1$^{\text{ère}}$ S1

Interrogation écrite du vendredi 9 mars 2012 (20 minutes)

Note :

…… /20

Prénom et nom : ……………………………………………………

I. (6)	II. (4)	III. (4)	IV. (3)	V. (3)
………	………	………	………	………

I. (6 points) Simplifier les expressions suivantes où x est un réel.

$$\mathrm{A}=\cos(\pi-x)+\cos(-x)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\mathrm{B}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x-5\pi)$$

A =…………	B = ……………

II. (4 points) Soit x un réel quelconque.

On considère la phrase suivante :

(P) : « Si $x\in\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$, alors $|\cos x|\leqslant\frac{1}{2}$. »

Cocher les réponses exactes :

	Vraie	**Fausse**
La phrase (P) est		
La réciproque de (P) est		

III. (4 points) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$.

Calculer u_0, u_1, u_2, u_4.
On ne demande pas le détail des calculs.

$u_0 =$ ……….	$u_1 =$ ……….	$u_2 =$ ……….	$u_4 =$ ……….

IV. (3 points) Compléter en donnant les valeurs exactes.

$\cos\frac{37\pi}{4} =$ ……….	$\sin\frac{37\pi}{4} =$ ……….	$\tan\frac{37\pi}{4} =$ ……….

V. (3 points) Soit x le réel de l'intervalle $[\pi\ ;\ 2\pi]$ tel que $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Calculer la valeur exacte de sin x et de tan x.

$\sin x =$ ……….	$\tan x =$ ……….

Corrigé de l'interrogation écrite du 9-3-2012

I.

$$\begin{aligned} A &= \cos(\pi - x) + \cos(-x) + \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\cos x + \cos x - \sin x + \sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - 5\pi) \\ &= \cos x - (-\cos x) + \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + \sin(x + \pi - 6\pi) \\ &= \cos x + \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi) \\ &= \cos x + \cos x + \sin x - \sin x \\ &= 2\cos x \end{aligned}$$

II.

$x \in \mathbb{R}$

$$(P) : \text{« Si } x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right], \text{ alors } |\cos x| \leqslant \frac{1}{2}. \text{ »}$$

La phrase (*P*) est vraie.

La réciproque de (*P*) est fausse.

Pour voir que (*P*) est vraie, on trace un cercle trigonométrique, on marque l'arc dont les extrémités sont les images de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{2\pi}{3}$.

On voit alors que si $x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right]$, alors $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$ soit $|\cos x| \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour voir que la réciproque de (*P*) est fausse, on peut donner un contre-exemple.

Par exemple, avec $x = -\frac{\pi}{2}$.

On a bien $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc on a bien $\left|\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}$ mais $-\frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right]$.

III. $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

$u_0 = \mathbf{1}$	$u_1 = \mathbf{0}$	$u_2 = \mathbf{-1}$	$u_4 = \mathbf{1}$

$$u_0 = \cos\frac{0\pi}{2} = \cos 0 = 1$$
$$u_1 = \cos\frac{1\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$u_2 = \cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1$$
$$u_4 = \cos\frac{4\pi}{2} = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$$

IV.

$\cos\frac{37\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{37\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\frac{37\pi}{4} = 1$

Explication :

$$4\times 9 < 37 < 4\times 10$$
$$\frac{37\pi}{4} = 10\pi - \frac{3\pi}{4}$$

V. $x \in [\pi\ ;\ 2\pi]$

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

Calculons la valeur exacte de sin x et de tan x.

$\sin x = -\frac{3}{5}$	$\tan x = \frac{3}{4}$

D’après la relation fondamentale, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

D’où $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2 x = 1$

soit $\sin^2 x = 1 - \frac{16}{25}$

ce qui donne $\sin^2 x = \frac{9}{25}$

D’où $\sin x = \frac{3}{5}$ ou $\sin x = -\frac{3}{5}$.

Or $x \in [\pi\ ;\ 2\pi]$ donc $\sin x \leqslant 0$.

D’où $\sin x = -\frac{3}{5}$.

Par définition, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

On en déduit que $\tan x = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.