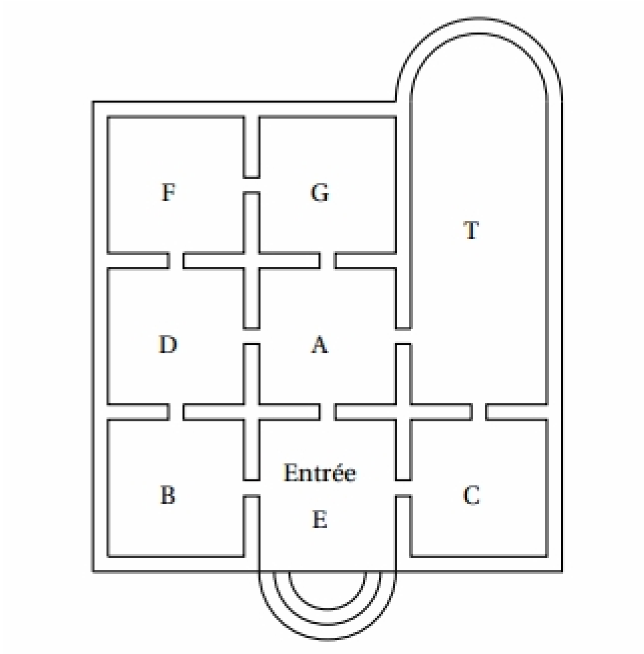
b) Exprimer v_n en fonction de *n* ; en déduire u_n en fonction de *n*.

IV. (8 points) Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.
Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe au hasard d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1°) On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

Construire au brouillon l'arbre pondéré (c'est-à-dire avec les probabilités) des différents trajets possibles pour ce visiteur.
Dans cette question, on ne demande pas de détailler les calculs de probabilités.
Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire (écrire chaque fois l'opération et le résultat).

a) Calculer la probabilité du parcours codé EBDF.

b) Calculer la probabilité de l'événement : « La quatrième salle du trajet est F ».

c) Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T.
Justifier par un calcul l'affirmation : « Il y a quatre chances sur neuf que le trajet passe par la salle T ».

2°) Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

Dans cette partie, les résultats obtenus grâce à la calculatrice n'ont pas besoin d'être détaillés.

a) Quel est le nom de la loi que suit X ? Quels sont ses paramètres ?

b) Calculer la probabilité qu'un seul visiteur passe par la salle T (arrondir le résultat au millième).

c) Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T (arrondir le résultat au millième).

d) Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
Prouver qu'il a tort.

V. (4 points)

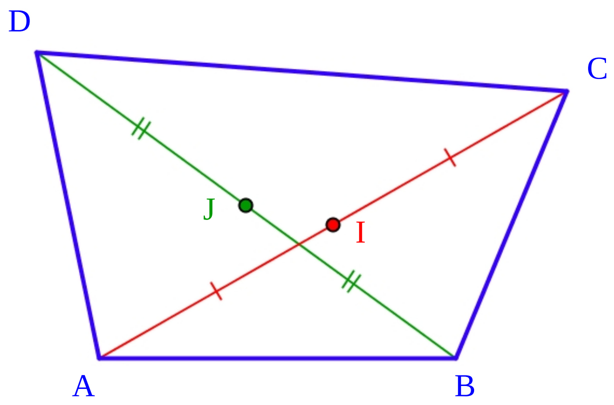
1°) **Question de cours : la formule de la médiane**

Soit A et B deux points du plan *P*. On note I le milieu de [AB].

Compléter puis démontrer l'égalité : « $\forall$ M $\in$ *P* $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = \dots\dots\dots \text{MI}^2 + \dots\dots\dots$ ».

2°) Soit ABCD un quadrilatère quelconque.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].



On ne demande pas de refaire la figure sur la copie.

a) En appliquant la formule de la médiane plusieurs fois, démontrer que l'on a :

$$\text{AB}^2 + \text{BC}^2 + \text{CD}^2 + \text{AD}^2 = 4\text{IJ}^2 + \text{AC}^2 + \text{BD}^2 .$$

Indication : on pourra commencer par appliquer la formule de la médiane dans les triangles ABC et ACD.

b) Le mathématicien Euler affirmait : « La somme des carrés des longueurs des côtés d'un quadrilatère quelconque est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales ».

Peut-on avoir égalité ? Dans quelle situation ?

VI. (7 points) Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $P(-1\,;0)$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1, H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre P passant par H.

La parallèle à (OA) passant par P coupe $\mathcal{C}'$ en B et B', B étant situé du même côté que A par rapport à l'axe des abscisses.

Il n'est pas demandé de refaire la figure sur la copie.

1°) Émettre une conjecture sur la droite (AB) par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Aucune justification n'est demandée.

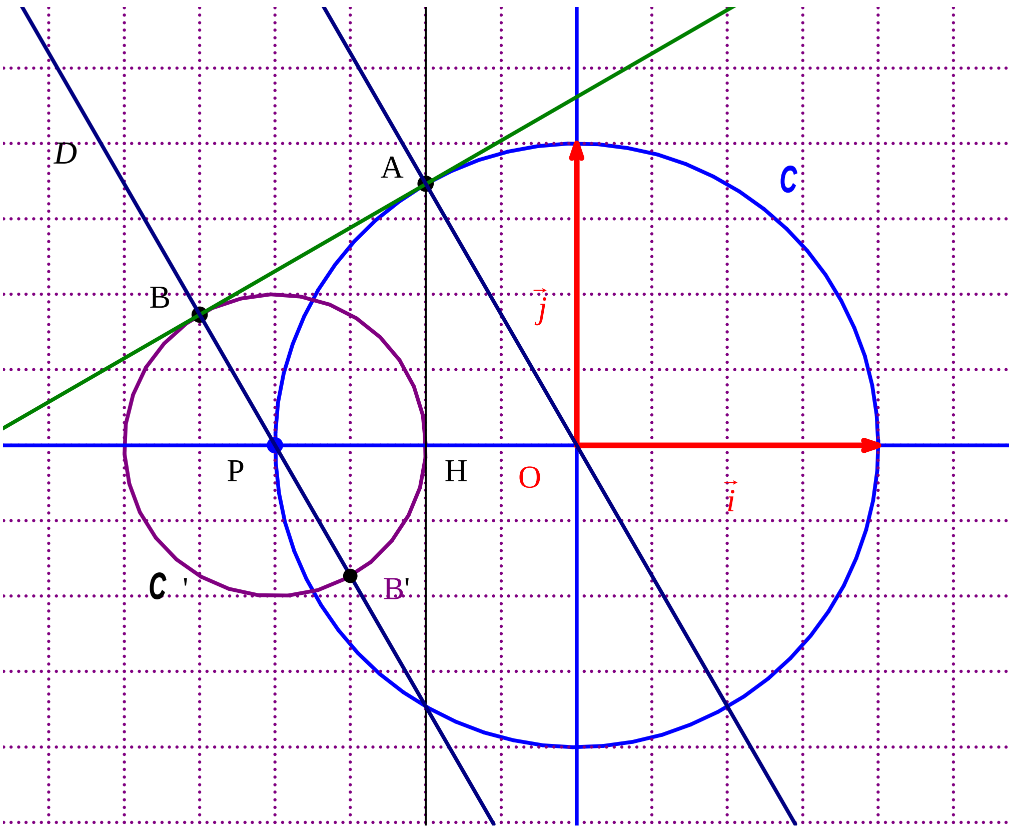
2°) Vérifier par le calcul que A et P appartiennent à $\mathcal{C}$.

3°) Déterminer une équation de la droite *D* parallèle à (OA) passant par P.

4°) Donner sans explication les coordonnées de H puis une équation du cercle $\mathcal{C}'$.

5°) En déduire les coordonnées de B par le calcul (valeurs exactes).

6°) Démontrer la conjecture émise au 1°) par le calcul.



Quelques conseils sur des questions particulières du contrôle

① Suites (exercices I, II, III)

L'attention est attirée sur deux points :

• **Notations d'une suite avec des parenthèses**

Exemple : « La suite (u_n) est ………………… ».

• **Quantification des égalités**

On pourra éventuellement utiliser le symbole $\forall$.

Exemple : « $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dots$

② Probabilités (exercice IV)

L'attention est attirée sur deux points :

• On pourra nommer des événements mais cela n'est pas obligatoire.
On pourra tout aussi bien nommer l'événement entre parenthèses.

Exemples :

P (« la quatrième salle du parcours est F ») =

P (« le visiteur passe par T ») =

• On n'oubliera pas d'utiliser le symbole « ≈ » lorsque l'énoncé demande des valeurs approchées.

Exemple :

P (« le visiteur passe par la salle T ») ≈ ……… (valeur arrondie au millième)

③ Géométrie (exercices V et VI)

• On attire l'attention sur la clarté, la concision du raisonnement et le respect des notations spécifiques à la géométrie.

• **Exemple de rédaction dans l'exercice V (pour la question 2°) a)) :**

« D'après la formule de la médiane dans le triangle ABC, on a : ………..… »

On pourra utiliser le symbole « ⇔ » à condition de le faire à bon escient.

• **Exemple de rédaction-type pour la formulation d'une conjecture dans l'exercice VI :**

« D'après le graphique, il semble que la droite (AB) est … »

ou

« D'après le graphique, on peut conjecturer que la droite (AB) est …. »

• **Exemple de rédaction-type pour l'exercice VI :**

« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont solutions de l'équation … ».

1ère S1 Contrôle du lundi 7 mai 2012

Prénom et nom : ……………………………………………………….

Note : ….. / 20

I (10)	II (4)	III (7)	IV (8)	V (4)	VI (7)
………	………	………	………	………	………

I. (10 points) QCM

Indiquer la lettre a, b ou c correspondant à la réponse choisie.

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	Total
Réponse	…….	…….	…….	…….	…….	…….

II. (4 points)

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

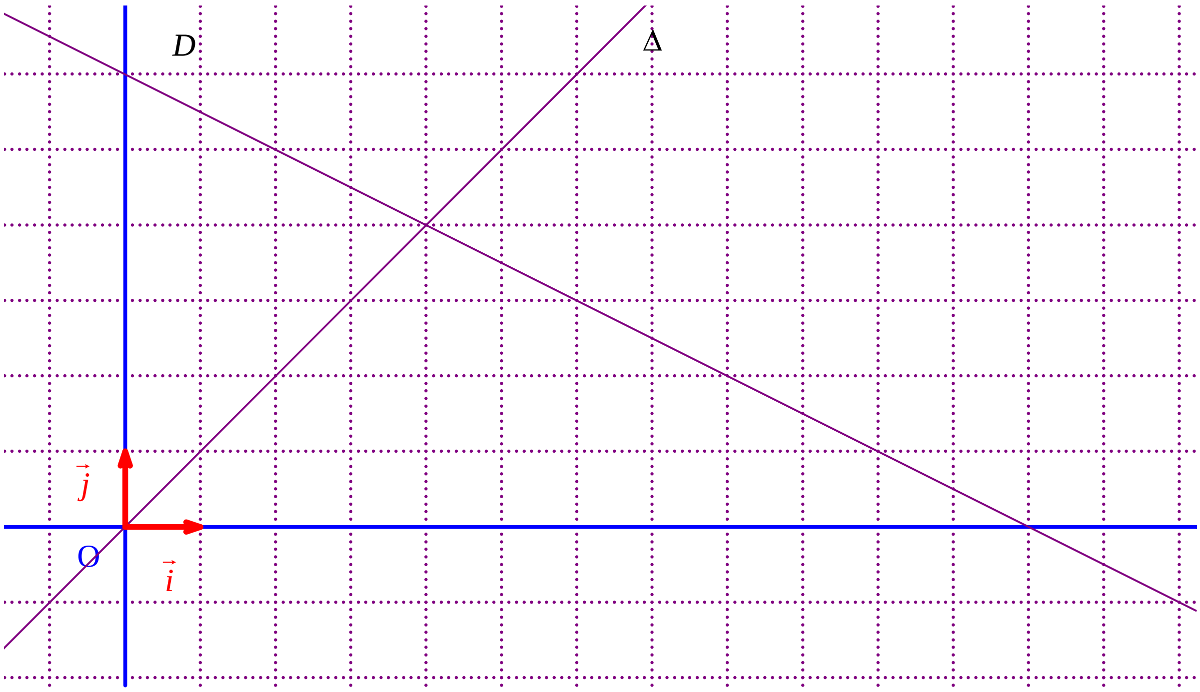
…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

III. (7 points)

1°)



2°) Algorithmes choisis : …………………………………………………………………………….

3°)

…………..………………………………………………………………………..……………………

…………..…………………………………………………………………………..…………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..…………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (8 points)

V. (4 points)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (7 points)

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

…………..……………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 7 mai 2012

I.

Question	**1°)**	**2°)**	**3°)**	**4°)**	**5°)**
Réponse	c	b	d	c	c

1°) La somme $S = 7 + 13 + 19 + \ldots + 2005$ est égale à : **336 004.**

Justification :

On reconnaît la somme de termes d'une suite arithmétique de raison 6.

On note (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison r = 6.

Déterminons n tel que $u_n = 2005$

On applique $u_n = u_0 + nr$ et on obtient : $n = \dfrac{2005-7}{6} = 333$

$$S = \sum_{k=0}^{333} u_k = 334 \times \frac{7+2005}{2} = 336\,004$$

La réponse exacte est la réponse c.

2°) Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$, alors les points de coordonnées $(n,\ u_n)$ sont alignés sur la droite D d'équation $x - 2y - 6 = 0$.

Justification :

(u_n) : suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ u_n = -3 + n \times \dfrac{1}{2}$.

Dans le plan muni d'un repère, les points de coordonnées $(n,\ u_n)$ appartiennent donc à la droite D d'équation :

$y = \dfrac{1}{2}x - 3$ soit $x - 2y - 6 = 0$.

La réponse exacte est la réponse b.

3°) La population du département sera inférieure à 300 000 à partir du 1er janvier **2045.**

Justification :

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 600000$ et de raison 0,98.

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 300\,000$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$.

On est donc amené à résoudre $600000 \times 0,98^n \leqslant 300\,000$.

En testant à la calculatrice les valeurs proposées on observe que :

$$600000 \times 0,98^5 \approx 542352,48$$
$$600000 \times 0,98^{10} \approx 490243,68$$
$$600000 \times 0,98^{20} \approx 400564,78$$
$$600000 \times 0,98^{35} \approx 295844,77$$

L'entier $n = 35$ convient ce qui correspond à l'an 2045.

La réponse exacte est la réponse d.

4°) Si la suite (u_n) est arithmétique telle que $u_3 = -7$ et $u_8 = -22$, alors sa raison est : **– 3**.

Justification :

$$\begin{aligned} u_8 = u_3 + (8-3)r \; &\Leftrightarrow \; -22 = -7 + 5r \\ &\Leftrightarrow \; r = -3 \end{aligned}$$

La réponse exacte est la réponse c.

5°) Si la suite (u_n) est géométrique telle que $u_2 = 2$ et $u_5 = \frac{1}{4}$, alors sa raison est : $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Justification :

$$\begin{aligned} u_5 = u_2 q^{5-2} \; &\Leftrightarrow \; \frac{1}{4} = 2q^3 \\ &\Leftrightarrow \; q^3 = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \; q = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La réponse exacte est la réponse c.

II. Il s'agit d'une construction itérative.

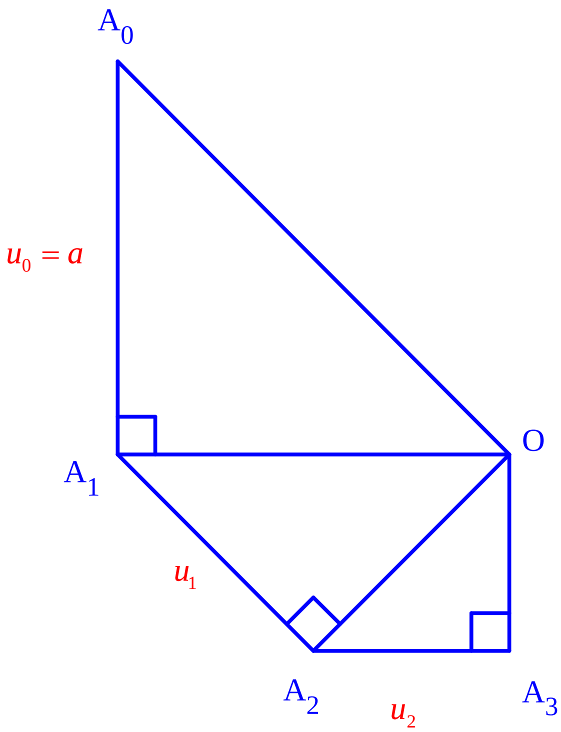
1°) $u_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$

Pour comprendre « $u_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ » posé dans l'énoncé, on remplace *n* par 0, 1, 2 etc.

$u_0 = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 = a$
$u_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$
$u_2 = \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ etc.

u_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1}.

Il est intéressant de faire apparaître u_0, u_1, u_2 sur la figure, comme cela est fait ci-dessous.



a) **Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n.**

Il y a plusieurs méthodes possibles :

- utilisation du théorème de Pythagore (ou de la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle)

- utilisation de la trigonométrie ;

- utilisation des agrandissements-réductions

1ère méthode :

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle O $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$ rectangle en A_{n+2}, on a :

$(OA_{n+1})^2 = (OA_{n+2})^2 + (A_{n+1}A_{n+2})^2$

Or :

- le triangle $OA_{n+1}A_{n+2}$ rectangle isocèle en A_{n+2} donc $OA_{n+2} = A_{n+1}A_{n+2} = u_{n+1}$

- le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1} donc $OA_{n+1} = A_nA_{n+1} = u_n$

Donc $(u_n)^2 = (u_{n+1})^2 + (u_{n+1})^2$ d'où $(u_n)^2 = 2(u_{n+1})^2$.

Par suite, $u_n = u_{n+1}\sqrt{2}$ car $u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant 0$.

Donc $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n}$.

2e méthode :

On se place dans le triangle $OA_{n+1}A_{n+2}$ rectangle isocèle en A_{n+2}.

On a : $\cos \widehat{A_{n+1}OA_{n+2}} = \frac{OA_{n+2}}{OA_{n+1}}$

Or $\widehat{A_{n+1}OA_{n+2}} = 45°$ donc $\cos 45° = \frac{OA_{n+2}}{OA_{n+1}}$ d'où $\frac{OA_{n+2}}{OA_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (car $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Par suite, on a : $OA_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} OA_{n+1}$ (1).

Or :

- le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1} donc $OA_{n+1} = A_nA_{n+1}$;
- le triangle $OA_{n+1}A_{n+2}$ est isocèle en A_{n+2} donc $OA_{n+2} = A_{n+1}A_{n+2}$.

La relation (1) s'écrit donc $A_{n+1}A_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_nA_{n+1}$ $(1')$.

On a : $u_n = A_nA_{n+1}$ et $u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2}$.

Donc $(1')$ s'écrit aussi : $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n}$.

b) **Déduisons-en la nature de la suite (u_n).**

D'après la question précédente, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n$.

On en déduit que **la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$**.

2°) $S_n = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$

a) **Démontrons que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $S_n = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \left[1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]$.**

$$
\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n \\
&= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \quad \text{(attention au dernier indice : c'est bien } n-1 \text{ et non } n \text{ !)} \\
&= u_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{(formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)} \\
&= a \times \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (\text{car } u_0 = \mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 = a) \\
&= a \times \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} \\
&= a \times \left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right] \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}
$$

Donc $\boldsymbol{S_n = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \left[1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]}$.

b) $a = 1$

Calculons la longueur de la ligne brisée $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_{20}$.

On doit calculer $S_{20} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \left[1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}\right]$.

D'après la calculatrice, on a : $S_{20} = 3{,}41087936\ldots$.

On en déduit : **$S_{20} \approx 3{,}41$ (valeur arrondie au centième).**

III.

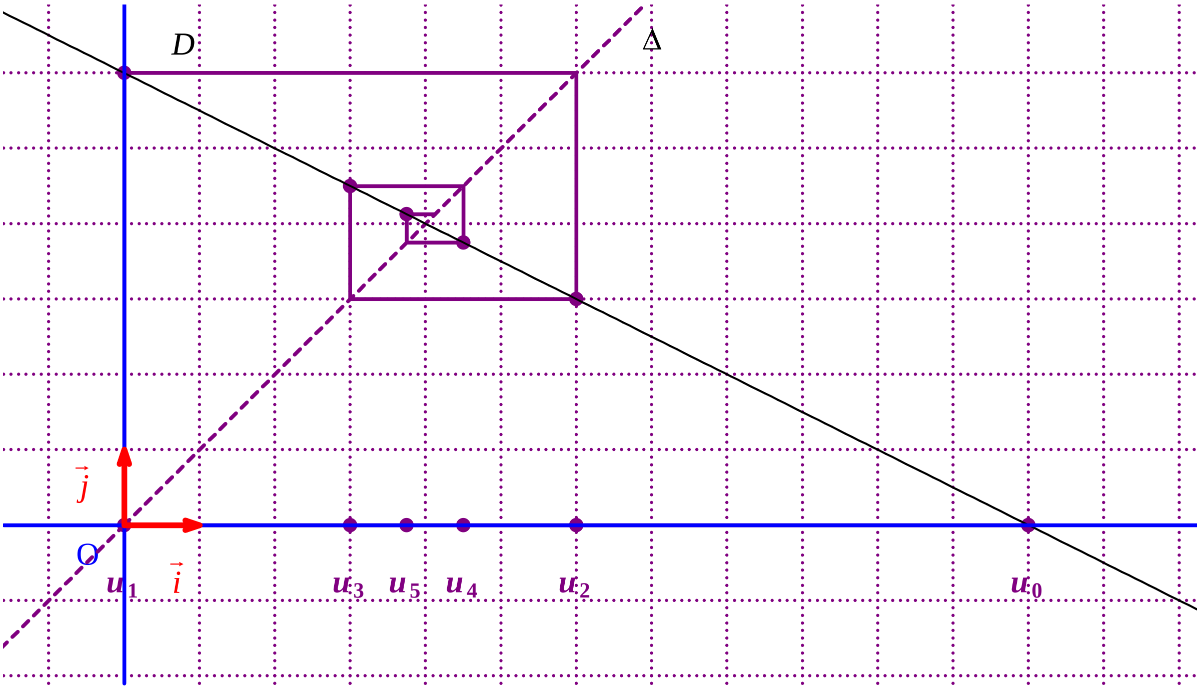
$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 12 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$$

1°) **Construction graphique des premiers termes de la suite**

D a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

Δ a pour équation $y = x$.

On effectue la construction classique des termes de la suite (u_n) en utilisant les deux droites (construction itérative).



On peut remarquer que $u_1 = 0$ ce qui se retrouve aisément par le calcul.

On peut aussi observer que toutes les valeurs de u_n se concentrent autour de 4 (« point de convergence » de coordonnées (4 ; 4)).

2°) **Algorithmes**

Les algorithmes qui répondent à la question sont les **algorithmes a et b**.

L'algorithme c est faux.
En effet, dans l'algorithme c, le dernier passage dans la boucle s'effectue pour $i = n$.
La variable *i* prend alors la valeur $n+1$ et l'algorithme affiche en sortie u_{n+1}.

On aurait éventuellement pu programmer ces algorithmes sur calculatrice (mais cela n'était pas demandé et pouvait faire perdre du temps).

3°) **Expression explicite du terme général**

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - 4$

a) **Exprimons v_{n+1} en fonction en fonction de v_n.**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 2 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 4) \\ &= -\frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \boldsymbol{v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n}$

Déduisons-en la nature de la suite (v_n).

D'après le calcul précédent, la suite (v_n) est une **suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$**.

Calculons v_0 (premier terme).

$v_0 = u_0 - 4 = 12 - 4 = 8$

b)

• **Exprimons v_n en fonction de n.**

D'après la formule donnant l'expression explicite du terme général d'une suite géométrique,

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ v_n = v_0 \times q^n$

$$\boldsymbol{v_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

• **Exprimons u_n en fonction de n.**

$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ u_n = v_n + 4$

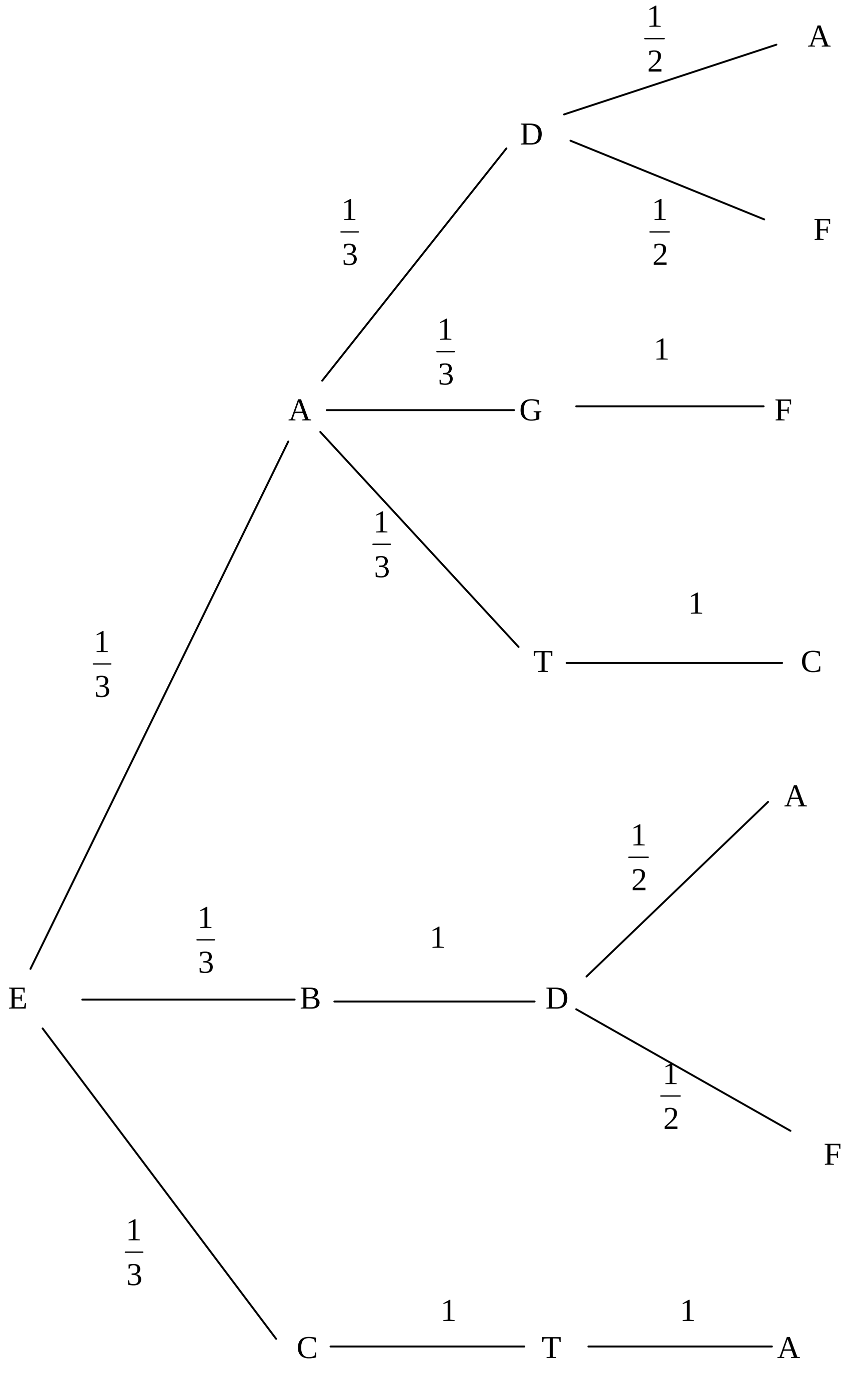
Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \boldsymbol{u_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$

IV.

1°)

Arbre pondéré des trajets possibles : on le fait horizontalement ou verticalement

Dans les différentes questions, on mettra une phrase réponse pour donner les résultats.



a $P\left(\text{EBDF}\right)=\frac{1}{3}\times 1\times \frac{1}{2}$ (on applique le principe multiplicatif)

P(EBDF) = $\frac{1}{6}$

La probabilité du trajet code EBDF est égale à $\frac{1}{6}$.

b) P (« La quatrième salle du trajet est F ») = P(EBDF) + P(EADF) + P(EAGF)

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1$$

$$=\frac{1}{3}$$

P (« La quatrième salle du trajet est F ») $=\frac{1}{3}$

La probabilité de l'événement « La quatrième du trajet est F » est égale à $\frac{1}{3}$.

c) P (« Le trajet passe par la salle T ») = P(ECTA) + P(EATC)

$$=\frac{1}{3}\times 1\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1$$

$$=\frac{4}{9}$$

La probabilité de l'événement « Le trajet passe par la salle T » est égale à $\frac{4}{9}$.

L'affirmation du directeur : « Il y a quatre chances sur neuf que le trajet passe par la salle T » est donc justifiée.

2°)

a) On est dans la situation d'un schéma de Bernoulli.

X suit donc la **loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{4}{9}$**.

b) P (« un seul visiteur passe par la salle T ») = P (X = 1)

= 0,022406031… (d'après la calculatrice)

P (« un seul visiteur passe par la salle T ») ≈ 0,022 (valeur arrondie au millième)

La probabilité qu'un seul visiteur passe par la salle T est environ égale à 0,022.

Sur la calculatrice (TI), on tape « binomFdp(10, $\frac{4}{9}$, 1) ».

Remarque :

D'après la formule de la loi binomiale, on a : $P\left(\mathrm{X}=1\right)=\binom{10}{1}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{1}\times\left(1-\frac{4}{9}\right)^{9}$.

Donc $P\left(\mathrm{X}\ =1\right)=10\times\frac{4}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{9}$ (car $\binom{10}{1}=10$).

Cela nécessiterait un peu plus de calculs. Inutile de se compliquer la vie, autant utiliser directement la calculatrice.

c) P (« deux visiteurs au moins passent par la salle T) = P (X $\geqslant$ 2)

= 1 – P (X $\leqslant$1)

***P* (« deux visiteurs au moins passent par la salle T ») ≈ 0,975 (valeur arrondie au millième)**

La probabilité qu'au moins deux visiteurs passent par la salle T est environ égale à 0,975.

Sur la calculatrice, on tape « 1 – binomFrep(10, $\frac{4}{9}$, 1) ».

Remarque :

On pourrait écrire :

P (« deux visiteurs au moins passent par la salle T) = P (X $\geqslant$ 2)

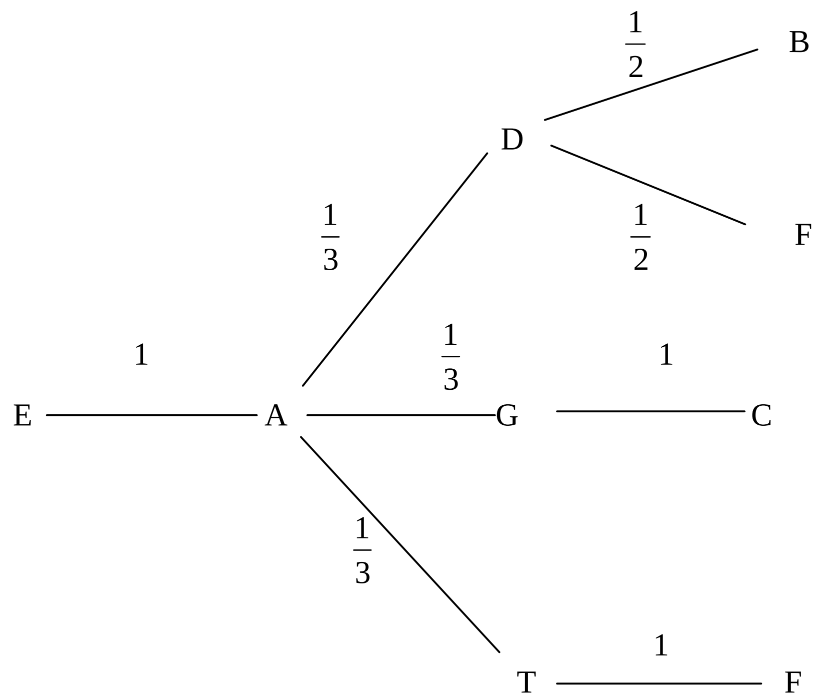
= 1 – P (X < 2)

= 1 – P (X $\leqslant$1)

= 1 – [P (X = 0) – P (X = 1)]

Cela nécessiterait de calculer $P\left(\mathrm{X}=0\right)$ et $P\left(\mathrm{X}=1\right)$. Autant utiliser directement la calculatrice !

d) On fait un nouvel arbre pondéré :



P (« passer par la salle T ») = *P*(EATF)

$$= \frac{1}{3}$$

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.

***P* (« deux visiteurs au moins passent par la salle T) ≈ 0,896 (valeur arrondie au millième)**

Sur la calculatrice, on tape « 1 – binomFrep(10, $\frac{1}{3}$, 1) ».

On constate que cette probabilité est inférieure à celle trouvée dans la question précédente.
Le directeur a donc tort.

V.

1°) **Question de cours : la formule de la médiane**

Soit A et B deux points du plan *P*. On note I le milieu de [AB].

« $\forall$ M $\in$ *P* $\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$ ».

Démonstration :

Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$$

Ainsi :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{IB} + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \bullet (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2$$

Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $IA^2 = IB^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$

D'où finalement : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

2°) a) **Démontrons que : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2$.**

On commence par appliquer la formule de la médiane dans les triangles ABC et ACD.

I est le milieu de [AC] d'où $BA^2 + BC^2 = 2BI^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ et $DA^2 + DC^2 = 2DI^2 + \dfrac{AC^2}{2}$

On en déduit que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + 2\left(BI^2 + DI^2\right)$.

Il reste à démontrer $2\left(BI^2 + DI^2\right) = 4IJ^2 + BD^2$.

Pour cela appliquons le théorème de la médiane dans le triangle IBD.

J est le milieu de [DB] d'où $IB^2 + ID^2 = 2IJ^2 + \dfrac{DB^2}{2}$.

En multipliant par 2 les deux membres de cette égalité, on obtient : $2\left(IB^2 + ID^2\right) = 4IJ^2 + DB^2$.

Ainsi : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + 2(BI^2 + DI^2) = AC^2 + 4IJ^2 + DB^2 = 4IJ^2 + AC^2 + BD^2$

b) Le mathématicien Euler affirmait : « La somme des carrés des longueurs des côtés d'un quadrilatère quelconque est supérieure ou égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales ».

En effet, on a : $4IJ^2 \geqslant 0$ d'où $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \geqslant AC^2 + BD^2$.

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 \Leftrightarrow IJ^2 = 0$
$\Leftrightarrow IJ = 0$
$\Leftrightarrow$ I et J sont confondus
$\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité est que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

VI.

$A\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P(– 1 ; 0)

$\mathcal{C}$: cercle de centre O et de rayon 1

H : projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses et $\mathcal{C}\,'$

$\mathcal{C}\,'$: cercle de centre P passant par H

D : parallèle à (OA) passant par P

$D \cap \mathcal{C}\,' = \{B\ ;\ B'\}$ (B situé du même côté que A par rapport à l'axe des abscisses)

1°) **Conjecture :**

La conjecture porte sur la position de la droite (AB) par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$.

D'après le graphique, il semble que la droite (AB) soit tangente aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$.

Ou

D'après le graphique, on peut conjecturer que la droite (AB) est tangente aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$.

Ou

Le graphique laisse penser que la droite (AB) est tangente aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$.

Quelques remarques :

① Lorsque l'on exprime une conjecture, on doit employer le vocabulaire le plus précis possible. Ici, il faut employer le mot « tangente ».

② On peut dire que la droite (AB) est une tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$.
On emploie le mot « une » car on ne sait pas s'il n'y en a qu'une ; il peut y en avoir une autre.

③ Attention aux petits mots :
On dit qu'une droite est tangente **à** un cercle.
La droite (AB) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A (on ne dit pas « La droite (AB) est une tangente du cercle $\mathcal{C}$ »).

Mauvaises formulations :

« La droite (AB) est la tangente à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$. »

2°) **Vérifions que A et P appartiennent à $\mathcal{C}$.**

$$\text{OA} = \sqrt{\left(x_\text{A}-x_\text{O}\right)^2+\left(y_\text{A}-y_\text{O}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

Donc $\text{A} \in \mathcal{C}$.

$$\text{OP} = \sqrt{\left(x_\text{P}-x_\text{O}\right)^2+\left(y_\text{P}-y_\text{O}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-1\right)^2+0^2}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

Donc $\text{P} \in \mathcal{C}$.

Autre méthode :

$\mathcal{C}$ a pour équation $x^2+y^2=1$.

$$x_\text{A}{}^2+y_\text{A}{}^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$=1$$

Donc $\text{A} \in \mathcal{C}$.

$$x_\text{P}{}^2+y_\text{P}{}^2 = \left(-1\right)^2+\left(0\right)^2$$
$$=1$$

Donc $\text{P} \in \mathcal{C}$.

3°) **Déterminons une équation de la droite *D* parallèle à (OA) passant par P.**

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

$\text{M} \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{PM}}$ et $\overrightarrow{\text{OA}}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -\frac{1}{2} \\ y & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+1\right)+\frac{1}{2}y=0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(x+1\right)+y=0$$

$$\Leftrightarrow y=-\sqrt{3}\left(x+1\right)$$

D a donc pour équation réduite $\boldsymbol{y=-\sqrt{3}\left(x+1\right)}$.

On peut aussi cherche l'équation réduite de *D* de manière classique (recherche du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine).

4°) **Donnons les coordonnées de H puis une équation du cercle $\mathcal{C}$ '.**

H$\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Le cercle $\mathcal{C}$ ' a pour rayon $\frac{1}{2}$.

Donc une équation de $\mathcal{C}$ ' s'écrit : $\boldsymbol{(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}}$.

5°) **Calculons les coordonnées de B.**

Les abscisses des ponts d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* sont solutions de l'équation $(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2(x+1)^2=\frac{1}{4}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)^2=\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow x+1=\frac{1}{4} \text{ ou } x+1=-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4} \text{ ou } x=-\frac{5}{4}$$

Pour $x=-\frac{3}{4}$, l'équation réduite de *D* fournit : $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Pour $x=-\frac{5}{4}$, l'équation réduite de *D* fournit : $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Comme O et A sont situés du même côté par rapport à l''ae des abscisses, on en déduit que $y_B>0$.

Par suite, **B**$\boldsymbol{\left(-\frac{5}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$.

On aurait aussi pu tout développer : on tombe sur une équation du second degré que l'on résout en calculant le discriminant.

6°) **Démontrons la conjecture émise par le calcul.**

On doit démontrer que (OA) ⊥ (AB) et que (BP) ⊥ (AB).

Pour cela, on utilise le produit scalaire.

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} x_A=-\frac{1}{2} \\ y_A=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{BP}\left|\begin{array}{l} x_P-x_B=-1+\frac{5}{4}=\frac{1}{4} \\ y_P-y_B=0-\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4} \\ y_B-y_A=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0$$

On en déduit que (OA) $\perp$ (AB).

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0$$

On en déduit que (BP) $\perp$ (AB).

La conjecture est donc démontrée.

Variante :

On pourrait se contenter de démontrer l'orthogonalité des droites (OA) et (AB) puis utiliser le parallélisme des droites (OA) et (BP).