# La construction de l'« édifice mathématique »

## 1. Introduction

Les mathématiques existent depuis l'Antiquité.

Le premier traité de mathématiques au sens moderne remonte à Euclide (environ 250 avant Jésus-Christ) : c'est le traité des *Éléments*.

Dès cette époque, les mathématiques commencent à prendre une forme moderne.

## 2. Énoncés mathématiques

Les mathématiques s'organisent de la manière suivante.

**a.** On conçoit d'abord un certain nombre d'énoncés comme **axiomes** (ou **postulats**).

Un axiome est un énoncé posé mais pas démontré.

**Exemple : l'axiome d'Euclide ou 5^e^ postulat d'Euclide** (non démontré)

> « Étant donnés une droite *D* et un point A, il existe une unique droite passant par A et parallèle à *D*. »

**b.** Ensuite, Euclide donne des **définitions** d'objets mathématiques (droites, cercles…), plus ou moins claires d'ailleurs !

Une définition n'a pas à être discutée ; elle doit être acceptée telle qu'elle. Une définition ne peut pas être démontrée et donc n'a pas à être démontrée.

N.B. : La distinction entre axiome et définition reste difficile à clarifier.

**c.** Ayant posé des définitions préalables, on peut démontrer des résultats et énoncer ainsi des **propriétés** (« propositions ») ou des **théorèmes**. On utilise pour cela un raisonnement mathématique, par exemple, le raisonnement hypothético-déductif.

Une fois ces propriétés et théorèmes démontrés et énoncés, on peut faire d'autres démonstrations en les utilisant directement.

## 3. Quelques termes à connaître

- **lemme** ;
- **scholie** ;
- **corollaire**.

Ces termes se rencontrent dans d'anciens traités de mathématiques (chez Pascal, Descartes etc…).

## 4. Un terme d'usage relativement récent : le mot « conjecture »

Ce terme est utilisé pour formuler un résultat qui semble plausible au vu d'observations ou de calculs.

**Exemple :** la conjecture de Golbach

« Tout nombre pair inférieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers ».

Cette conjecture n'est toujours pas démontrée à ce jour.

### 5. Pour finir, un mot fondamental, le mot « hypothèse ».

Ce mot en mathématiques a un sens extrêmement précis : il désigne des données, il a un sens différent en S.V.T. où il va désigner plutôt une supposition.

# Notes complémentaires

## Les *Éléments* d’Euclide

Euclide a travaillé sur l’arithmétique, la géométrie (on parle d’ailleurs de géométrie euclidienne) et l’algèbre.
Le traité des *Éléments* a eu un retentissement énorme en Occident.
Il va être un ouvrage de référence pendant vingt siècles.

Euclide y nomme les « objets » de base qui vont être utilisés en géométrie : points, droites, segments...

Au début de son traité, Euclide formule un certain nombre de « demandes », énoncés qui sont acceptés comme vrais.

---

## À propos des axiomes en mathématiques

Postulat au sens philosophique : on considère que c’est vrai bien que l’on n’ait aucune preuve de la véracité de l’affirmation.

Pour les mathématiques, tout repose sur des axiomes acceptés comme vrais.

Un axiome est différent d’une convention.

---

## À propos des définitions en mathématiques

Les mathématiciens doivent définir les objets sur lesquels ils travaillent.

**Certaines notions ont mis très longtemps avant d’être définies clairement.** C’est le cas par exemple des vecteurs, des fonctions…
Certaines notions ont mis du temps à être définies correctement (dérivabilité des fonctions, dérivées, limites…).

---

## Le statut des énoncés mathématiques

**Il est fondamental de faire la distinction entre définition et propriété.**

On peut par exemple définir ce qu’est un parallélogramme (quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles) puis on peut déduire plein de propriétés de cette définition (les côtés opposés sont de même longueur etc.).

définition du parallélogramme

↓

propriétés du parallélogramme

On parle des trente-deux premières propositions d’Euclide (cf. Pascal enfant).

Il s’agit de bien faire la distinction entre définition et propriété (Euclide parle de « proposition »).

Le cas particulier de la **définition de la racine carrée d’un nombre positif ou nul.**

---

## À propos des conjectures

### La conjecture de Goldbach

**Qu’est-ce qu’un nombre premier ?**

Un nombre premier est un nombre entier supérieur ou égal à 2 qui n’est divisible que par 1 et par lui-même.

**Attention à bien comprendre l’énoncé :**

« Tout nombre pair s’écrit comme somme de deux nombres premiers. »

La partie facile serait : « La somme de deux nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 est un nombre pair » (que l’on peut aussi formuler sous la forme : « Si on a deux nombres premiers supérieurs ou égaux à 3, alors la somme est un nombre pair »).

**Exemples de vérification de la conjecture de Golbach sur les premiers nombres pairs supérieurs ou égaux à 4 :**

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 5 + 5

10 = 5 + 5 =  7 + 3

12 = 5 + 7

### Un autre exemple célèbre de conjecture : la conjecture de Syracuse

La notion de « puits » 4, 2, 1, 4, 2, 1…

---

## À propos du mot « lemme »

On parle par exemple de lemme d’Euclide.