TS1

Contrôle du vendredi 13 avril 2012 (60 minutes)

Ne rien écrire, ne rien entourer, ne rien surligner sur cet énoncé.
Encadrer en rouge à la règle tous les résultats.

Pour les intégrations par parties, il n'est pas demandé de rédiger ni de détailler.

I. (3 points) Calculer les intégrales suivantes sans aucune rédaction mais en détaillant les calculs :

$$\mathrm{I}=\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{J}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-5} \qquad \mathrm{K}=\int_{-\sqrt{5}}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x.$$

II. (2 point) On pose $\mathrm{I}=\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

À l'aide de la calculatrice (sans chercher à calculer I), donner la valeur décimale arrondie au millième de I.
Aucune rédaction n'est attendue dans cet exercice.
Écrire :

I ≈ ….. (valeur décimale arrondie au millième)

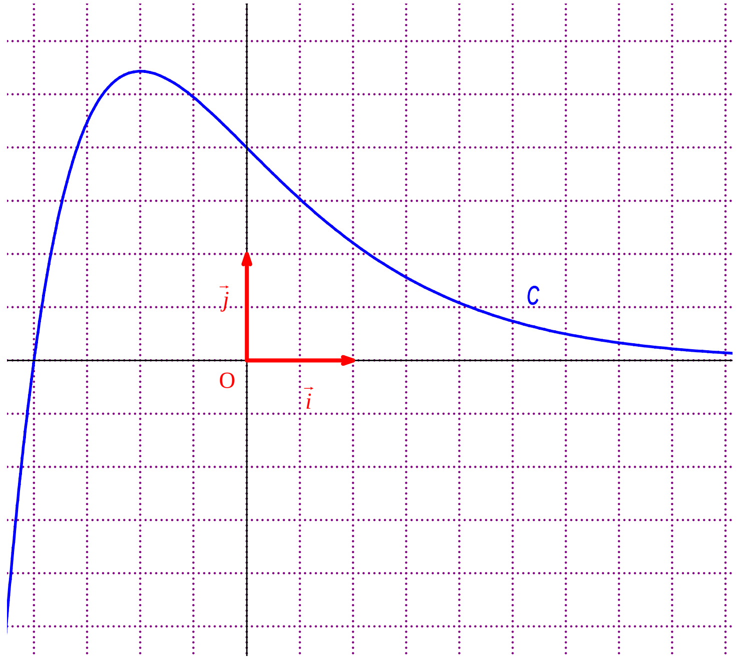
III. (4 points)

1°) On considère la fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée ci-contre.

À l'aide du graphique, donner, sans expliquer, un encadrement de $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux entiers consécutifs.

2°) On admet dans cette question que la fonction f considérée dans la question 1°) est définie par $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Calculer la valeur exacte de $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ (détailler le calcul).

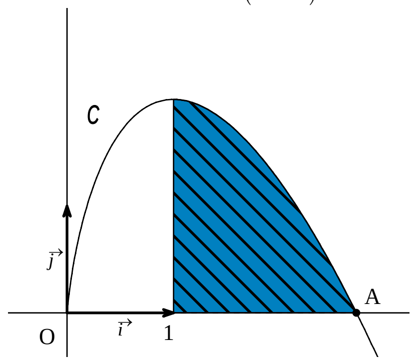


IV. (4 points) On considère la fonction $f : x \mapsto x(1-\ln x)$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

On donne ci-dessous sa représentation graphique $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point A.
Calculer l'abscisse de A.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) du domaine hachuré.



V. (4 points) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0\,;5]$ par $f(x)=-3x+2+2\ln(x+1)$.

1°) On considère la fonction g définie sur I par $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$.

a) Démontrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

b) À l'aide de la question précédente, déterminer une primitive F de f sur I.

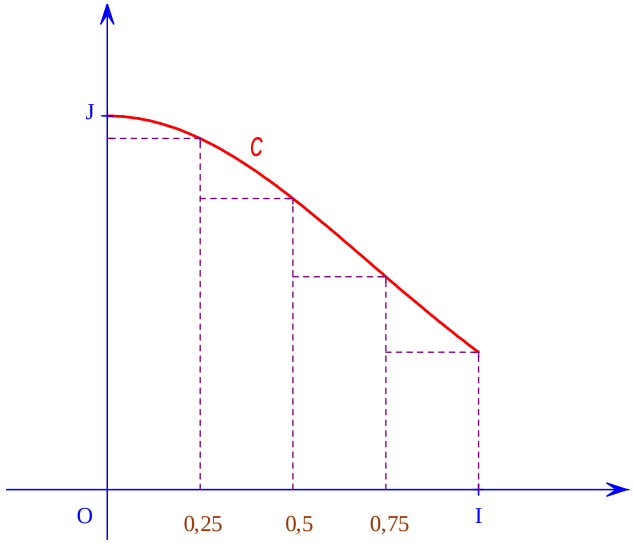
2°) Calculer la valeur moyenne μ de f sur I (valeur exacte).

VI. (3 points) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0\,;1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On admettra que f est strictement décroissante sur l'intervalle I.

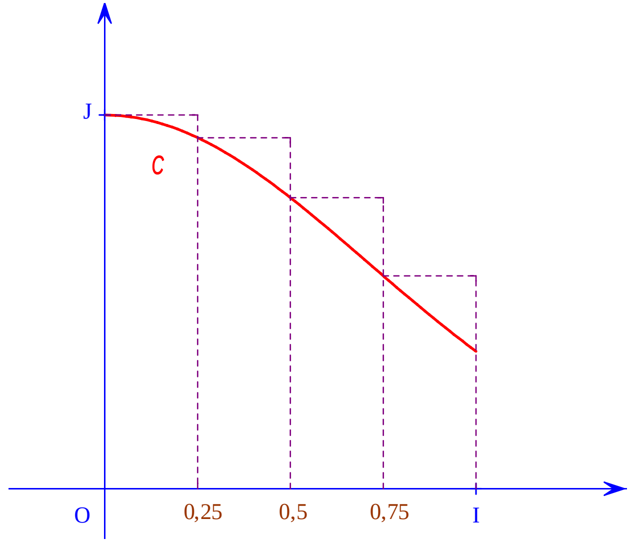
On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
On se propose de déterminer des valeurs approchées de $\mathcal{A}$ en utilisant la méthode des rectangles.

1°) On subdivise l'intervalle I en quatre intervalles de même longueur 0,25.

Graphique 1



Graphique 2



Déterminer la somme des aires des rectangles situés sous de la courbe (figure 1), puis celle des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe (figure 2).
Écrire chaque expression en une seule fois puis donner les troncatures à 9 décimales.
En déduire alors le meilleur encadrement de $\mathcal{A}$ par deux décimaux d'ordre 3.

2°) On veut maintenant subdiviser l'intervalle I en n sous-intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$ (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On considère l'algorithme de calcul ci-dessous qui permet, pour une valeur n donnée, de calculer la somme des aires des rectangles situés sous la courbe, puis celle des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe.

Variables :
n, k : entiers naturels
S, T : réels

Entrée :
Saisir n

Initialisations :
S prend la valeur 0
T prend la valeur 0

Traitement :
Pour k variant de 1 à n **Faire**

S prend la valeur $\mathrm{S}+\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{n^2}}}{n}$

T prend la valeur $\mathrm{T}+$.......

FinPour

Sortie :
Afficher S et T

Lire et comprendre cet algorithme (en réfléchissant à ce que représentent les variables S et T).

Recopier et compléter l'instruction « T prend la valeur $\mathrm{T}+$....... ».

3°) **Bonus :**

Programmer cet algorithme sur calculatrice.

Faire tourner le programme correspondant pour $n=4$ et vérifier les résultats de la question 1°).

Corrigé du contrôle du 13-4-2012

I. Calculs d'intégrales

$$\mathbf{I} = \int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2\ln 3}}{2} - \frac{\mathrm{e}^0}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\ln\left(3^2\right)} - 1}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\ln 9} - 1}{2} \\
&= \frac{9-1}{2} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-5}$$

$\mathrm{J} = \left[\ln|\,x-5\,|\right]_{-4}^{-2}$ (on reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$; la présence de valeur absolue est indispensable dans la primitive sinon on écrira des logarithmes de nombres négatifs)

$$\begin{aligned}
&= \ln|-3| - \ln|-4| \\
&= \ln 3 - \ln 4 \\
&= \ln\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

> La primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|\,u\,|$.

$$\mathbf{K} = \int_{-\sqrt{5}}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$$

$\mathrm{K} = \left[\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{x^2+4}\right]_{-\sqrt{5}}^{0}$ (on reconnaît la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$)

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{0^2+4} - \sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2+4} \\
&= 2-3 \\
&= -1
\end{aligned}$$

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

> La primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

II. Utilisation de la calculatrice

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\mathrm{I} = 1{,}11144797\ldots$

Donc **I ≈ 1,111** (valeur décimale arrondie au millième).

Remarque : L'autre moyen de calculer une intégrale sur calculatrice en utilisant la représentation graphique donne un résultat moins précis (pour avoir une bonne précision il faut avoir une fenêtre graphique la plus précise possible).

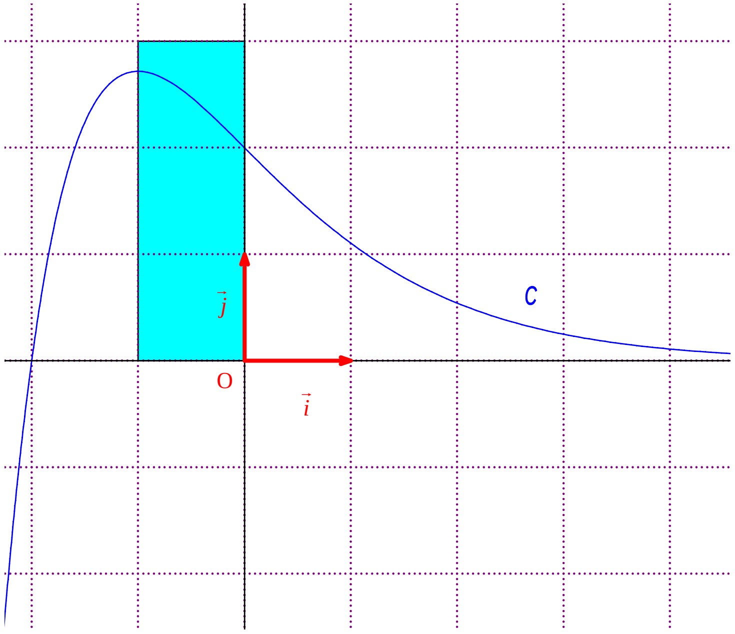
➤ math → 9 : intégfonct(→ taper la fonction : « intégrfonct($f(X)$ »
→ taper la variable (X en général) : « intégrfonct($f(X)$, X »
→ taper l'encadrement : « intégrfonct($f(X)$, X, a, b)

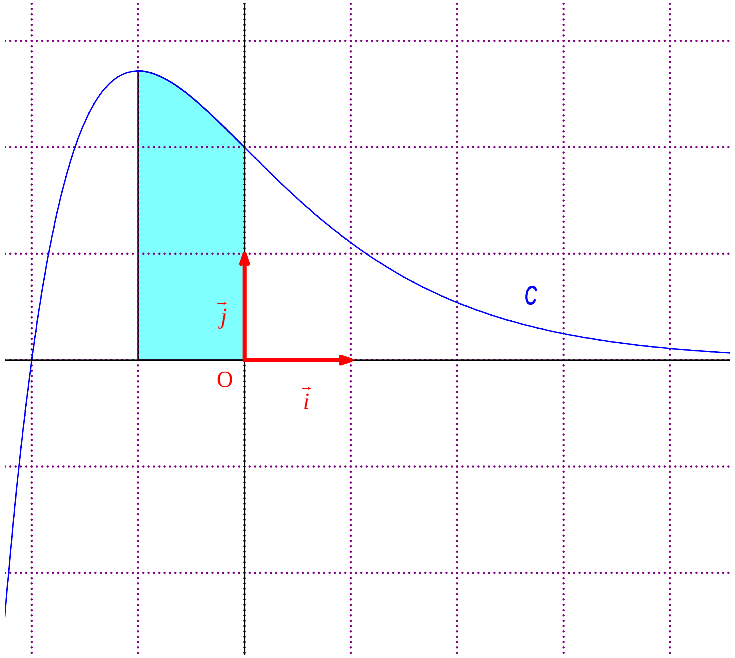
ou alors

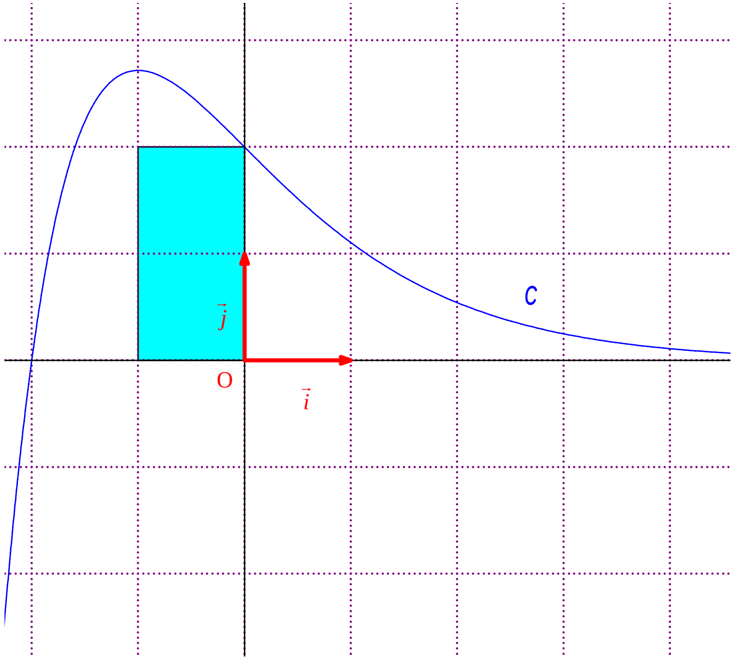
➤ tracer la fonction f → 2nde calc 7 : $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ → mettre bornes inf et sup
→ enter → lire le résultat

III. Aires et intégrales

1°) Comme la fonction f est positive et continue, $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [– 1 ; 0].
On encadre l'aire en observant le graphique de manière à faire apparaître des rectangles.







D'après le graphique, on a : $\mathbf{2 < \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < 3}$.

2°) Calcul de $\mathbf{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+2)e^{-x}\,dx}$

On applique la formule d'intégrations par partie avec :

$u(x) = x+2 \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

(seuls choix possibles)

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[(x+2)\left(-e^{-x}\right)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$= -2+e-\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$= -2+e-(1-e)$$

$$= 2e-3$$

$$\mathbf{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 2e-3}$$

On vérifie le résultat avec la calculatrice.

IV. Aires et intégrales

$f : x \mapsto x(1-\ln x)$ définie sur $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$ (en effet, ln x existe si et seulement si $x>0$)

1°) $\mathcal{C} \cap (\text{O}x) = \{\text{A}\}$

Calculons l'abscisse de A.

On résout l'équation $f(x)=0 \quad (1)$ dans $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x(1-\ln x)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ (impossible car } 0 \in \mathcal{D}\text{) ou } 1-\ln x=0\\ &\Leftrightarrow \ln x = 1\\ &\Leftrightarrow x=\text{e}\end{aligned}$$

A a pour abscisse e (ainsi A(e ; 0)).

2°) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré.

L'aire du domaine hachuré est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [1 ; e].
f est positive et continue sur cet intervalle.

Donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré est égale à $\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = \int_1^{\text{e}} x(1-\ln x)\,\text{d}x\,\text{d}x$

On applique la formule d'intégrations par partie avec :

$u'(x)=x \qquad u(x)=\dfrac{x^2}{2}$

$v'(x)=1-\ln x \qquad v(x)=-\dfrac{1}{x}$ (seuls choix possibles)

$$\begin{aligned}\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_1^{\text{e}} - \int_1^{\text{e}} \frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\text{d}x\\ &= \frac{\text{e}^2}{2}(1-\ln \text{e}) - \frac{1^2}{2}(1-\ln 1) + \frac{1}{2}\int_1^{\text{e}} x\,\text{d}x\\ &= \frac{\text{e}^2}{2}(1-1) - \frac{1^2}{2}(1-0) + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\text{e}}\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\text{e}^2-1}{2}\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\text{e}^2-1}{4}\\ &= \frac{\text{e}^2-3}{4}\end{aligned}$$

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{e}^2-3}{4}$ u.a.

V. Primitive et valeur moyenne

$I = [0\,;5]$

$f(x) = -3x+2+2\ln(x+1)$

1°) g définie sur I par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

a) **Démontrons que *g* est dérivable sur *I* et calculons sa dérivée.**

• Dérivabilité

Les fonctions

$x \mapsto x+1$
$x \mapsto \ln(x+1)$ sont dérivables sur I.
$x \mapsto x$

Donc par produit et différence de fonctions dérivable sur I, on peut dire que g est dérivable sur I.

• Dérivée

$$\begin{aligned}\forall x \in I \quad g'(x) &= 1\times\ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{x+1} - 1\\ &= \ln(x+1)+1-1\\ &= \ln(x+1)\end{aligned}$$

b) **Déterminons une primitive *F* de *f* sur l'intervalle *I*.**

D'après la question précédente, une primitive de f sur l'intervalle I est la fonction F définie par :

$$\begin{aligned}F(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2g(x)\\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2\left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]\\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1)\end{aligned}$$

2°) **Calculons la valeur moyenne μ de *f* sur *I*.**

Par définition, la valeur moyenne d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$ $(a<b)$ est le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\text{d}x$$

$$\mu = \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_0^5 f(x)\ \mathrm{d}x = F(5) - F(0)$$

$$F(5) = -\frac{3}{2}\times 5^2 + 2\times 6\ln 6$$

$$= 12\ln 6 - \frac{75}{2}$$

$$F(0) = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mu = \frac{12}{5}\ln 6 - \frac{15}{2}}$$

$$\mu = \frac{24\ln 6 - 75}{10}$$

VI. Aires et intégrales (valeur approchée par la méthode des rectangles)

1°) Aires des rectangles sous la courbe et au-dessus de la courbe

• Somme des aires des rectangles sous la courbe :

Le premier rectangle a pour aire : $0,25\times f(0,25)$.
Le deuxième rectangle a pour aire : $0,25\times f(0,5)$.
Le troisième rectangle a pour aire : $0,25\times f(0,75)$.
Le quatrième rectangle a pour aire : $0,25\times f(1)$.

On regroupe toutes ces aires dans une même expression.

La somme des aires des rectangles sous la courbe est donc égale à :

$$S = 0,25\times f(0,25) + 0,25\times f(0,5) + 0,25\times f(0,75) + 0,25\times f(1)$$
$$S = 0,25\times\left[f(0,25) + f(0,5) + f(0,75) + f(1)\right]$$

On calculer ensuite en utilisant l'expression de f :

$$S = 0,25\times\left[\mathrm{e}^{-(0,25)^2} + \mathrm{e}^{-(0,5)^2} + \mathrm{e}^{-(0,75)^2} + \mathrm{e}^{-1^2}\right]$$

On calcule ensuite l'expression d'un coup à l'aide de la calculatrice.

$$\boldsymbol{S = 0,663969027\ldots}$$

• Somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe :

Le premier rectangle a pour aire : $0,25\times f(0)$.
Le deuxième rectangle a pour aire : $0,25\times f(0,25)$.
Le troisième rectangle a pour aire : $0,25\times f(0,5)$.
Le quatrième rectangle a pour aire : $0,25\times f(0,75)$.
On regroupe toutes ces aires dans une même expression.

La somme des aires des rectangles sous la courbe est donc égale à :

$$S' = 0,25\times f(0) + 0,25\times f(0,25) + 0,25\times f(0,5) + 0,25\times f(0,75)$$
$$= 0,25\times\left[f(0) + f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)\right]$$

On calcule ensuite en utilisant l'expression de f :

$$S' = 0,25\times\left[\mathrm{e}^{-0^2} + \mathrm{e}^{-(0,25)^2} + \mathrm{e}^{-(0,5)^2} + \mathrm{e}^{-(0,75)^2}\right]$$

On calcule ensuite l'expression d'un coup à l'aide de la calculatrice.

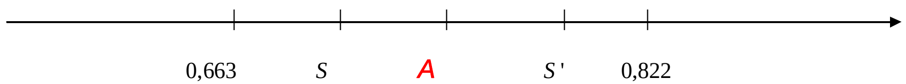
$$\boldsymbol{S' = 0,821999167\ldots}$$

• Meilleur encadrement de $\mathcal{A}$ par deux décimaux d'ordre 3

Donc le meilleur encadrement de $\mathcal{A}$ par des décimaux d'ordre 3 est :

$$\boxed{0,663 < \mathcal{A} < 0,822}$$

On ne procède pas par arrondi ; on réfléchit en faisant un axe horizontal :



L'amplitude de l'encadrement demandé est : $0,822 - 0,663 = 0,159$.

Commentaire :
On se garde d'écrire $S \approx 0,664$ et $S' \approx 0,822$ (valeurs approchées obtenues par arrondi).
En effet, il ne serait alors pas possible d'obtenir l'encadrement cherché.

Complément :

• Pour chaque somme, on peut visualiser l'erreur facilement sur le graphique.

• On peut visualiser l'erreur sur le graphique.

• Il serait intéressant de chercher une valeur approchée de l'intégrale par la méthode des trapèzes (plus précises).

• Avec la calculatrice en utilisant la commande permettant de calculer une intégrale, on obtient :

$\mathcal{A} = 0,746824132\ldots$
Ce résultat est bien en conformité avec l'encadrement déterminé précédemment.

2°) **Algorithme à compléter**

La somme des aires des rectangles situés sous la courbe est égale à $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

La somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe est égale à $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Variables :
n, k : entiers naturels
S, T : réels

Entrée :
Saisir n

Initialisations :
S prend la valeur 0
T prend la valeur 0

Traitement :
Pour k variant de 1 à n **Faire**
S prend la valeur $S+\frac{e^{-\frac{k^2}{n^2}}}{n}$
T prend la valeur $\mathbf{T}+\frac{e^{-\frac{(k-1)^2}{n^2}}}{n}$
FinPour

Sortie :
Afficher S et T

La valeur de la variable S affichée en sortie correspond à la somme des aires des rectangles sous la courbe.

La valeur de la variable T affichée en sortie correspond à la somme des aires des rectangles au-dessus de la courbe.

Explication supplémentaire :

Tous les rectangles ont pour « base » $\frac{1}{n}$.

L'aire du rectangle situé sous la courbe sur l'intervalle $\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]$ est égale à : $\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)=e^{-\frac{k^2}{n^2}}$.

3°) **Bonus**

Programme pour la calculatrice TI :

: Prompt N
: $0 \to$ S
: $0 \to$ T
: For (K,1,N)
: S + ((e ^ (– K^2 / N^2)/N) $\to$ S
: T + ((e ^ (– $(\mathrm{K}-1)^2$ / N^2)/N) $\to$ T
: End
: Disp "S = ", S, "T = ", T   ou   Disp S, " < A < ", T

En faisant tourner le programme pour $n=4$: on obtient 0,664 pour valeur approchée de S et 0,822 pour valeur approchée de T en sortie.
Ces valeurs sont cohérentes avec l'encadrement trouvé de $\mathcal{A}$ obtenu à la question 1°).