Exercices sur la fonction « carré »

1 Recopier et compléter la phrase suivante :

« La courbe représentative de la fonction "carré" est l'ensemble des points M de coordonnées ……………….

……………………………………………………………………………………………………..... ».

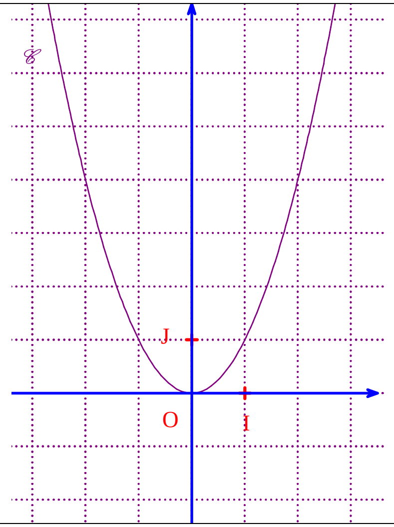
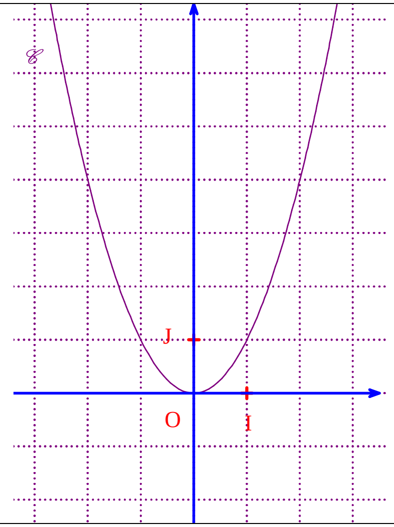
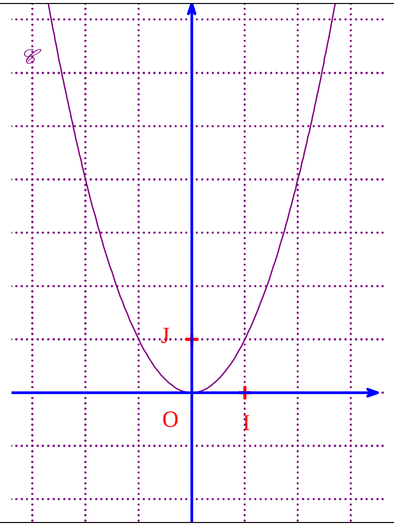
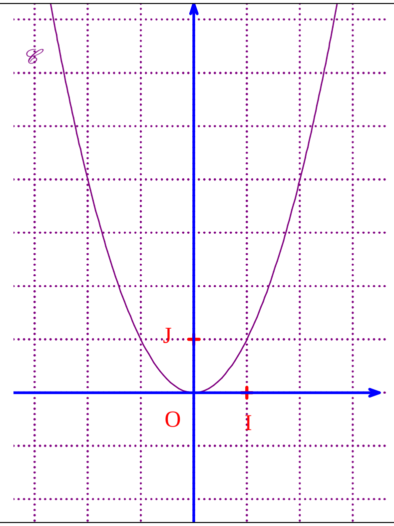
2 On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2 - x$.
On note $\mathscr{C}$ et D leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Faire un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;3]$ avec un pas de 1.
Tracer $\mathscr{C}$ et D sur un même graphique en prenant un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.
Vérifier les tracés en utilisant la calculatrice graphique.
2°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ (1) et l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ (2).
On notera S_1 et S_2 les ensembles de solutions respectifs de l'équation (1) et de l'inéquation (2).
Faire attention aux notations !
Dans chaque cas, commencer par écrire une phrase sur le modèle suivant :
« Les solutions de (1) sont les abscisses des points … »

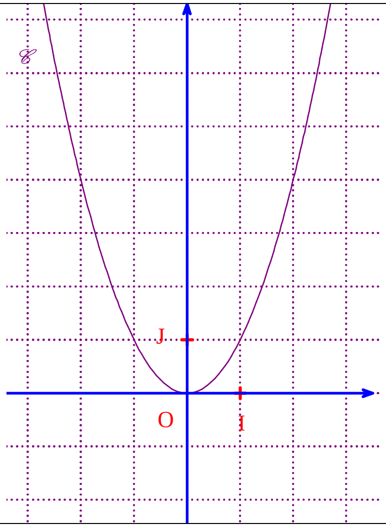
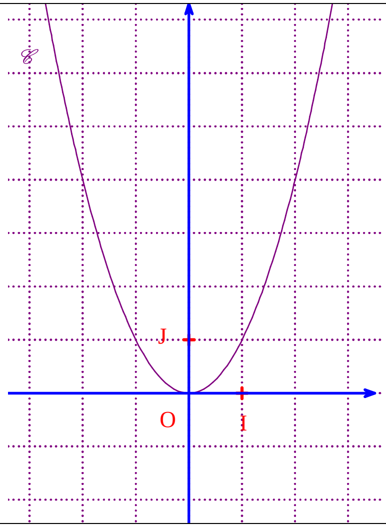
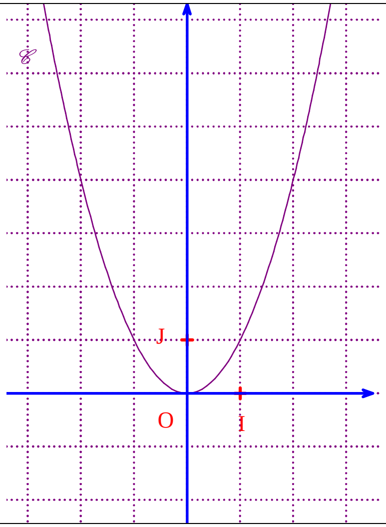
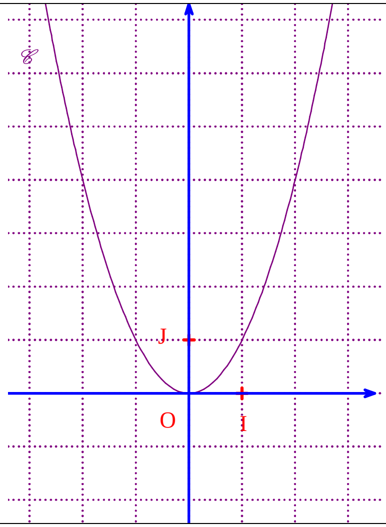
Vérifier la réponse pour l'équation (1) en utilisant l'application de la calculatrice de résolution des équations polynomiales.
3°) Soit h la fonction linéaire dont la représentation graphique D' est parallèle à D.
Tracer D'.
a) Définir h c'est-à-dire donner l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
b) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $f(x) = h(x)$ (3).
On notera S_3 l'ensemble des solutions de (3).

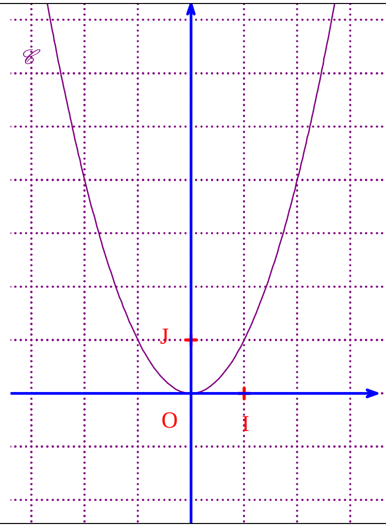
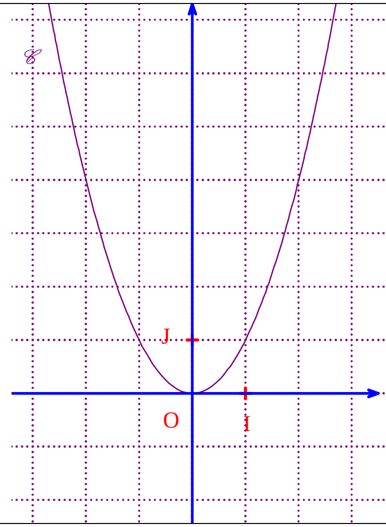
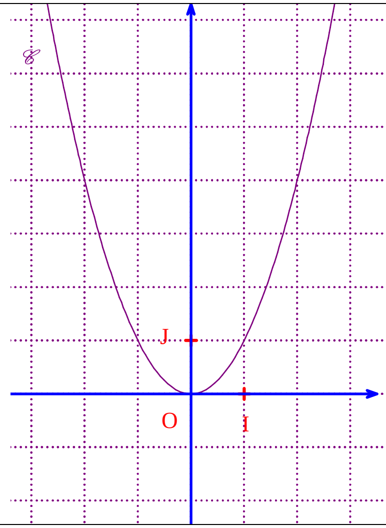
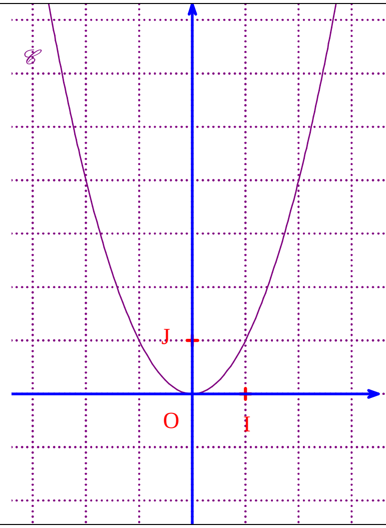
3 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Tracer $\mathscr{C}$ en prenant un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.
2°) Tracer sur le graphique précédent la droite D d'équation $y = x + 2$.
3°) Résoudre graphiquement
a) l'équation $f(x) = x + 2$ (1) ;
b) l'inéquation $f(x) \leqslant x + 2$ (2).

	Traduction	**Ensembles de solutions**
$f(x) = x + 2$ (1)	……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………	$S_1 =$ …………………
$f(x) \leqslant x + 2$ (2)	……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………	$S_2 =$ …………………

4 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Résoudre graphiquement chacune des équations et inéquations données en utilisant les graphiques données ci-après. On laissera apparents sur les graphiques les traits des constructions effectuées.

$x^2 = 4$ (1)	$x^2 = 1$ (2)
	
$S_1 =$ …………………	$S_2 =$ …………………
$x^2 = 0$ (3)	$x^2 = -1$ (4)
	

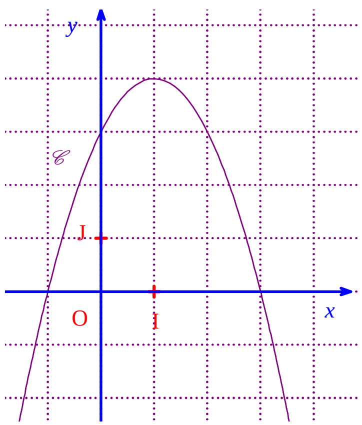
$S_3 =$	$S_4 =$ ....
$x^2 \leqslant 4 \quad (5)$	$x^2 \leqslant 1 \quad (6)$
	
$S_5 =$	$S_6 =$ ....
$x^2 \geqslant 4 \quad (7)$	$x^2 \geqslant 1 \quad (8)$
	
$S_7 =$	$S_8 =$ ....

$x^2 \geqslant 0 \quad (9)$	$x^2 \geqslant -1 \quad (10)$
	
$S_9 =$	$S_{10} =$ ....
$x^2 \leqslant 0 \quad (11)$	$x^2 \leqslant -1 \quad (12)$
	
$S_{11} =$	$S_{12} =$ ....

5 On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x$ et l'on note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : le centimètre ou un « gros » carreau).
1°) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sur un même graphique.
2°) Déterminer les nombres réels dont le carré est strictement inférieur au double :
a) graphiquement b) par le calcul.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : le centimètre ou un « gros » carreau).
1°) Tracer sur un même graphique la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$.
2°) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 + x - 2 > 0$ (1).
3°) a) Développer l'expression $A = (x-1)(x+2)$.
b) Retrouver par le calcul les solutions de (1).
4°) On considère la fonction $g : x \mapsto x^2 + x - 2$.
Sur une calculatrice graphique, faire apparaître sa représentation graphique.
Retrouver grâce à la représentation graphique de g l'ensemble des solutions de (1).

7 On considère les fonctions $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$ et $g : x \mapsto x + 1$ et l'on note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f.
1°) Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique ci-contre.
2°) À l'aide du graphique, dresser le tableau de variations de f.
3°) Démontrer que l'on a : $f(x) = (x+1)(3-x)$.
Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
a) graphiquement b) par le calcul.
4°) Soit x un réel quelconque.
a) Comparer $f(x)$ et $f(1)$.
b) Que peut-on en déduire ?

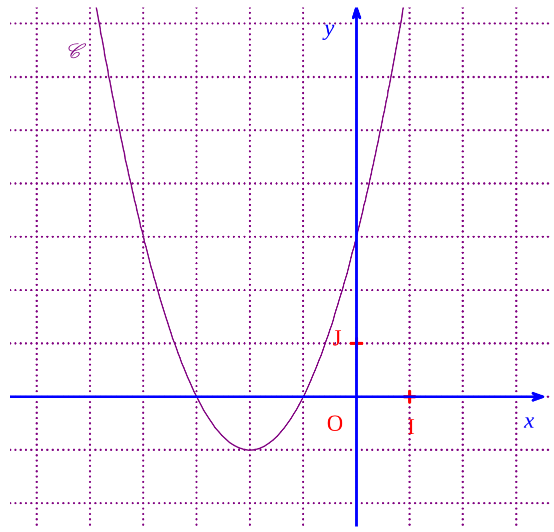


8 L'unité de longueur est le centimètre.
Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 8$ et $AD = 5$. On note I le point de [AD] tel que $AI = 3$. Soit M un point quelconque de [AB]. On pose $AM = x$ ($0 \leqslant x \leqslant 8$).

Partie A
1°) Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ de CIM en fonction de x.
2°) Déterminer pour quelle valeur de x l'aire de CIM mesure cinq seizièmes de l'aire du rectangle ABCD.

Partie B
Dans cette partie, x est quelconque.
1°) Exprimer IM^2, CM^2 et IC^2 en fonction de x.
2°) Développer l'expression $E = (x-4)^2 - 1$.
3°) Déterminer pour quelles valeurs de x le triangle CIM est rectangle en M.
4°) Quelle particularité supplémentaire possède le triangle CIM pour l'une des valeurs trouvées ?
Pour cette valeur, calculer son aire en utilisant la partie A puis retrouver ce résultat directement.

9 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 3$.
On donne ci-dessous sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1°) Compléter le tableau ci-dessous concernant la résolution graphique d'équations et d'inéquations.

Équation ou inéquation	Phrase	Ensemble de solutions
$f(x) = 0$ (1)	....	$S_1 =$ ....
$f(x) > 0$ (2)	....	$S_2 =$ ....
$f(x) = -1$ (3)	....	$S_3 =$ ....
$f(x) = -4$ (4)	....	$S_4 =$ ....
$f(x) \leqslant 3$ (5)	....	$S_5 =$ ....

2°) Retrouver par le calcul les ensembles de solutions de (3) et (5).

$\boxed{10}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+5$.

1°) Développer $f(x)$.

2°) Calculer l'image de $3-\sqrt{3}$ par f.
3°) Déterminer les antécédents éventuels de – 3 par f.
4°) Démontrer que 5 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

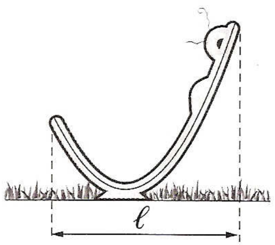
5°) Remplir le tableau de valeurs ci-dessous et tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur l'intervalle [0 ; 6] dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (prendre le centimètre pour unité graphique).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$													

$\boxed{11}$ On note f la fonction « carré ».
Calculer l'image de $1-\sqrt{2}$ par la fonction f.

$\boxed{12}$ La sculpture ci-dessous construite à l'aide de la courbe représentative de la fonction « carré » est haute de 5 m d'un côté et de 3 m de l'autre.

Calculer la valeur décimale approchée par excès au cm de sa largeur ℓ.



$\boxed{13}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$.

1°) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (prendre le centimètre pour unité graphique).
2°) On note D la droite d'équation $x-2y+2=0$.
a) Tracer D sur le graphique précédent.
b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.
c) Retrouver par le calcul le résultat de la question b).

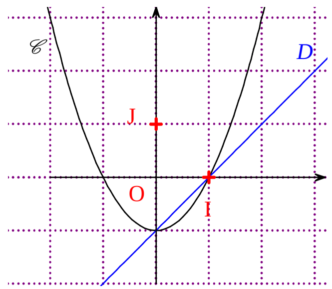
$\boxed{14}$ Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle [– 5 ; 5].

Donner le meilleur encadrement possible de $(x+3)^2$.

$\boxed{15}$ Soit x un réel quelconque appartenant à l'intervalle [– 3 ; 2].

Donner le meilleur encadrement possible de x^2, $(x+3)^2$ et de $(x-1)^2$.

$\boxed{16}$ La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2-1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1°) Résoudre l'inéquation $f(x)>0$ (1)
a) graphiquement b) par le calcul.

2°) Déterminer la fonction affine g qui est représentée graphiquement par la droite D.

3°) Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$ (2)
a) graphiquement b) par le calcul.

On notera S_1 et S_2 les ensembles de solutions respectifs de (1) et (2).

$\boxed{17}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2+2$.

1°) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.
Recopier et compléter la phrase :
« On peut conjecturer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ égal à ……….. ; il est obtenu pour $x=$……. ».

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture par le calcul.
a) Calculer $f(1)$.
b) Soit x un réel quelconque.
Comparer par différence $f(x)$ et $f(1)$.
c) Conclure.

$\boxed{18}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 5-2x^2$.

1°) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.

Recopier et compléter la phrase :

« On peut conjecturer que

f est ………………… sur l'intervalle]– ∞ ; 0] et ………………… sur l'intervalle [0 ; + ∞[. »

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture.

• Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques de l'intervalle [0 ; + ∞ [tels que $x_1 \leqslant x_2$.
On veut comparer $f(x_1)=5-2(x_1)^2$ et $f(x_2)=5-2(x_2)^2$ en procédant par étapes.
Recopier et compléter :

On a : $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$

$(x_1)^2$ .... $(x_2)^2$ car la fonction « carré » est .... sur [0 ; + ∞[

$\times(-2) \qquad (-2<0)$

$-2(x_1)^2$ .... $-2(x_2)^2$

$5-2(x_1)^2$ .... $5-2(x_2)^2$

$f(x_1)$ .... $f(x_2)$

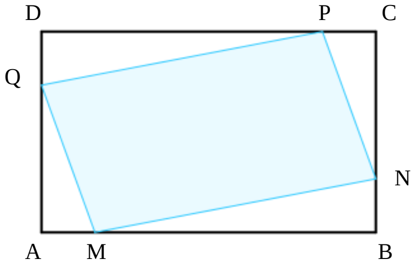
Conclure.

• Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques de l'intervalle]– ∞ ; 0] tels que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$.
Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en commençant par $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$.
Conclure.

3°) Faire le tableau de variations de f sur ℝ.
Calculer la valeur du maximum.

$\boxed{19}$ Soit ABCD un rectangle de dimensions $AB = 5$ et $AD = 3$ (unité de longueur : le centimètre).

Pour tout réel x de [0 ; 3], on place les points M, N, P et Q sur les côtés du rectangle tels que $AM = BN = CP = DQ = x$.



On s'intéresse à l'aire $f(x)$ du polygone MNPQ en fonction de x (on peut en fait démontrer que MNPQ est un parallélogramme).

1°) Exprimer MB et NC en fonction de x. En déduire que $f(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

2°) Démontrer que pour tout x de [0 ; 3], on a : $f(x) = 2(x-2)^2 + 7$.

3°) Le but de cette question est d'étudier le sens de variation de la fonction f sur [0 ; 3].

a) Recopier la démonstration ci-après ; on complétera à chaque ligne les inégalités obtenues et on les justifiera.

Si $2 \leqslant a < b \leqslant 3$

alors $0 \leqslant a-2 < b-2$

d'où $0 \ldots (a-2)^2 \ldots (b-2)^2$ car ....

puis $0 \ldots 2(a-2)^2 \ldots 2(b-2)^2$ car ....

et enfin $7 \ldots 2(a-2)^2 + 7 \ldots 2(b-2)^2 + 7$ car ....

Pour tous réels a et b de l'intervalle [… ; …] tels que $a < b$, on a donc $f(a) \ldots f(b)$.

b) Quel est le sens de variation de la fonction f sur [2, 3] ?

c) Reprendre la même démonstration en supposant cette fois-ci que $0 \leqslant a < b \leqslant 2$.
Quel est le sens de variation de f sur [0 ; 2] ?

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0 ; 3].

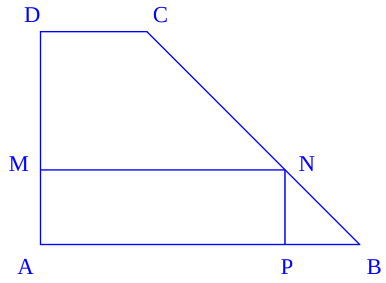
4°) Pour quelle valeur de x l'aire du polygone MNPQ est-elle minimale ? La calculer.

5°) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 0,5 cm en ordonnée).

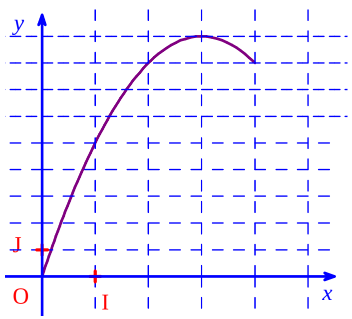
$\boxed{20}$ Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 2$ et $AD = 1$. À tout réel $x > 0$, on associe le point M tel que les points A, B, M soient alignés dans cet ordre avec $BM = x$. La droite (CM) coupe (AD) en un point N.
Le but de l'exercice est de déterminer une position de M tel que $DN = AM$.
Faire une figure.

1°) Exprimer DN en fonction de x.
2°) Traduire le problème à l'aide d'une équation.
3°) a) Démontrer que $x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$.
b) Résoudre l'équation obtenue au 2°) et conclure.

$\boxed{21}$ Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 6$, $CD = 2$ et $AD = 4$.
Soit M un point quelconque du segment [AD]. On pose $AM = x$.
On construit le rectangle AMNP inscrit dans ABCD comme sur la figure.



1°) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Démontrer que le triangle BCH est isocèle rectangle.
En déduire que le triangle BPN est isocèle rectangle, puis que $AM = BP = x$.
2°) À quel intervalle *E* appartient *x* ?
3°) Démontrer que l'on a : $\mathscr{A}_{\text{AMNP}} = 6x - x^2$.
4°) Démontrer que l'on a : $\mathscr{A}_{\text{CMB}} = 12 - 2x$.
5°) On donne ci-dessous la courbe d'équation $y = 6x - x^2$, pour *x* décrivant l'intervalle *E*, dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).



a) Reproduire la courbe et tracer sur le même graphique la représentation graphique *D* de la fonction $x \mapsto 12 - 2x$ pour *x* élément de *E*.
b) Lire sur le graphique les coordonnées du point K, intersection des deux courbes. Quels renseignements les coordonnées de ce point donnent-elles à propos des aires de CMB et de AMNP ?
6°) On se propose de déterminer par le calcul la valeur de *x* pour laquelle les aires de AMNP et de CMB sont égales.
a) Développer l'expression $h(x) = (x-4)^2 - 4$.
b) Écrire l'équation permettant de calculer *x* pour que les deux aires soient égales.
c) À l'aide de la réponse obtenue à la question a), résoudre cette équation et conclure.

$\boxed{22}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Étudier les variations de *f* sur $[-3\ ;+\infty[$.
2°) Étudier les variations de *f* sur $]-\infty\ ;-3]$.
3°) Dresser le tableau de variation de *f*.
4°) Tracer $\mathscr{C}$.
5°) Représenter sur le graphique les solutions de $f(x) \leqslant 4$ et $f(x) > 6$, puis résoudre algébriquement ces inéquations.

$\boxed{23}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 3$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a $f(x) = (x+2)^2 - 1$.
2°) Étudier les variations de *f* sur $[-2\ ;+\infty[$.
3°) Étudier les variations de *f* sur $]-\infty\ ;-2]$.
4°) Dresser le tableau de variations de *f*.
5°) Tracer $\mathscr{C}$.
6°) Représenter sur le graphique les solutions de $f(x) = 3$ et $f(x) = 5$, puis résoudre algébriquement ces équations.

$\boxed{24}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$.
2°) Étudier les variations de *f* sur $\left[\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.
3°) Étudier les variations de *f* sur $\left]-\infty\ ;\frac{1}{2}\right]$.
4°) Dresser le tableau de variation de *f*.
5°) Tracer $\mathscr{C}$.
6°) Résoudre les équations et l'inéquation suivante puis contrôler les résultats graphiquement.
a) $f(x) = -1$ b) $f(x) = 1$ c) $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

$\boxed{25}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$.
2°) Étudier les variations de *f* sur $[2\ ;+\infty[$.
3°) Étudier les variations de *f* sur $]-\infty\ ;2]$.
4°) Dresser le tableau de variation de *f*.
5°) Tracer $\mathscr{C}$.
6°) Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique, les solutions des inéquations $f(x) \leqslant 1$ et $f(x) > 4$, puis résoudre ces inéquations par le calcul.

26 Soit f la fonction définie sur l'intervalle [– 4 ; 4] par $f(x)=\frac{1}{4}x^2-1$.

1°) Établir le sens de variations de f sur [– 4 ; 0], puis sur [0 ; 4].
Dresser le tableau de variations de f sur [– 4 ; 4].
2°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Tracer $\mathscr{C}$.
3°) Résoudre graphiquement puis algébriquement :
a) $f(x)=\frac{5}{4}$ (1) ; b) $f(x)\geqslant 0$ (2) ; c) $f(x)\leqslant\frac{5}{4}$ (3) ; d) $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{5}{4}$ (4).

27 À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que chacune des affirmations suivantes est fausse.

① Deux nombres et leurs carrés sont toujours rangés dans le même ordre.

② Pour tous les réels x on a $x^2=-x^2$.

③ Si $x\leqslant 5$, alors $x^2\leqslant 25$.

④ Un réel est toujours inférieur à son carré.

28 **Vrai ou faux ? Justifier.**

① Si $a\leqslant b$, alors $a^2\leqslant b^2$.

② Si $a\leqslant b\leqslant 0$, alors $b^2\leqslant a^2$.

③ Si $a^2=b^2$, alors $a=b$.

④ Pour tout réel a, $a^2\leqslant a-1$. (On pourra proposer une justification graphique.)

29 On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction « carré » dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Tracer $\mathscr{C}$ en prenant le centimètre pour unité graphique.
2°) Hachurer l'ensemble E des points $\text{M}(x\,;y)$ tels que l'on ait $y\geqslant x^2$.

30 Pour une unité choisie, [AB] est un segment tel que $\text{AB}=11$ et M est un point de ce segment. Du même côté de la droite (AB), on construit deux carrés, l'un de côté AM et l'autre de côté BM.
On pose $\text{AM}=x$, avec $0<x<11$.

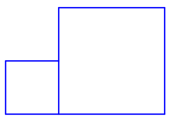


Fig. originale : carrés colorés.

1°) a) Calculer, en fonction de x, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ de ces deux carrés.
b) Démontrer que $\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2=2x^2-22x+121$.
2°) On cherche à déterminer x pour que la somme de ces aires soit égale à 73.
Démontrer que l'on doit alors résoudre l'équation (E) : $x^2=11x-24$, avec $0<x<11$.
3°) Le but de cette question est de résoudre graphiquement l'équation (E).
On note D l'intervalle [0 ; 11].
a) Dans un même repère orthogonal (O, I, J) tel que l'unité est 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,1 cm sur l'axe des ordonnées, tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur D par $f(x)=x^2$ et celle de la fonction g définie sur D par $g(x)=11x-24$.
b) Ces deux courbes se coupent-elles ? Si oui, en combien de points ?
Expliquer pourquoi les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation (E).
Lire graphiquement ces abscisses.
4°) Démontrer que l'équation (E) équivaut à : $(x-3)(x-8)=0$, avec $0<x<11$.
Résoudre (E).
5°) Conclure.

31 La trajectoire d'une balle de jeu est donnée par $g(x)=-5x^2+10x+15$, où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air, exprimé en secondes, avec $x\in[0\,;3]$, et $g(x)$ est la hauteur de la balle au-dessus du sol, exprimée en mètres.
1°) Dresser le tableau de valeurs de g sur [0 ; 3] en choisissant un pas de 0,2.
2°) Représenter cette fonction dans un repère orthogonal (unités : 4 cm pour 1 s en abscisses ; 2 cm pour 5 m en ordonnées).
3°) a) D'après la représentation graphique, quelle hauteur maximale semble atteindre la balle ?
b) Déterminer graphiquement les instants où la hauteur est égale à 15 m.
c) Résoudre graphiquement l'équation $g(x)=18$. En donner une interprétation concrète.
4°) a) Retrouver, par le calcul, le résultat de la question 3°) b).
b) Démontrer que $g(x)=-5(x-1)^2+20$. Retrouver le résultat de la question 3°) a).
c) Démontrer que l'équation $g(x)=18$ équivaut à $(x-1)^2-\frac{2}{5}=0$, pour $x\in[0\,;3]$.
Résoudre algébriquement l'équation $g(x)=18$. Retrouver ainsi le résultat de la question 3°) c).

32 Représenter graphiquement la fonction carré sur l'intervalle [0 ; 1] dans un repère orthonormé (O, I, J) pour lequel l'unité graphique est égale à 10 cm.
Remplier un tableau de valeurs de 0 à 1 avec un pas de 0,1.

33 Calculer sans utiliser la calculatrice les images par la fonction « carré » de $\frac{11}{4}$; $-\frac{13}{5}$; $-\frac{15}{7}$.

Modèle :

On note f la fonction « carré ».

On écrit cette phrase une fois pour toutes au début de l'exercice.

$f\left(\frac{11}{4}\right)=\left(\frac{11}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$ (C'est juste ça le résultat)

34 Calculer sans utiliser la calculatrice les images par la fonction « carré » de $2+\sqrt{5}$; $\sqrt{7}-\sqrt{6}$; $3-\sqrt{2}$; $1-2\sqrt{2}$.

$\boxed{35}$ Calculer sans utiliser la calculatrice les images par la fonction « carré » de $\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{5}$; 10^3 ; 10^{-4} ; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{7,25}$; $-3\sqrt{2}$.

$\boxed{36}$ La proposition : « Si $x<1$, alors $x^2<1$ » est fausse.
Indiquer parmi les valeurs de x suivantes celles qui fournissent un contre-exemple :
0 ; 1 ; – 1 ; – 3 ; $\frac{1}{2}$; – 2 ; $-\sqrt{3}$. On ne demande pas de justifier.

$\boxed{37}$ On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Sur un graphique, placer le repère en prenant 1 cm ou 1 « gros » carreau » pour unité graphique.
1°) Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction « carré » et la droite D d'équation $y=x+1$.
2°) Écrire une équation dont les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.
Résoudre cette équation grâce à l'application de résolution des équations polynomiales de la calculatrice ou l'application « photomaths ».
En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.

$\boxed{38}$ Citer la propriété de la fonction « carré » qui permet d'affirmer sans calcul que :
a) $5,15 \leqslant 5,825$ donc $5,15^2 \leqslant 5,825^2$.
b) $-3,52 \leqslant -3,07$ donc $(-3,52)^2 \geqslant (-3,07)^2$.

$\boxed{39}$ Recopier puis compéter les pointillés par $\leqslant$ ou $\geqslant$ et le cadre par la propriété de la fonction « carré » utilisée.
a) 6,314 … 8,7 donc $6,314^2 \ldots 8,7^2$ car la fonction « carré » est …………..
b) – 10,5… – 8,72 donc $(-10,5)^2$ …(-8,72)2 car la fonction « carré » est ……………

$\boxed{40}$ Dans chaque cas, comparer les nombres sans les calculer.
a. $5,314^2$ et $5,8^2$; b. $(-5,3)^2$ et $(-5,87)^2$; c. $(1-\pi)^2$ et $(-2,5)^2$; d. $(10^3)^2$ et $(10^4)^2$.

$\boxed{41}$ Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer.
a) $2,3^2$ et $2,15^2$; b) $(-1,002)^2$ et $(-0,999)^2$.

$\boxed{42}$ Résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 5$ en s'aidant de la courbe de la fonction « carré ».

Corrigé

$\boxed{2}$

1°) g est une fonction affine donc elle est représentée graphiquement par une droite (d'où la notation D !).

x	0	4
$g(x)$	2	– 2

On place les points de coordonnées (0 ; 2) et (4 ; – 2).

On trace la droite joignant ces deux points.

2°)

● Les solutions de l'équation (1) sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.
Graphiquement, on obtient $S_1=\{-2\,;1\}$.

● Les solutions de l'inéquation (2) sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés en dessous ou sur D.
Graphiquement, on obtient $S_2=[-2\,;1]$.

3°) a) Comme h est une fonction linéaire, sa représentation graphique D' est une droite passant par l'origine du repère.
Comme D' // D, D' a le même coefficient directeur que D c'est-à-dire – 1.
On en déduit que l'expression de h est donnée par $h(x)=-x$.
b) Les solutions de l'équation (3) sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D'.
Graphiquement, on obtient $S_3=\{-1\,;0\}$.

L'équation (3) s'écrit $-x=x^2$.
Elle est successivement équivalente à :
$x^2+x=0$
$x(x+1)=0$
$x=0$ ou $x=-1$
On retrouve $S_3=\{-1\,;0\}$.

$\boxed{3}$

3°) a) Les solutions de l'équation (1) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D.
Graphiquement, on trouve $S_1=\{-1\,;2\}$.

b) Les solutions de l'inéquation (2) sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui sont situés au-dessous de ou sur la droite D.
Graphiquement, on trouve $S_2=[-1\,;2]$.

$\boxed{5}$ 1°)

2°) Déterminons les réels dont le carré est strictement inférieur au double.

On cherche les réels x tels que $x^2 < 2x$ c'est-à-dire $f(x) < g(x)$ (retranscrire avec f et g).

a) Graphiquement :

On cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui sont situés strictement en dessous de la droite D.

Graphiquement, les réels cherchés sont tous les nombres de l'intervalle]0 ; 2[.

b) L'inéquation $x^2 < 2x$ est successivement équivalente aux inéquations suivantes :

$x^2 - 2x < 0$
$x(x-2) < 0$

On dresse un tableau de signes.

$x = 0$ $\quad$ $x - 2 = 0$
$\quad x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
SGN de x		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On retrouve l'intervalle $]0\,;2[$.

$\boxed{6}$

2°) L'inéquation $x^2 + x - 2 > 0$ est équivalente à $x^2 > -x + 2$ c'est-à-dire $f(x) > -x + 2$.
Or $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f et D a pour équation $y = -x + 2$.
Les solutions de (1) sont donc les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés strictement au-dessus de D.
$S =]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$.
3°) a) $A = x^2 + x - 2$
b) D'après le résultat de la question précédente, l'inéquation s'écrit $A > 0$ soit $(x+2)(x-1) > 0$.
On résout l'inéquation grâce un tableau de signes.
4°) L'inéquation (1) s'écrit $g(x) > 0$.
Les solutions de (1) sont donc les abscisses des points de la représentation graphique de g situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses.
On retrouve $S =]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$.

$\boxed{8}$ **Partie A**

1°) $\mathscr{A} = 40 - \dfrac{(8-x)\times 5}{2} - 8 - \dfrac{3x}{2}$
$\quad = 40 - 20 + \dfrac{5x}{2} - 8 - \dfrac{3x}{2}$

$\mathscr{A} = 12 + x$

2°) $12 + x = 12{,}5$
$x = 0{,}5$

Partie B

1°) $\mathrm{IM}^2 = x^2 + 9 \quad \mathrm{CM}^2 = x^2 - 16x + 89$; $\mathrm{IC}^2 = 68$.

2°) $\mathrm{E} = x^2 - 8x + 15$

3°)
$x^2 + 9 + x^2 - 16x + 89 = 68$
$2x^2 - 16x + 98 = 68$
$2x^2 - 16x + 30 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
$(x-4)^2 - 1 = 0$
$(x-3)(x-5) = 0$
$x = 3$ ou $x = 5$

Pour $x = 5$, CIM est rectangle en également isocèle en M (car $\mathrm{IM}^2 = 34$ et $\mathrm{CM}^2 = 34$).
Du coup, pour $x = 5$, le triangle CIM est rectangle isocèle en M.
Dans ce cas, l'aire de CIM est égale à 17 cm^2.

Pour $x = 3$, le triangle CIM n'a aucune propriété particulière hormis le fait qu'il est rectangle. Donc on ne dit rien de plus sur ce cas.

$\boxed{9}$ 1°) Tableau

Équation ou inéquation	**Ensembles de solutions**
$f(x) = 0$ (1)	$S_1 = \{-3, -1\}$
$f(x) > 0$ (2)	$S_2 =]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$
$f(x) = -1$ (3)	$S_3 = \{-2\}$
$f(x) = -4$ (4)	$S_4 = \varnothing$
$f(x) \leqslant 3$ (5)	$S_5 = [-4, 0]$

2°) Retrouver par le calcul les ensembles de solutions de (3) et (5).

On utilise l'expression algébrique de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 3$.

L'équation (3) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$x^2 + 4x + 3 = -1$
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$x + 2 = 0$
$x = -2$

On retrouve $S_3 = \{-2\}$.

L'inéquation (5) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$x^2 + 4x + 3 \leqslant 3$
$x^2 + 4x \leqslant 0$
$x(x+4) \leqslant 0$
On dresse un tableau de signes.

On obtient $S_5 = [-4, 0]$.

10

1°) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

2°) $f\left(3 - \sqrt{3}\right) = \frac{7}{2}$

3°)

On résout l'équation $f(x) = -3$. Cette équation est successivement équivalente à :

$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 5 = -3$
$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 8 = 0$
$-(x-3)^2 + 16 = 0$
$16 - (x-3)^2 = 0$
$[4 - (x-3)][4 + (x-3)] = 0$
$(x+1)(7-x) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $7 - x = 0$
$x = -1$ ou $x = 7$

Les antécédents de – 3 par f sont – 1 et 7.

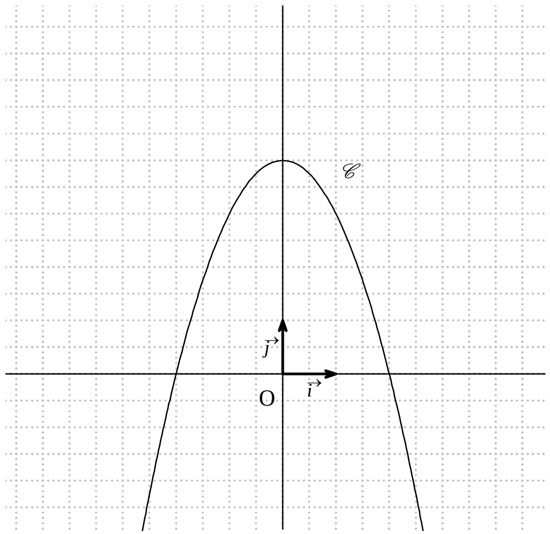
11 $\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

12 $\sqrt{5} - \left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{5} + \sqrt{3} = 3{,}96811878\ldots$
La longueur en mètres est égale à 3,96811878…
Donc la valeur décimale approchée au centième par excès de ℓ est 3,97.

13

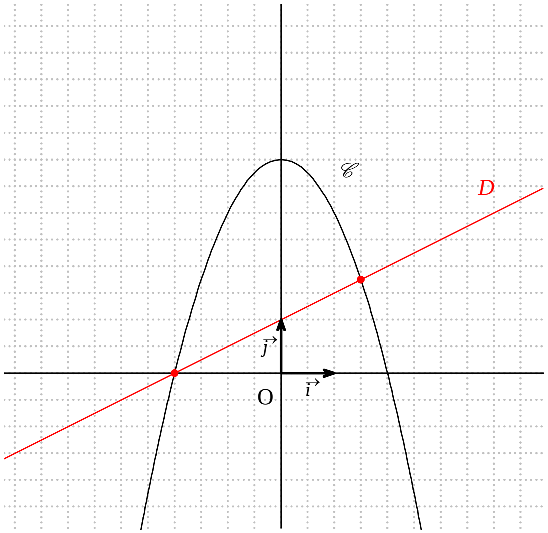
$f(x) = 4 - x^2$

1°) On fait un tableau de valeurs.



Pour le tracé de D, on a intérêt à écrire l'équation de D donnée dans l'énoncé sous forme réduite $y = \frac{x+2}{2}$.
Puis on fait un petit tableau de valeurs pour avoir deux points.

2°) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.



Vérification possible sur la calculatrice.
On trace les deux courbes puis $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs) 5 : Intersect

N.B. : La calculatrice Casio Graph 75 permet de résoudre le système (Simultaneous equation).
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite D s'affichent sur l'écran.

2°) c) 2^e point

Dans la question précédente, on a déterminé graphiquement les coordonnées des points d'intersection $\mathscr{C}$ et D :
$(-2\,;0)$ et $\left(\dfrac{3}{2}\,;1{,}75\right)$.
Retrouvons à présent par le calcul ces résultats.
On résout l'équation $f(x)=\dfrac{x+2}{2}$ (1).
(1) est successivement équivalente à :

$$4-x^2=\frac{x+2}{2}$$

$$(2-x)(2+x)-\frac{x+2}{2}=0$$

$$(x+2)\left[(2-x)-\frac{1}{2}\right]=0$$

$$(x+2)\left(2-x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$(x+2)\left(\frac{3}{2}-x\right)=0$$

$$x+2=0 \text{ ou } \frac{3}{2}-x=0$$

$$x=-2 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

On retrouve les abscisses des points obtenues par lecture graphique.

À présent déterminons les ordonnées.

On remplace x dans l'équation de la droite (c'est le plus simple) ou on calcule les images par f.

On a intérêt à prendre l'équation réduite plutôt que la forme donnée dans l'énoncé.

Pour $x=-2$, on obtient $y=\dfrac{-2+2}{2}=0$. On retrouve les coordonnées $(-2\,;0)$.

Pour $x=\dfrac{3}{2}$, on obtient $y=\dfrac{\frac{3}{2}+2}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}}{2}=\dfrac{7}{4}$. On retrouve les coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;1{,}75\right)$.

14

$x\in[-5\,;5]$

Donnons le meilleur encadrement possible de $(x+3)^2$.

$-5\leqslant x\leqslant 5$
On ajoute 3 à chaque membre du double encadrement. On obtient alors $-2\leqslant x+3\leqslant 8$.
On distingue ensuite deux cas.
$-2\leqslant x+3\leqslant 0$ donc $0\leqslant (x+3)^2\leqslant 4$
$0\leqslant x+3\leqslant 8$ donc $0\leqslant (x+3)^2\leqslant 64$
Conclusion : $0\leqslant (x+3)^2\leqslant 64$

Vérification possible en traçant la courbe de la fonction $f : x\mapsto (x+3)^2$ (ce n'est pas la fonction « carré » ; c'est une fonction associée à la fonction « carré »).

16

1°) a) Les solutions de (1) sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses (phrase à savoir par cœur).

$S_1=]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$

b) Tableau de signes

2°) On utilise l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de la droite D.
D'après le graphique, D a pour ordonnée à l'origine – 1 (lu directement sur l'axe des ordonnées) et pour coefficient directeur 1 (lu grâce aux carreaux, on imagine une avancée d'une unité vers la droite horizontalement en partant d'un point de la droite, peu importe le point, et constate qu'il faut monter d'une unité verticalement vers le haut pour rejoindre la droite).
Donc $g(x)=x-1$ (forme $g(x)=ax+b$ avec a coefficient directeur et b ordonnée à l'origine).

3°) a) Les solutions de (2) sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés au-dessous ou sur la droite D (phrase à savoir par cœur).
$S_2=[0\,;1]$

b) (2) s'écrit $x^2-1\leqslant x-1$.

Elle est successivement équivalente à :

$x^2-x\leqslant 0$

$x(x-1)\leqslant 0$

Tableau de signes

18

$f : x \mapsto 5-2x^2$

1°) On peut conjecturer que f est croissante sur l'intervalle]– ∞ ; 0] et décroissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

18 J'ai fait cet exercice le samedi 18-4-2015 avec Maxime Bourgeois

Il ne comprenait pas comment justifier avec la fonction « carré ». Il me demandait où il y avait la fonction « carré ». Il confondait la fonction *f* avec la fonction « carré ».

Je pense qu'il faudrait rédiger de manière plus détaillée.

Soit x_1 et x_2 deux réels quelconques tels que $0\leqslant x_1\leqslant x_2$.

On observera que d'après cette inégalité, x_1 et x_2 sont positifs ou nuls.

On utilisera le sens de variation de la « fonction carré » sur un intervalle bien choisi pour justifier l'une des inégalités.

Peut-être serait-il bon de donner un modèle de rédaction « La fonction « carré » est croissante sur l'intervalle … ».

20

1°) On fait une figure assez grande et on applique le théorème de Thalès.

On obtient $\dfrac{\text{DN}}{\text{AN}}=\dfrac{2}{2+x}$ ce qui donne $\dfrac{\text{DN}}{\text{DN}+1}=\dfrac{2}{2+x}$.

Par produit en croix, on obtient $(2+x)\times\text{DN}=2\text{DN}+2$.

D'où $\text{DN}=\dfrac{2}{x}$.

2°) On résout ensuite l'équation $\dfrac{2}{x}=2+x$.

Cette équation est successivement équivalente à :

$2=2x+x^2$ (produit en croix)

$x^2+2x-2=0$

$(x+1)^2-3=0$ (on utilise le résultat du développement demandé pour résoudre l'équation du second degré)

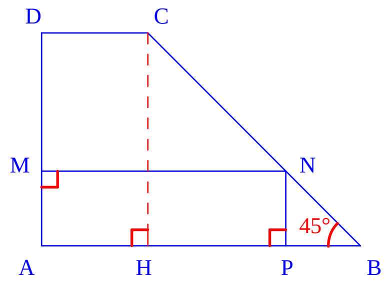
$\left(x+1-\sqrt{3}\right)\left(x+1+\sqrt{3}\right)=0$

$x=\sqrt{3}-1$ ou $x=-1-\sqrt{3}$

Or $x>0$ par hypothèse donc la solution $-1-\sqrt{3}$.

On ne garde que la solution $\sqrt{3}-1$; il serait d'ailleurs intéressant de faire la figure dans ce cas.

21 1°)



1°) $\text{CH}=\text{AD}=4$

$\text{BH}=\text{BA}-\text{AH}=6-2=4$

BCH est rectangle isocèle en H.

On a : $\widehat{\text{CBH}}=45°$ donc $\widehat{\text{NBP}}=45°$.

BNP est donc un triangle rectangle en P qui a un angle de 45°.

Par suite, BPN est isocèle rectangle en P.

Donc $\text{BP}=\text{PN}$.

Or $\text{PN}=\text{AM}=x$.

D'où $\text{BP}=x$.

2°) $x\in[0\,;4]$

3°) $\mathscr{A}_{\text{AMNP}}=x\times(6-x)=6x-x^2$.

4°)

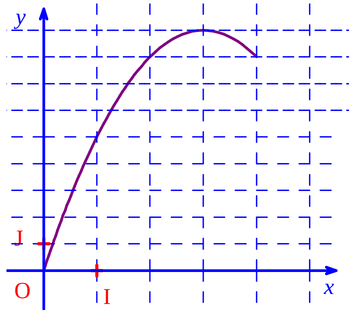
$\mathscr{A}_{\text{ABCD}}=\dfrac{(6+2)\times 4}{2}=16$

$\mathscr{A}_{\text{CMD}}=\dfrac{(4-x)\times 2}{2}=4-x$

$\mathscr{A}_{\text{ABM}}=\dfrac{6\times x}{2}=3x$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\text{CMB}}&=\mathscr{A}_{\text{ABCD}}-\left(\mathscr{A}_{\text{CMD}}+\mathscr{A}_{\text{ABM}}\right)\\&=16-(4-x+3x)\\&=12-2x\end{aligned}$$

5°)



a)

b) K(2 ; 8) donc $\mathscr{A}_{\text{CMB}} = \mathscr{A}_{\text{AMNP}}$ lorsque $x = 2$.

6°)

a) $h(x) = (x-4)^2 - 4$

$= x^2 - 8x + 16 - 4$

$= x^2 - 8x + 12$

b) $\mathscr{A}_{\text{CMB}} = \mathscr{A}_{\text{AMNP}}$ équivaut à $6x - x^2 = 12 - 2x$ (1).

c) (1) est successivement équivalente à :

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-4)^2 - 4 = 0$

$(x-4+2)(x-4-2) = 0$

$(x-2)(x-6) = 0$

$x = 2$ ou $\underbrace{x = 6}_{\substack{\text{impossible} \\ \text{car } x \in [0\,;\,4]}}$

27 **Contre-exemples**

① Deux nombres et leurs carrés sont toujours rangés dans le même ordre.

$-1 > -2$ et $(-1)^2 < (-2)^2$

② Pour tous les réels *x* on a $x^2 = -x^2$.

$5^2 \neq -5^2$

③ Si $x \leqslant 5$, alors $x^2 \leqslant 25$.

$-6 \leqslant 5$ et $(-6)^2 > 25$

④ Un réel est toujours inférieur à son carré.

$0,5 > 0,5^2$

28 **Vrai ou faux**

① Si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.

Faux.

② Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $b^2 \leqslant a^2$.

Faux.

③ Si $a^2 = b^2$, alors $a = b$.

Faux.

④ Pour tout réel *a*, $a^2 \leqslant a - 1$. (On pourra proposer une justification graphique.)

Faux.

29 2°) Hachurer l'ensemble $E = \{\text{M}(x\,;y) \in P \,/\, y \geqslant x^2\}$.

Variante :

Hachurer $F = \{\text{M}(x\,;y) \in P \,/\, y < x^2\}$.

33 $\dfrac{121}{16}$; $\dfrac{169}{25}$; $\dfrac{225}{49}$

34 $9 + 4\sqrt{5}$; $13 - 2\sqrt{42}$; $11 - 6\sqrt{2}$; $9 - 4\sqrt{2}$

35 $\dfrac{9}{16}$; $\dfrac{16}{25}$; 10^6 ; 10^{-8} ; 5 ; 7,25 ; 18

36

– 1 (à ne pas oublier) ; – 3 ; – 2 ; $-\sqrt{3}$

Comment ferait-on pour justifier ?

Il est évident que pour justifier il faut faire un calcul.

41 Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $2,3^2$ et $2,15^2$; b) $(-1,002)^2$ et $(-0,999)^2$.

Thème : Comparer les carrés de nombres de même signe

D'après le sens de variation de la fonction « carré » :

- Deux réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre ;
- Deux réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.

a) 2,3 et 2,15 sont tous deux positifs.

Or la fonction « carré » est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc de $2,15 \leqslant 2,3$ on en déduit que $2,15^2 \leqslant 2,3^2$.

b) – 1,002 et – 0,999 sont tous deux négatifs.

Or la fonction « carré » est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc de $-1,002 \leqslant -0,999$ on déduit que $(-1,002)^2 \geqslant (-0,999)^2$.

Remarque : Si deux nombres réels sont de signes contraires, aucun résultat général ne permet de comparer immédiatement leurs carrés. En effet : $-3 \leqslant 2$ et $(-3)^2 \geqslant 2^2$ mais $-3 \leqslant 4$ et $(-3)^2 \geqslant 4^2$.

$\boxed{\textbf{42}}$ Résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 5$ en s'aidant de la courbe de la fonction « carré ».

Thème de l'exercice : Utiliser la courbe de la fonction « carré »

Solution :

1/ On trace la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction « carré » dans un repère.
2/ On place 5 sur l'axe des ordonnées et les points de $\mathscr{C}$ qui ont pour ordonnée 5. Leurs abscisses sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$: on les note sur l'axe des abscisses.
3/ On visualise sur l'axe des ordonnées les nombres inférieurs ou égaux à 5.
4/ On lit sur l'axe des abscisses les nombres dont le carré appartient à la partie verte de l'axe des ordonnées.
5/ On conclut :
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 5$ est l'intervalle $\left[-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right]$.