Exercices sur les intégrales (2)

1 Pour tout réel x, on pose $u(x)=\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sqrt{t}}$.

Démontrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(x)$.

2 Calculer l'intégrale $\mathrm{A}=\int_0^a \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u(t)=t^2$.

3 Calculer l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$.

4 Calculer les intégrales $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ par deux méthodes.

1$^{\text{ère}}$ méthode : par calcul direct

2$^{\text{e}}$ méthode : en calculant $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.

5 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$.

On factorisera $\cos x+\sin x$ puis on effectuera un changement de variable sur la deuxième intégrale.

6 Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[0\,;a]$ (a étant un réel strictement positif) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne prenant pas la valeur – 1 telle que, pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on ait $f(x)\times f(a-x)=1$.

Calculer $\int_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

7 1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

2°) a) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

8 Déterminer l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait

$$f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=x.$$

9 Soit f une fonction continue sur l'intervalle [– 1 ; 1].

Pour tout réel x, on pose $g(x)=\int_0^{\sin x}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

10 Pour chaque entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[n\,;+\infty[$ par

$$f_n(x)=\int_n^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

1°) Démontrer que la fonction f_n est dérivable sur l'intervalle $[n\,;+\infty[$ et donner son sens de variation.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$.

3°) En déduire que, pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel x_n appartenant à l'intervalle $[n\,;+\infty[$ tel que $f_n(x_n)=1$.

Partie B

1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{-x_n^2}\leqslant x_n-n\leqslant\mathrm{e}^{-n^2}$.

3°) On pose $u_n=x_n-n$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n$.

c) Déduire de l'encadrement obtenu au 2°) que $x_n-n\underset{+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-n^2}$.

11 On considère la fonction f définie par $f(x)=\int_0^{\sin^2x}\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2x}\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f.

2°) Étudier la parité et la périodicité de f.

3°) Le but de cette question est de calculer $f(x)$ de deux manières différentes :

a) **1$^{\text{ère}}$ méthode :** calculer $f'(x)$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; en déduire $f(x)$.

b) **2$^{\text{e}}$ méthode :** calculer directement en utilisant les changements de variable $t=\cos^2u$ et $t=\sin^2u$.

12 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$.

2°) Démontrer qu'il existe un et un seul réel α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Démontrer que, pour tout réel $x>0$, $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x^2}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\mathrm{e}^{-x^4}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

En déduire la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.

13 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ telles que, pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, on ait $f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $F(x)=\sup\limits_{t\in[0\,;\,x]}|f(t)|$ et $G(x)=\sup\limits_{t\in[0\,;\,x]}|g(t)|$.

Démontrer que $F(x)\leqslant xG(x)$ et en déduire que $f=g=0$ sur I.

14 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle [0 ; 1] à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Indication : écrire $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} f\left(\frac{i}{n}\right)f\left(\frac{j}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^2\right]$.

15 1°) Pour chaque entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ par

$f_n(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t-\int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$.

Étudier le sens de variation de f_n.

2°) Démontrer qu'il existe un unique réel $c_n\in\mathrm{I}$ tel que $\displaystyle\int_0^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t=\int_{c_n}^1\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$.

Donner la valeur de c_0.

3°) Comparer f_n et f_{n+1} ; en déduire le sens de variation de (c_n).

4°) a) Démontrer que la suite (c_n) converge vers un réel $l\in\mathrm{I}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\int_{c_n}^1\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\leqslant 1$.

c) En déduire la valeur de l.

16 **Égalité de Young**

Soit f une fonction définie sur un intervalle [0 ; a] (où a un réel strictement positif), à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur [0 ; a], dérivable dans l'intervalle]0 ; a[et s'annulant en 0.

On se propose de démontrer que pour tout réel α tel que $0\leqslant\alpha\leqslant a$, on a :

$\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=\alpha f(\alpha)$ (1).

1°) Justifier que l'on a : $f^{-1}(0)=0$.

2°) Exemple : on prend $f(x)=x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

3°) Pour tout réel α tel que $0\leqslant\alpha\leqslant a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$\varphi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x-\alpha f(\alpha)$.

a) Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et f^{-1}.

b) En déduire que la fonction φ est définie et continue sur l'intervalle [0 ; a].

c) Démontrer que φ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;a[$, de dérivée nulle sur $]0\,;a[$. Que peut-on en déduire pour φ ?

d) Déterminer $\varphi(0)$ et en déduire l'égalité (1).

4°) Illustrer graphiquement l'égalité (1) avec des aires.

17 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ et $S_n'=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S'_n$.

18

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\int_0^1(1-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n non nul.

1°) Calculer la valeur de u_1.

2°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $v_1=a$ et la relation de récurrence $v_{n+1}=(n+1)v_n-1$ pour tout entier naturel n non nul.

On s'intéresse à l'influence du terme initial a de cette suite sur son comportement à l'infini.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_n=u_n+n!(a+2-\mathrm{e})$.

2°) Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

19 Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^n}\,\mathrm{d}x$.

1°) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

2°) Déterminer une relation entre I_{n-1} et I_n ; en déduire un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

20 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1°) Étudier la suite (I_n).

2°) a) Exprimer I_n en fonction de I_{n+1}.

b) À l'aide de cette relation, démontrer que $\dfrac{\mathrm{I}_n}{(\ln 2)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On observera que l'on a : $\mathrm{I}_{n+1} \leqslant (\ln 2)^{n+1}$.

c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

21 Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = n^2\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{-\frac{4}{n^2}}$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\ln U_n = -\dfrac{4}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} - 2\frac{\ln n}{n}$.

2°) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.

22 Soit a un réel strictement positif.

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que l'on ait pour tout réel x,

$$\left[f(x)\right]^2 = \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right)\mathrm{d}t + a.$$

23 Soit f une fonction de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$.

24 Soit f une fonction de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{f'\left(\frac{k}{n}\right)}{f\left(\frac{k}{n}\right)}$.

25 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x}$ en utilisant le changement de variable $u = \tan x$.

26 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ en utilisant le changement de variable $u = \tan x$.

27 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\mathrm{d}x$.

Démontrer que $\mathrm{I}_n = \mathrm{J}_n$.

Calculer $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n$; en déduire I_n et J_n.

28 On considère la fonction $f : t \mapsto t + t^3$.

1°) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque.

2°) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$.

Exprimer $G(x)$ en fonction de $g(x)$.

Indication : utiliser un changement de variable.

29 Utiliser la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$ pour déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j+1}$.

30 Soit f une fonction définie sur un intervalle I = [a, b] où a et b sont deux réels tels que $a < b$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_1 \left[f(t)\right]^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_1 \left[f'(t)\right]^2\,\mathrm{d}t$.

1°) En utilisant les hypothèses, écrire pour $a \leqslant t \leqslant b$, $f(t)$ sous forme d'une intégrale.

2°) Majorer cette intégrale à l'aide d'une inégalité du cours.

3°) En déduire l'inégalité à démontrer.

31 Soit f une fonction de classe C^2 définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Démontrer que $\displaystyle\int_1 f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

32 Pour tout réel x strictement positif, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t$.

Déterminer un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.

$\boxed{33}$ Soit a un nombre réel appartenant à [– 1, 1] et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x on ait :

$$f(x)=\int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t+\varphi(x).$$

Partie A. Étude de cas particuliers

1°) Pour cette question, on prend $a=1$ et φ désigne la fonction exponentielle.
Résoudre le problème dans ce cas.

2°) Pour cette question, on prend $a=-1$ et φ désigne la fonction exponentielle.
Démontrer que si f est une fonction solution, alors f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Conclure.

Partie B. Résolution de l'équation homogène

Soit a un nombre réel appartenant à [– 1, 1].

On suppose l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x $f(x)=\int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel n : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f^{(n)}(x)=a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$.

En déduire pour tout entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

2°) Démontrer que pour tout réel x et tout entier naturel n : $f(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

3°) Soit A un nombre réel strictement positif.
a) Justifier l'existence d'un réel $\mathrm{M}\geqslant 0$ tel que : $\forall x\in[-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}]\quad |f(x)|\leqslant \mathrm{M}$; en déduire que pour tout entier naturel n : $\forall x\in[-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}]\quad |f^{(n)}(x)|\leqslant \mathrm{M}$.
b) Soit x un réel appartenant à [– A ; A].

Démontrer que pour tout entier naturel n : $|f(x)|\leqslant \mathrm{M}\times\frac{\mathrm{A}^{n+1}}{(n+1)!}$.

c) Conclure.

Partie C. Étude de l'équation complète

Dans cette partie, a désigne un nombre réel appartenant à [– 1, 1] et φ désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que sous réserve d'existence, il existe une unique application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x)=\int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t+\varphi(x).$$

2°) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f solutions du problème ?

$\boxed{34}$ On se propose d'étudier la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par $F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\sin t}\,\mathrm{d}t$.

1°) Étudier la monotonie de F sur [0 ; + ∞[.
2°) Démontrer que F est bornée sur [0 ; + ∞[.
3°) a) Démontrer que pour tout $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi}t\leqslant \sin t$.
b) En utilisant la question a), déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4°) a) Démontrer que pour tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on a $\left|\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}\right|\leqslant |b-a|$.
b) Démontrer que F est lipchitzienne. En déduire que F est continue sur [0 ; + ∞[.

5°) Soit x_0 un réel positif ou nul.

a) Justifier l'existence de $H(x_0)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ \mathrm{e}^{-x_0\sin t}\,\mathrm{d}t$.

b) Démontrer que pour tout couple (a,b) de réels positifs ou nuls, on a $\left|\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}+(b-a)\mathrm{e}^{-a}\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}$.

c) En déduire que pour tout réel $x\geqslant 0$ différent de x_0, on a : $\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-H(x_0)\right|\leqslant\frac{\pi}{8}|x-x_0|$.

d) Démontrer alors que F est dérivable sur [0 ; + ∞[et déterminer l'expression de sa dérivée.

$\boxed{35}$ Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2°) On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$ si $x\in\left]0\,;1\right]$ et $f(0)=1$.

a) Démontrer que f est continue sur [0 ; 1].

b) Démontrer que $0\leqslant u_n-\int_0^n\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers + ∞.

$\boxed{36}$ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $g(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

$\boxed{37}$ Démontrer que la fonction f définie sur $\left]0\,;1\right[$ par $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est de classe C^1 et calculer $f'(x)$.

$\boxed{38}$ Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(2k-1)}$.

Démontrer que pour tout $n\geqslant 1$ on a : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. En déduire que (S_n) converge et calculer sa limite.

39 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n=1-\dfrac{\ln 2}{n}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

3°) On note φ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $\varphi(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ si $t\in]0\,;1]$ et $\varphi(0)=1$.

a) Démontrer que φ est continue sur $[0\,;1]$. Justifier l'existence de $\mathrm{M}=\sup\limits_{t\in[0\,;1]}\varphi(t)$.

b) On pose $a_n=n\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier naturel.

• Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $a_n=\displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{t}\;\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

• Dans cette question, n est un entier naturel non nul fixé.
Soit ε un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

Démontrer que $\left|\displaystyle\int_\varepsilon^1 \varphi(t)\sqrt[n]{t}\,\mathrm{d}t-\int_\varepsilon^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \mathrm{M}\times\dfrac{\displaystyle\int_\varepsilon^1 -\ln t\,\mathrm{d}t}{n}$.

Indication : utiliser l'inégalité $\mathrm{e}^u\geqslant 1+u$ valable pour tout réel u.

• On admet que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{12}$.

En déduire que $\left|a_n-\dfrac{\pi^2}{12}\right|\leqslant\dfrac{\mathrm{M}}{n}$.

En déduire un développement asymptotique à trois termes de u_n.

40 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

41 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2°) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
Indication : utiliser une intégration par parties.

42 **Intégrale de Poisson**

Poisson : mathématicien français (1781-1840), enseignant à l'École Polytechnique

1°) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{2n}-1$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

2°) Soit a un réel fixé distinct de 1 et de – 1.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)\mathrm{d}x$ en utilisant les sommes de Riemann.

43 Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose : $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+(n-k)^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$. En déduire un équivalent de u_n de $n\to+\infty$.

44 **Deuxième formule de la moyenne (d'Ossian Bonnet)**

Dans cet exercice, I désigne un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. On considère une fonction f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, décroissante et de classe C^1 ainsi qu'une fonction g continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe $c\in\mathrm{I}$ tel que $\displaystyle\int_\mathrm{I} fg=f(a)\int_{[a,c]} g$.

On considère pour cela la fonction G définie pour tout $x\in\mathrm{I}$ par $\mathrm{G}(x)=\displaystyle\int_{[a,x]} g$ et l'on pose $m=\min\limits_\mathrm{I}\mathrm{G}$ et $\mathrm{M}=\max\limits_\mathrm{I}\mathrm{G}$.

À l'aide d'une intégration par parties sur $\displaystyle\int_\mathrm{I} fg$, démontrer que $mf(a)\leqslant\displaystyle\int_I fg\leqslant Mf(a)$. En déduire le résultat annoncé.

Application :

On prend $0<a<b$. Démontrer que l'on a : $\left|\displaystyle\int_\mathrm{I}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 3$ en envisageant successivement les cas suivants :

1^er^ cas : $0<a<b\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 2^e^ cas : $\dfrac{\pi}{2}\leqslant a<b$ 3^e^ cas : $a\leqslant\dfrac{\pi}{2}\leqslant b$.

45 Pour tout réel x non nul, on pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f le prolongement par continuité.

2°) Démontrer que pour tout réel $x\neq 0$, on a : $f(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

46 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

47 Pour tout entier naturel n non nul on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

48 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)}$.

Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

49 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

50 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $f(0)=0$ et dérivable en 0.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$ (utiliser le développement limité de f en 0 à l'ordre 1).

Application : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$.

51 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = n\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

Démontrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

52 Soit f une fonction continue sur $[-1;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^{\sin x} f$.

Démontrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

53 **Formule des trois niveaux**

Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes de degré inférieur ou égal à 3.

Démontrer que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels on a : $\int_a^b P = \dfrac{b-a}{6}\left[P(a)+4P\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+P(b)\right]$.

54 **Intégrales de Wallis**

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

1°) Étudier la monotonie de (J_n), en déduire la nature de (J_n).

2°) Trouver une relation liant J_n et J_{n+2}.

3°) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $nJ_nJ_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}J_n\right)$ (on pourra utiliser après l'avoir justifié l'encadrement $J_{n+1} \leqslant J_n \leqslant J_{n-1}$).

54 bis **Intégrales de Wallis**

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

1°) Étudions la monotonie de (J_n) ; en déduire la nature de (J_n).

2°) Trouver une relation liant J_n et J_{n+2}.

3°) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le produit nJ_nJ_{n-1} est constant.

4°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et un équivalent simple de J_n lorsque $n\to+\infty$ (on pourra utiliser pour cela l'égalité $J_{n+1} \leqslant J_n \leqslant J_{n-1}$).

55 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Prouver que (u_n) converge et calculer sa limite.

2°) Trouver une relation de récurrence vérifiée par (u_n).

3°) Trouver un équivalent de u_n lorsque $n\to+\infty$.

56 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n}{k^2+(n-k)^2}$.

57 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que

$\forall x\in \mathrm{I}\quad f(a+b-x)=f(x)$. Exprimer $\int_I xf(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\int_I f$.

Application : calculer $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

58 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Comparer les valeurs de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,\mathrm{d}t$ et de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{59}$ Soit f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $I=[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Indication :

Considérer $\mathrm{A}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$.

On pourra d'abord considérer le cas où g est lipschitzienne.

$\boxed{60}$ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $F(x)=\int_{[0,x]} f$. On suppose qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on ait : $f(x)\leqslant kF(x)$. Démontrer que la fonction f est alors identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. (Indication : étudier le sens de variation de la fonction $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-kx}F(x)$).

$\boxed{61}$ **Lemme de Gronwall**

Dans cet exercice, I désigne un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ $(a<b)$.

Soit f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, g étant à valeurs positives. Pour tout $x\in I$, on pose

$G(x)=\int_{[a,x]} g$ et $H(x)=\int_{[a,x]} fg$. On suppose qu'il existe un réel k tel que pour tout $x\in I$ on ait :

$f(x)\leqslant k+H(x)$.

Démontrer que pour tout $x\in I$ on a alors $f(x)\leqslant k\mathrm{e}^{G(x)}$.

Indication : étudier le sens de variation de la fonction φ définie par $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-G(x)}\left[k+H(x)\right]$.

$\boxed{62}$ Pour tout réel α strictement positif, on pose $J(\alpha)=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\left(3+2x-x^2\right)^{\alpha}}$.

Calculer $J\left(\frac{1}{2}\right)$, $J(1)$, $J\left(\frac{3}{2}\right)$, $J(2)$.

$\boxed{63}$ 1°) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que pour tout réel x, $P_n(\cos x)=\cos(nx)$.

2°) Calculer en fonction de n l'intégrale de P_n sur l'intervalle $[-1,+1]$.

$\boxed{64}$ 1°) Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^2}{3k+1}$.

En utilisant l'égalité $\frac{1}{3k+1}=\int_0^1 t^{3k}\mathrm{d}t$, donner une expression de S_n sous forme d'une intégrale, en déduire que (S_n) converge et trouver sa limite.

$\boxed{65}$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\ldots+\sqrt[n]{2^n}\right)$.

$\boxed{66}$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ avec $a<b$ à valeurs positives continue par morceaux.

Démontrer que l'on a : $\left(\int_{\mathrm{I}} f(x)\,\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{\mathrm{I}} f(x)\,\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_{\mathrm{I}} f\right)^2$.

$\boxed{67}$ Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n=\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

1°) Étudier les propriétés de la suite (I_n).

2°) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+2} ; en déduire une équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{68}$ 1°) Soit F un polynôme de degré N.

Démontrer que l'on a : $\int_0^{\pi}\mathrm{F}(x)\,\sin x\,\mathrm{d}x=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant \mathrm{N}}(-1)^k\left[\mathrm{F}^{(2k)}(0)+\mathrm{F}^{(2k)}(\pi)\right]$.

2°) Soit a et b deux entiers naturels strictement positifs. Pour tout entier naturel n, on considère le polynôme $P_n=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel k, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs (distinguer les trois cas pour $n\geqslant 1$: $0\leqslant k\leqslant n-1$; $n\leqslant k\leqslant 2n$; $k\geqslant 2n+1$).

b) Calculer le maximum de P_n sur $\left[0\,;\frac{a}{b}\right]$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{a}{b}} P_n(x)\,\sin x\,\mathrm{d}x$.

3°) Démontrer que le nombre π est irrationnel (raisonner par l'absurde en utilisant les deux premières questions).

69 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ positive et décroissante, continue par morceaux. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\right) - \int_{[0\,;\,n]} f$.

Démontrer que la suite (S_n) converge.

Application : Étudier la nature des suites de termes généraux $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

70 Pour tout entier naturel n non nul on pose $I_n = \int_1^{e} (\ln x)^n \,dx$.

1°) Étudier la monotonie de (I_n) ; démontrer que la suite (I_n) converge.

2°) Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).

3°) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4°) Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$.
Étudier la convergence de (u_n) suivant les valeurs de u_1 (pour ce faire, considérer la suite de terme général $u_n - I_n$).

71 Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{th}\left(\frac{k}{n}\right)$.

72 Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{3n}\right)}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \tan^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$.

73 Soit θ un réel fixé tel que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \tan\left(\frac{k\theta}{n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \tan^2\left(\frac{k\theta}{n}\right)$.

74 Soit θ un réel fixé tel que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Calculer la limite de chacune des suites de terme général :

$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos\left(\frac{k\theta}{n}\right)}$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\theta}{n}\right)}$.

75 Soit f la fonction définie par $f(x) = (5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}$.
Déterminer l'intervalle de définition D de f et calculer l'intégrale de f sur D.

76 **Un changement de variable affine utile à connaître**

Soit f une fonction de $I = [a\,;b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$ continue. Transformer l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ à l'aide du changement de variable $u = a + b - x$.

Application : Utiliser ce changement de variable pour calculer les intégrales suivantes :

$J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

$K = \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ (pour K, utiliser d'abord le changement de variable $x = \tan t$)

77 Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k)^2 + k^2}}$.

78 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

Démontrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

79 Soit u une fonction de l'intervalle $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et telle que $u(1) = 0$.

Démontrer que l'on a : $\int_I u^2 \leqslant \int_I (u')^2$.

Indications : considérer l'intégrale $\int_I [u'(t) + u(t)\tan t]^2\,dt$.

80 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1°) Démontrer que pour tout $x \in I$ il existe un réel $y \in I$ tel que l'on ait : $f(x) = \frac{x(x-1)}{2} f''(y)$.
On pourra s'inspirer de la méthode de démonstration de la formule de Taylor-Lagrange.

2°) On pose $M = \max_I |f''|$. Démontrer que l'on a : $\left|\int_I f\right| \leqslant \frac{M}{12}$.

81 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. Pour tout élément u de E on pose $N(u) = \sqrt{[u(0)]^2 + \int_I (u')^2}$.

Démontrer que N est une norme sur E.

82 Soit u une fonction de l'intervalle $I=[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $u(0)=u(\pi)=0$.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_I u^2 \leqslant \int_I (u')^2$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Indication : considérer l'intégrale $\displaystyle\int_I \left[u'(t)-u(t)\ \cot t\right]^2 \, dt$.

83 Soit u une fonction de l'intervalle $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $u(0)=u(1)=0$. On pose $M=\max\limits_I |u'|$.

Démontrer que l'on a $\left|\displaystyle\int_I u\right| \leqslant \frac{M}{4}$.

Indication : appliquer la relation de Chasles avec les intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

84 Soit u une fonction de l'intervalle $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $u(0)=u(1)=0$. On pose $m=\min\limits_I u'$ et $M=\max\limits_I u'$.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\frac{m}{4} \leqslant \int_I u \leqslant \frac{M}{4}$.

Indication : appliquer la relation de Chasles avec les intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

85 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\displaystyle R_n=\int_I f(t)\ dt-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

1°) Soit n un entier naturel non nul fixé. Pour tout entier $k\in\{0,\ldots,n\}$, on pose $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$.

a) Démontrer que $\displaystyle R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f(t)-f(x_k)\right]\ dt$.

b) Pour tout entier $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, on pose $m_k=\inf\limits_{t\in[x_k,\,x_{k+1}]} f'(t)$ et $M_k=\sup\limits_{t\in[x_k,\,x_{k+1}]} f'(t)$. Déterminer un encadrement de R_n par deux sommes faisant intervenir les m_k et M_k.

2°) Démontrer que $nR_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right]$.

86 Soit a un réel strictement positif . Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f^2(x)=\int_0^x\left(f^2(x)+f'^2(t)\right)\ dt+a.$$

87 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux, périodique de période $T>0$. Pour tout réel x on pose : $\displaystyle F(x)=\int_0^x f(t)\ dt$.

Déterminer un condition nécessaire et suffisante pour que F soit bornée.

Déterminer la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ quand $x\to+\infty$.

88 Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs réelles, décroissante et continue par morceaux.

Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\displaystyle\int_{J_n} f+f(n)\leqslant\sum_{k=1}^{n} f(k)\leqslant f(1)+\int_{J_n} f$ avec $J_n=[1\,;n]$.

Application :

Déterminer un équivalent de $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ (α est un réel fixé tel que $0<\alpha\leqslant 1$).

89 Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs réelles, croissante et continue par morceaux.

Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\displaystyle\int_{J_n} f+f(1)\leqslant\sum_{k=1}^{n} f(k)\leqslant f(n)+\int_{J_n} f$ avec $J_n=[1\,;n]$.

Applications :

- Déterminer un équivalent de $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ (α est un réel strictement positif fixé).
- Déterminer un équivalent de $\displaystyle S_n'=\sum_{k=1}^{n}\ln k$

90 Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. La fonction f est dérivable sauf éventuellement en un nombre fini de points de I ; on prolonge la dérivée de f en une fonction encore notée f' (continue par morceaux) en prenant des valeurs quelconques aux points où f n'est pas dérivable.

Calculer $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f'$.

91 Soit F la fonction définie par $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\tan x\right)$.

Préciser D_F, $D_{F'}$ et calculer $F'(x)$.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

92 Soit α un réel strictement positif fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^\alpha}$.

Déterminer un équivalent de S_n lorsque $n\to+\infty$.

93 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

Démontrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

94 Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{J}_n = \int_0^2 \frac{\sin(n\pi x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1°) Trouver la limite de (J_n) lorsque n tend vers + ∞.

2°) Trouver un équivalent de J_n lorsque n tend vers + ∞.

95 Soit F la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

Trouver la limite de F en 1.

Remarque : On peut démontrer que F ainsi prolongé par continuité est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et même développable en série entière au voisinage de 1.

96 Dans cet exercice, I désigne l'intervalle [0 ; 2π] et E l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(u\,|\,v) = \int_I uv$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction u_n définie sur I par $u_n(x) = \cos(nx)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction v_n définie sur I par $v_n(x) = \sin(nx)$.

Démontrer que la famille constituée des fonctions u_n et v_n est orthogonale ; en déduire que cette famille est libre.

97 Soit a un réel strictement positif distinct de 1.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{a^k}$.

98 **Intégrales de Bessel**

Calculer $B(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \,\mathrm{d}x$ $\left((p, q) \in \mathbb{N}^2\right)$.

Indication : déterminer une relation liant $B(p, q)$ et $B(p+1, q-1)$.

Ces intégrales sont appelées intégrales de Bessel de 1ère espèce.

En déduire $\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k \mathrm{C}_q^k}{p+k+1}$.

99 Calculer $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$ $(n \in \mathbb{N})$; en déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mathrm{C}_q^k}{2k+1}$.

Corrigé

4 $\mathrm{I} = \ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4}$

5 $\mathrm{I} = \mathrm{J} = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$

6 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi \ln 2}{8}$

8 $\int_1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \frac{a}{2}$

11 $2\ln 2 - 1$

12 En dérivant, on obtient $f''(x) = f(x)$

D'où $f(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$.

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) = a\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = 2a \operatorname{sh} x$.

On trouve $a = \frac{1}{2}$.

$f(x) = \operatorname{sh} x$

17 3°) b) $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

On calcule $\mathrm{I} = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin^2 u$.

$\mathrm{I} = \int_0^x u \sin 2u \,\mathrm{d}u$

On calcule $\mathrm{I}' = \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \cos^2 u$.

$\mathrm{I}' = \int_{\frac{\pi}{2}}^x u \sin 2u \,\mathrm{d}u$

D'où $f(x) = \mathrm{I} + \mathrm{I}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin 2u \,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$.

$\boxed{20}$ 1°) $\alpha \approx 1,20$ à 10^{-2} près 3°) Attention suivant que $x>1$ ou $x<1$.

$\boxed{21}$ $f(u)=\int_0^u g(t)\,\mathrm{d}t$

$|f(u)| \leqslant u \sup\limits_{[0\,;u]} |g|$

$\forall u\in[0\,;x]$ $\quad |f(u)|\leqslant x\times \sup\limits_{[0\,;x]}|g|$

$F(x)\leqslant x\times G(x)$

De même, $G(x)\leqslant x\times F(x)$.

Donc $F(x)\leqslant x^2F(x)$. Or $F(x)\geqslant x^2F(x)$ car $x\in[0\,;1]$.

Donc $F(x)=x^2F(x)$ d'où $\forall x\in[0\,;1[$ $\quad F(x)=0$

$\forall x\in[0\,;1[$ $\quad f(x)=0 \Rightarrow f=0$ sur $[0\,;1]$.

De même $\forall x\in[0\,;1[$ $G(x)=0$ d'où $\forall x\in[0\,;1[$ $g(x)=0 \Rightarrow g=0$ sur $[0\,;1]$.

$\boxed{22}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac12 \left(\int_0^1 f\right)^2$

$\boxed{24}$ 2°) $c_0=\frac12$

3°) $f_{n+1}\geqslant f_n$; $c_n \geqslant c_{n+1} \Rightarrow (c_n)\downarrow$ $\quad \int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t \leqslant 1$

On suppose que $c_n\to l$ avec $l\neq 0$.

$$\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{\frac{l}{2}} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t}_{\text{positif}} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t + \underbrace{\int_l^{c_n}\mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t}_{\text{positif}}$$

et $\int_{\frac{l}{2}}^{l} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t \geqslant \frac{l}{2} \mathrm{e}^{n\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Donc $\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\mathrm{d}t \geqslant \frac{l}{2} \mathrm{e}^{n\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Donc il existe un entier naturel N tel que $\int_0^{c_N} \mathrm{e}^{Nt^2}\mathrm{d}t > 2 \geqslant 1$ donc $l=0$

$\boxed{27}$ (Exercice de révision) $\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant S_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$ donc $S_n\to 1$; $S'_n \to \frac{\pi}{4}$

$\boxed{28}$ **Partie A** 1°) $u_1 = \mathrm{e}-2$ 2°) $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$ 3°) $0\leqslant u_n\leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

$\boxed{29}$ 1°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n=0$ 2°) $\mathrm{I}_n = \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{n-1} - \frac{\mathrm{e}}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{n-1}$ $\quad \mathrm{I}_n \underset{+\infty}{\sim} \frac1n$

$\boxed{30}$ 2°) a) $\mathrm{I}_n = 2\frac{(\ln 2)^{n+1}}{n+1} - \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n+1}$ c) $\mathrm{I}_n \underset{+\infty}{\sim} 2\frac{(\ln 2)^{n+1}}{n}$.

$\boxed{31}$ Appliquer la formule de la moyenne (éventuellement, faire quelques cas ; par exemple, prendre la fonction identiquement égale à 1).

$\boxed{32}$ $$-\frac4n\sum_{k=1}^n \frac kn \ln\frac kn - 2\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -4\underbrace{\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x}_{-\frac14}$$

$U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$

$\boxed{39}$ **Intégrale de Poisson**

$\boxed{41}$ $\frac{\ln 2}{4}$ $\quad\boxed{42}$ $\frac{\pi}{6\sqrt3}$ $\quad\boxed{52}$ $\mathrm{V}=16\pi\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$

$\boxed{58}$ $F(x)=\frac32\ln\left(1+x^{\frac23}\right)$

$\boxed{64}$ $\mathrm{I}=2-\frac\pi2$

$\boxed{65}$ $\mathrm{I}=\frac\pi4$

$\boxed{32}$ $F(x)=\mathrm{e}^x\ln x - \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$

$\qquad = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x\ln x)$ car $\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}$

$F(x)\underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x \ln x$

$\boxed{34}$ 5°) c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac\pi4\,\mathrm{d}t$

$\boxed{35}$ 1°) Minoration $u_n\geqslant \ln(n+1)$

2°) b) Faire le changement de variable $u=nx$.

Solution :

1°) $u_n \geqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(n+1)$

2°) b) Il n'y a pas à calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$0 \leqslant u_n - \int_0^n \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

$0 \leqslant u_n - \ln(n+1) \leqslant \alpha$ ce qui donne $\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant \alpha + \ln(n+1)$ donc u_n est équivalent à $\ln n$.

$\boxed{37}$ On pose $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

$\boxed{41}$

$$\int_{\mathrm{I}} fg = f(b)G(b) + \int_{\mathrm{I}} (-f')G$$

Application :

1^{er} cas : $\frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ $\qquad \int_{\mathrm{I}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant 3$

2^{e} cas :

On applique la 2^{e} formule de la moyenne avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin x$.

$$\left| \int_{\mathrm{I}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{4}{\pi} \leqslant 3$$

3^{e} cas :

$\boxed{43}$ $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$

J'avais noté au dos d'une feuille : $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ (je note cela le 19-3-2016) donc c'est sous toute réserve.

$\boxed{46}$ Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$\boxed{44}$ Pour tout entier naturel n non nul on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$

$\boxed{48}$ Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$. Démontrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

$\boxed{48}$ $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]_0^1 = \mathrm{e}$

$\boxed{65}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \ldots + \sqrt[n]{2^n}\right) = \int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}$

88 Note rajoutée le 25-3-2016 (le jour où je tape cet exercice) :

On peut illustrer graphiquement dans le cas où la fonction est à valeurs positives ou nulles.

Questions de cours sur intégrales et primitives

$\boxed{1}$ Intégrale fonction de sa borne supérieure. Expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive.

$\boxed{2}$ Changement de variable (théorie). Énoncé du théorème (avec les hypothèses). Démonstration.

$\boxed{3}$ Changement de variable affine. Applications : intégrale d'une fonction paire, impaire, périodique.

Exemple : étudier la parité de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

$\boxed{4}$ Pratique du changement de variable. Transformation directe. Transformation réciproque.
a) les bornes ;
b) l'élément différentiel ;
c) le changement.

Exemple : calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

$\boxed{5}$ Formule d'intégration par parties. Énoncé avec hypothèses. Démonstrations. Application à la détermination d'une primitive de la fonction ln.

$\boxed{6}$ Astuces de calcul pour les primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^p x \times \sin^q x$ où p et q sont deux entiers naturels.