1$^{\text{ère}}$ S1

IE du lundi 2 avril 2012 (30 min)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Ne rien écrire, ne rien surligner sur le sujet en dehors de ce qui est demandé (ni au recto ni au verso).
Faire tous les traits de fraction et tous les radicaux à la règle.

Note : …… /20

I. (4 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Compléter le raisonnement suivant permettant de déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Soit n un entier naturel quelconque non nul.

On a : $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $u_{n+1} =$ ……………………… (ne pas mettre au même dénominateur).

Dans la suite, compléter avec le signe < ou > suivant les cas.

On part de l'inégalité : n …….. $n + 1$.

On obtient ensuite les inégalités successives suivantes :

$\sqrt{n}$ …….. $\sqrt{n+1}$ car la fonction « racine carrée » est ……………………………………………………………….

sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ …….. $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car la fonction « inverse » est ………………………………………………………………
sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

$-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ……. $-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car ………………………………………………………………………………………

$1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ …….. $1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car ……………………………………………………………………………………

On en déduit que u_n …….. u_{n+1}.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : u_n …….. u_{n+1}.

Par conséquent, la suite (u_n) est ……………………………………………………… à partir de l'indice 1.

II. (2 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 2^n$.

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

u_0 =………	u_1 = ………	u_2 = ………	u_3 = ………

III. (3 points) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$. On admettra pour la question 2°) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad u_n \neq 0$ (démonstration possible par un raisonnement de proche en proche).

1°) Calculer la valeur de u_2.

$u_2 =$ ………………

2°) Exprimer u_{n-1} en fonction de u_n pour $n \geqslant 1$.

$u_{n-1} =$ …………………………

IV. (1 point) Soit n un entier naturel quelconque.
Le nombre $2^{n+2003} + 2^{n+2003}$ est égal à (entourer la bonne réponse) :

A. 2^{n+2004}	B. $2^{2n+4006}$	C. $4^{2n+4006}$	D. $4^{2n+2003}$	E. 4^{n+2003}

V. (6 points) Soit EFG un triangle tel que EF = 7 cm, FG = 5 cm et $\widehat{\text{EFG}}$ = 50°.

1°) Calculer le périmètre $\boldsymbol{P}$ du triangle EFG (donner la valeur arrondie au dixième).

2°) Calculer l'aire $\boldsymbol{A}$ du triangle EFG (donner la valeur arrondie au dixième).

$\boldsymbol{P} \approx$ ………. cm (valeur arrondie au dixième)	$\boldsymbol{A} \approx$ ………. cm^2 (valeur arrondie au dixième)

VI. (4 points) Soit A et B deux points du plan P tels que AB = 8 cm. On note I le milieu de [AB].

1°) Compléter à l'aide de nombres l'égalité ci-contre : « $\forall$ M $\in P$ $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 =$ ……… $\text{MI}^2 +$ ……… ».

2°) Compléter le plus précisément possible la phrase :

« L'ensemble E des points M de P tels que l'on ait $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = 82$ est ………………………………………

…… »

Corrigé de l'interrogation écrite du 2 avril 2012

I. (u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Soit n un entier naturel quelconque non nul.

On a : $u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Dans la suite, compléter avec le signe < ou > suivant les cas.

On part de l'inégalité : $n < n + 1$.

On obtient ensuite les inégalités successives suivantes :

$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ car la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car la fonction « inverse » est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$-\dfrac{1}{\sqrt{n}} < -\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car on a multiplié les deux membres de l'inégalité par – 1 (– 1 < 0 donc le sens de l'inégalité change)

$1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ car on a ajouté 1 aux deux membres de l'inégalité (donc le sens de l'inégalité ne change pas)

On en déduit que $u_n < u_{n+1}$.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $u_n < u_{n+1}$.

Par conséquent, la suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de l'indice 1.

II. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2^n$

Calculons u_0, u_1, u_2, u_3.

$u_0 = \mathbf{0}$	$u_1 = \mathbf{1}$	$u_2 = \mathbf{5}$	$u_3 = \mathbf{19}$

III. (u_n) : suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$

1°) Calculons la valeur de u_2.

$$\boxed{u_2 = \frac{6}{7}}$$

2°) Exprimons u_{n-1} en fonction de u_n pour $n \geqslant 1$.

$$\boxed{u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - 1}$$

Justification :

1°) D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), on a :

$u_1 = \dfrac{1}{1+5} = \dfrac{1}{6}$

$u_2 = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6}} = \dfrac{1}{\dfrac{7}{6}} = \dfrac{6}{7}$

2°) Pour $n \geqslant 1$, la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), permet d'écrire $u_n = \dfrac{1}{1+u_{n-1}}$

On obtient alors successivement :

$u_n\left(1+u_{n-1}\right) = 1$

$1 + u_{n-1} = \dfrac{1}{u_n}$ (car $u_n \neq 0$)

$u_{n-1} = \dfrac{1}{u_n} - 1$

IV. $n \in \mathbb{N}$ quelconque

$2^{n+2003} + 2^{n+2003} = 2 \times 2^{n+2003} = 2^1 \times 2^{n+2003} = 2^{n+2004}$

V. EFG triangle tel que EF = 7 cm, FG = 5 cm, $\widehat{EFG} = 50°$

1°) Calculons le périmètre ***P*** du triangle EFG.

P = EF + FG + GE

On commence par calculer la longueur manquante GE.

D'après la formule du côté dans le triangle EFG,

$$EG^2 = FE^2 + FG^2 - 2FE \times FG \times \cos \widehat{EFG}$$
$$EG^2 = 49 + 25 - 2 \times 35 \times \cos 50°$$
$$EG^2 = 74 - 70 \cos 50°$$
$$EG = \sqrt{74 - 70 \cos 50°} \quad \text{(valeur exacte)}$$

Avec la calculatrice, on obtient : EG = 5,38561670…

On obtient ensuite : ***P*** = 17,3856617…

P ≈ **17,4** cm (valeur arrondie au dixième)

Deux remarques très importantes :

1. Faire attention aux valeurs approchées dans les calculs (cf. fiche « Travailler avec des valeurs approchées »).
On doit rester le plus longtemps possible avec des valeurs exactes et surtout ne pas remplacer cos 40° par une valeur approchée.

2. On doit mettre la calculatrice en mode radian avec de commencer tout calcul.

Une erreur possible était de considérer que le triangle EFG était rectangle en G.
On écrivait alors EG = 7 × sin 50° ce qui donnait un résultat égal au centième près au résultat obtenu avec la bonne méthode (donc indécelable dans la réponse donnée sur la feuille).
En fait, le triangle EFG n'est pas rectangle en G ; on verra cependant qu'il est presque rectangle en G dans la suite car l'angle $\widehat{G}$ mesure environ 84°.

2°) Calculons l'aire ***A*** du triangle EFG.

D'après la formule du cours donnant l'aire d'un triangle quelconque :

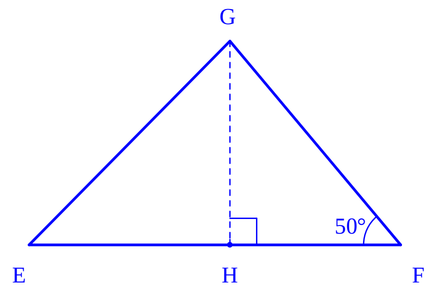
$$A = \frac{1}{2} \times FE \times FG \times \sin \widehat{EFG}$$
$$A = \frac{35 \times \sin 50°}{2} \quad \text{(valeur exacte)}$$

Avec la calculatrice, on obtient :

A ≈ 13,4057777… cm^2

A ≈ **13,4** cm^2 (valeur arrondie au dixième)

Pour le calcul de l'aire, on n'est pas dans un triangle rectangle.
On pouvait aussi utiliser la formule ***A*** $= \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ en prenant pour base [EF].
Pour calculer la hauteur issue du sommet G, on utilisait la trigonométrie.
Cela revenait en fait à utiliser l'expression du cours avec le sinus d'un angle.



P ≈ **17,4** cm (valeur arrondie au dixième)	***A*** ≈ **13,4** cm^2 (valeur arrondie au dixième)

Complément :

Calculer les angles manquants du triangle EFG.

Méthode :

Le triangle EFG n'est pas un triangle rectangle a priori.
On ne peut donc pas utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle.
On va donc passer par les sinus et plus précisément, par la « loi de sinus ».

D'après la loi des sinus, dans le triangle EFG, on a :

$$\sin\ \widehat{G} = \frac{9 \times \sin \widehat{F}}{EG}$$

$$\sin\ \widehat{G} = \frac{9 \times \sin 50°}{\sqrt{74 - 70 \cos 50°}}$$

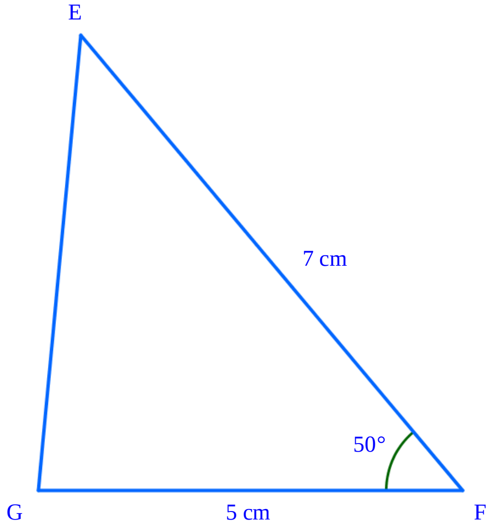
Donc $\widehat{G}$ = 84,66779…°

$\widehat{E}$ = $180° - (\widehat{F} + \widehat{G})$
= 45,33221…

On constate qu'effectivement le triangle EFG n'est pas rectangle (il est « presque » rectangle).

Ayant trouvé les longueurs de tous les côtés et les mesures de tous les angles du triangle EFG, on dit que l'on a **« résolu »** le triangle EFG ou que l'on a effectué la **« résolution »** du triangle EFG.

On peut vérifier tous les résultats de distances et d'angles sur une figure faite avec précision.



VI. AB = 8 cm

I : milieu de [AB].

1°) D'après la formule de la médiane, on a :

$$\forall\ M \in \mathcal{P} \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Donc $\forall\ M \in \mathcal{P} \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 32$

2°) $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \ / \ MA^2 + MB^2 = 82\}$

$M \in \mathcal{E}$ si et seulement si $MA^2 + MB^2 = 82$
si et seulement si $2MI^2 + 32 = 82$
si et seulement si $MI^2 = 25$
si et seulement si MI = 5

Conclusion :

L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre I et de rayon 5 cm.

« L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 = 82$ est **le cercle de centre I et de rayon 5 cm.** »

Attention à ne pas parler du point M dans la conclusion.

Par exemple, ne pas dire
« L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 = 82$ est **le cercle de centre I et de rayon MI = 5 cm.** »