Exercices sur les formules de Taylor

1 Soit f une fonction deux fois dérivable de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f'(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'(1)=0$.

Démontrer qu'il existe un réel $a \in \,]0\,;1[$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

Indication :

On pourra considérer la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=f(1-x)-f(x)$.

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à g sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

2 **Fonctions à dérivées bornées**

Soit f une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que, dans ces conditions, les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre n sont toutes bornées.

Pour cela, on pose : $M_0=\sup|f|$ et $M_n=\sup\left|f^{(n)}\right|$. On choisit également $n-1$ réels non nuls, deux à deux distincts $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ et on considère la matrice carrée A d'ordre $n-1$ de terme général $a_{i,j}=\dfrac{h_i^j}{j!}$ pour tout couple (i, j) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Enfin, on définit pour i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$ les fonctions F_i par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \dots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \dots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

1°) À l'aide d'une formule de Taylor, démontrer que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et pour tout réel x on a : $\left|f(x+h_i)-f(x)-F_i(x)\right| \leqslant \dfrac{|h_i|^n}{n!}M_n$.

2°) En déduire que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et pour tout réel x on a : $\left|F_i(x)\right| \leqslant 2M_0+\dfrac{|h_i|^n}{n!}M_n$.

3°) Démontrer que A est inversible.

4°) Conclure.

3 Soit f une fonction de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (n étant un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2).

On suppose que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ et $f^{(n)}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda$ où l et λ sont deux réels.

On se propose de démontrer que $\lambda = 0$.

1°) Soit ε un réel strictement positif fixé et A un seuil tel que si $x \geqslant A$, alors $\lambda-\varepsilon \leqslant f^{(n)}(x) \leqslant \lambda+\varepsilon$.

Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ pour f, entre les points x et x_0, où $x > x_0 > A$.

2°) En déduire que l'on a : $\dfrac{\lambda-\varepsilon}{n!} \leqslant 0 \leqslant \dfrac{\lambda+\varepsilon}{n!}$.

3°) Conclure.

4 Soit f une fonction de classe C^2 de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $M=\sup\left\{\left|f''(x)\right|, x\in[0\,;1]\right\}$. Justifier l'existence de M.

1°) On suppose que $f(0)=f'(0)=0$.

Démontrer que : $\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{M}{8}$.

2°) On suppose que : $f(1)=1$ et $f'(1)=0$.

Démontrer que : $\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \geqslant 1-\dfrac{M}{8}$.

3°) On suppose que $f(0)=f'(0)=0$ et que $f(1)=1$ et $f'(1)=0$.

Démontrer que $M \geqslant 4$.

5 Démontrer les inégalités suivantes en utilisant la formule de Taylor-Lagrange.

1°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \ln x \leqslant x-1$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad e^x \geqslant x + 1$.

3°) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad \sin x \leqslant x$.

4°) $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad \tan x \leqslant x$.

5°) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad \text{Arcsin}\, x \geqslant x$.

6°) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad \text{Arctan}\, x \leqslant x$.

7°) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad \text{sh}\, x \geqslant x$.

8°) $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\quad \text{th}\, x \leqslant x$.

Remarque : chacune de ces inégalités peut aussi être obtenue par étude de fonction ou par application de la convexité.

6 Soit a et b deux réels positifs ou nuls.

Démontrer que l'on a : $\left|e^{-b}-e^{-a}+(b-a)e^{-a}-\dfrac{(b-a)^2}{2}e^{-a}\right| \leqslant \dfrac{|b-a|^3}{6}$.

$\boxed{7}$ Soit f une fonction de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel fixé.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \neq a$ et $\varphi(a)=f'(a)$.

Démontrer que la fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(a)$.

$\boxed{8}$ Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $f'(0)\geqslant 0$.

1°) Démontrer qu'il existe un réel $x_1 \geqslant 0$ tel que $f'(x_1)=0$.

2°) Démontrer que s'il existe un réel x_k tel que $f^{(k)}(x_k)=0$, alors $f^{(k+1)}$ admet un zéro supérieur à x_k.

Indication : On raisonne par l'absurde.

- Démontrer que $f^{(k)}$ est strictement monotone sur l'intervalle $[x_k\ ;+\infty[$.
- Soit y_k un réel strictement supérieur à x_k.

Écrire la formule de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[y_k\ ;x]$ où x est un réel supérieur ou égal à y_k.

- Aboutir à une absurdité.

3°) Démontrer qu'il existe une suite (x_n) strictement croissante de réels tels que pour tout entier naturel n non nul $f^{(n)}(x_n)=0$.

$\boxed{9}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;1]$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ si $0<x\leqslant 1$ et $f(0)=-1$.

1°) Démontrer que la fonction f est continue sur $[0\ ;1]$.

2°) En utilisant une formule de Taylor, démontrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\forall x\in[0\ ;1]\quad \left|e^{-x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\right|\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$ et, en déduire que :

$$\forall x\in[0\ ;1]\quad \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{k-1}}{k!}\right|\leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3°) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k\times k!}$.

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-S_n\right|\leqslant \dfrac{1}{(n+1)\times(n+1)!}$.

En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.

Réponses

$\boxed{1}$ $g'(x)=-f'(1-x)-f'(x)$

$g''(x)=f''(1-x)-f''(x)$

On appliqué la formule de Taylor-Lagrange.

Il existe $c\in\left]0\ ;\frac{1}{2}\right[$ tel que $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(0)+\dfrac{g'(0)}{2}+\dfrac{1}{8}g''(c)$

Donc $-1=\dfrac{g''(c)}{8}$ soit $g''(c)=-8$.

D'où $f''(1-c)-f''(c)=-8$ d'où $8\leqslant |f''(1-c)|+|f''(c)|$.

$\boxed{4}$ 1°) $f(x)=\underbrace{f(0)}_{0}+x\underbrace{f'(0)}_{0}+\dfrac{x^2}{2}f''(c)$ d'où $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leq\dfrac{M}{8}$.

2°) $f(x)=\underbrace{f(1)}_{1}+(x-1)\underbrace{f'(1)}_{0}+\dfrac{(x-1)^2}{2}f''(c)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\dfrac{1}{8}f''(c)$

$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|1+\frac{1}{8}f''(c)\right|\geq 1-\frac{1}{8}|f''(c)|\geq 1-\frac{M}{8}$.