$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 20 mars 2012 (50 min)

Prénom et nom : …………………………………………………….

Note :

…… /20

Ne rien écrire, ne rien surligner sur le sujet en dehors de ce qui est demandé (ni au recto ni au verso).

L'exercice **I** est à traiter sur cette feuille ; les autres exercices sont à faire sur la copie.

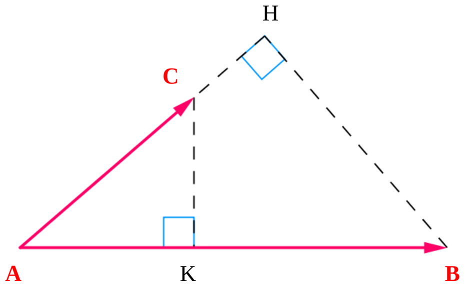
Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

I. (2 points) Questions de cours

1°) Soit A, B, C trois points du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) et K le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Compléter à l'aide des points de la figure :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{.....} \bullet \overrightarrow{.....} = \overrightarrow{.....} \bullet \overrightarrow{.....}}$$



2°) Soit E et F deux points fixés distincts du plan. Compléter la phrase (sans utiliser le point M) :

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{ME} \bullet \overrightarrow{MF} = 0$ est ……………………………………..………………

…..……

II. (6 points) Soit ABCD un rectangle. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

On pose $AB = a$ et $BC = b$ ($a > 0$, $b > 0$). La figure n'est pas demandée sur la copie (faire cependant une « grande » figure au brouillon).

1°) Exprimer $\overrightarrow{AJ} \bullet \overrightarrow{DI}$ en fonction de a et b.

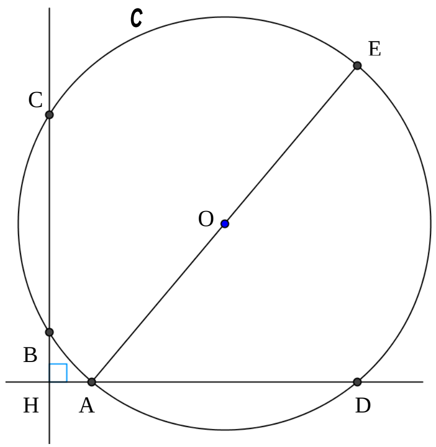
2°) En déduire que (AJ) $\perp$ (DI) si et seulement si $a = b$.

Rédiger selon le modèle ci-contre : (AJ) $\perp$ (DI) si et seulement si ….
si et seulement si ….
si et seulement si ….
si et seulement si ….

III. (6 points) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B, C trois points distincts de $\mathcal{C}$.

On note :
H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) ;
D le second point d'intersection de la droite (AH) et du cercle $\mathcal{C}$;
E le point du cercle diamétralement opposé à A.

Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AH}$.



IV. (6 points) Soit A et B deux points distincts du plan *P*. On note I le symétrique du point A par rapport au point B. Faire une figure au brouillon.

1°) Démontrer que pour tout point M du plan *P*, on a : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$.

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points $M \in P$ tels que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB}$.

Rédiger convenablement selon le modèle ci-dessous (ne rien écrire dans le cadre).

> Soit M un point quelconque du plan *P*.
>
> $M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB}$
>
> si et seulement si ……………………...…………………..
>
> si et seulement si ……………………...…………………..
>
> si et seulement si ……………………...…………………..
>
> L'ensemble *E* est …………………………………….………………………………………

Corrigé du contrôle du 20 mars 2012

I. Questions de cours

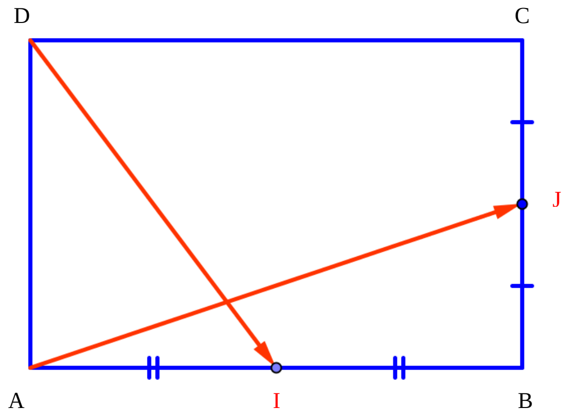
1°) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC}$

2°) L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{ME} \bullet \overrightarrow{MF} = 0$ est le cercle de diamètre [EF].

II.

ABCD rectangle
I : milieu de [AB]
J : milieu de [BC]
$AB = a \quad (a > 0)$
$BC = b \quad (b > 0)$

On fait une figure assez grosse (avec les codages des milieux).



1°) **Exprimons $\overrightarrow{AJ} \bullet \overrightarrow{DI}$ en fonction de *a* et *b*.**

$\overrightarrow{AJ} \bullet \overrightarrow{DI} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) \bullet \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}\right)$ (on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs)

$= \underbrace{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{DA}}_{0} + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} \bullet \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{BJ} \bullet \overrightarrow{AI}}_{0}$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux   car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux

$= AB \times AI - BJ \times DA$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens   car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraires

$= \frac{a}{2} \times a - \frac{b}{2} \times b$ (ABCD est un rectangle donc $AD = BC = b$)

$= \frac{a^2 - b^2}{2}$

2°) **Déduisons-en que (AJ) $\perp$ (DI) si et seulement si $a = b$.**

(AJ) $\perp$ (DI) si et seulement si $\overrightarrow{AJ} \bullet \overrightarrow{DI} = 0$

si et seulement si $\frac{a^2 - b^2}{2} = 0$

si et seulement si $a^2 - b^2 = 0$

si et seulement si $a^2 = b^2$

si et seulement si $a = b$ (car *a* et *b* sont positifs)

Dans ce cas, ABCD est un carré.

III.

$\mathcal{C}$: cercle de centre O
A, B, C trois points distincts de $\mathcal{C}$
H : projeté orthogonal de A sur la droite (BC)
D : second point d'intersection de la droite (AH) et du cercle $\mathcal{C}$
E : point du cercle diamétralement opposé à A

Démontrons que l'on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AH}$.

Méthode 1 : utilisation des projetés orthogonaux

On transforme chaque produit scalaire.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AD}$ car H est le projeté orthogonal de B sur (AD)

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AD}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (AD)

E est le point du cercle diamétralement opposé au point A donc [AE] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.
De plus, D $\in \mathcal{C}$
On en déduit que le triangle AED est rectangle en D.
Par suite, D est le projeté orthogonal de E sur (AD).
Par conséquent $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AH}$.

Conclusion : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AH}$

Méthode 2 : utilisation de la relation de Chasles

Mise en garde : on ne parle pas de projeté orthogonal d'un point sur un cercle (uniquement du projeté orthogonal d'un point sur une droite).

IV.

A $\neq$ B

I : symétrique de A par rapport à B

1°) **Démontrons que $\forall$ M $\in$ P $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$.**

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$ (relation de Chasles)

$= -\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$ (I est le symétrique de A par rapport à B donc $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$)

Conclusion : $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI}$

2°) **Déterminons l'ensemble E = {M $\in$ P / $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB}$ }.**

M $\in E$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB}$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$ *
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \left(-\overrightarrow{MI}\right) = 0$
si et seulement si $-\left(\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MI}\right) = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MI} = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MI}$

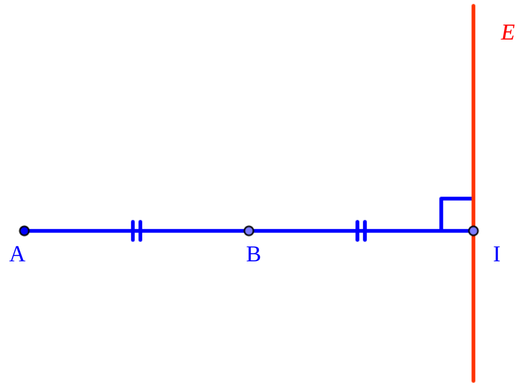
Variante :
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \left(-\overrightarrow{MI}\right) = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{IM} = 0$
si et seulement si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IM}$

*** détail à la suite d'une question le 22-3-2016 :**

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} - 2\left(\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MB}\right) = 0$
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \bullet \left(-2\overrightarrow{MB}\right) = 0$
$\overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$ (mise en facteur du vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Conclusion :

L'ensemble E est la droite passant par I et perpendiculaire à (AB).


E
A
B
I