TS1

Contrôle du vendredi 3 février 2012 (45 minutes)

Ne rien écrire, ne rien entourer en dehors de ce qui est demandé, ne rien surligner sur cet énoncé.
Les traits de fraction ainsi que les symboles de racine carrée doivent faits à la règle.

Prénom et nom : ……………………………………………………………………

Note : ….. / 20

I. (2)	II. (4)	III. (4)	IV. (5)	V. (2)	VI. (2)	VII. (1)
………	………	………	………	………	………	………

I. (2 points) Question de cours

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Compléter les égalités suivantes l'aide de arg z et arg z'.

$\arg \overline{z} =$ ………………… $[2\pi]$	$\arg \dfrac{z}{z'} =$ ………………… $[2\pi]$
$\arg\left(z^2\right) =$ ………………… $[2\pi]$	$\arg\left(-z\right) =$ ………………… $[2\pi]$

II. (4 points) Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $Z = \dfrac{\mathrm{i}\overline{z}}{1-z}$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) $\overline{Z}$ est égal à (choisir la proposition exacte) :

$\dfrac{-\mathrm{i}z}{1-z}$ $\qquad$ $\dfrac{-\mathrm{i}z}{z-1}$ $\qquad$ $\dfrac{-\mathrm{i}z}{\overline{z}-1}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{i}z}{\overline{z}-1}$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{i}z}{1-\overline{z}}$

2°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 1.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan d'affixe z ($z \neq 1$) tels que $\left|Z\right| = 1$.
Le tracé de E n'est pas demandé. Écrire dans le cadre page suivante ; on peut rajouter des lignes.

Soit M un point quelconque du plan d'affixe $z \neq 1$.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \left|Z\right| = 1$

$\Leftrightarrow$ ……………………..

$\Leftrightarrow$ ……………………..

Conclusion :

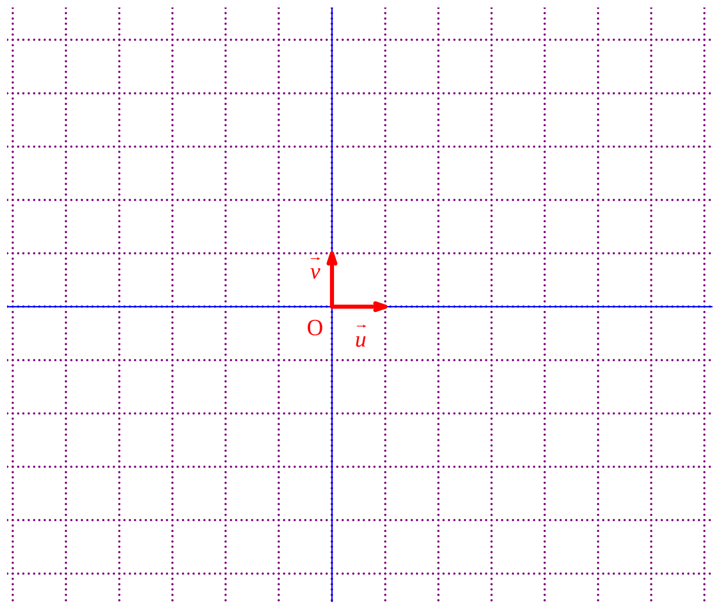
L'ensemble E est ……………………………………………………………………….. .

III. (4 points) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1°) On note E l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $2 \leqslant \left|z\right| \leqslant 5$.
Compléter l'équivalence suivante à l'aide d'une condition exprimée à l'aide de distance ou d'angle.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow$ ……………………………………..

Hachurer l'ensemble E sur le graphique ci-dessous.

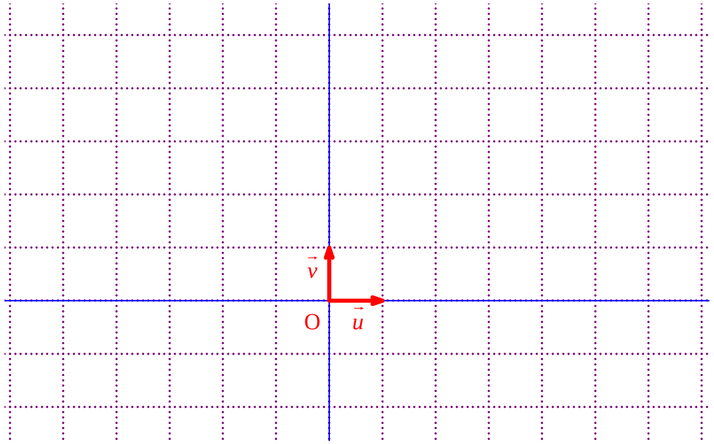


2°) On note F l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\arg z = \frac{\pi}{4}$ [2π].

Compléter l'équivalence suivante à l'aide d'une condition exprimée à l'aide de distance ou d'angle.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow$ ………………………………….

Représenter l'ensemble F sur le graphique ci-dessous.



IV. (5 points) On pose $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1°) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle (donner les réponses sans détailler les calculs).

2°) Calculer $z_1 z_2$ sous forme algébrique.

3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

1°) $z_1 =$ …………………… $z_2 =$ ……………………

2°) $z_1 z_2 =$ ………………………………………..

3°) $\cos\frac{\pi}{12} =$ …………………… $\sin\frac{\pi}{12} =$ ……………………

V. (2 points) On pose $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Calculer z^2 sous forme algébrique (la plus simple possible).

Déterminer un argument de z^2.

$z^2 =$ ……………

$\arg\left(z^2\right) =$ ……… [2π]

VI. (2 points) Une enquête faite auprès d'une population comprenant 51 % de femmes et 49 % d'hommes montre que 20 % des femmes et 15 % des hommes de cette population ne vont jamais au cinéma.
On choisit au hasard un individu de cette population.

Déterminer la probabilité que l'individu choisi fréquente les salles de cinéma (valeur décimale exacte).

La probabilité que l'individu choisi fréquente les salles de cinéma est égale à ………………………………….

VII. (1 point) On considère les fonctions $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^x - x - 2$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$.

Démontrer, en détaillant les principales étapes de calcul, que pour tout réel x, on a : $g'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

Corrigé du contrôle du 3-2-2012

I. Question de cours

$\arg \bar{z} = -\arg z \quad [2\pi]$	$\arg \dfrac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
$\arg\left(z^2\right) = 2\arg z \quad [2\pi]$	$\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

II. $Z = \dfrac{\mathrm{i}\bar{z}}{1-z} \quad (z \neq 1)$

1°)

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \overline{\left(\frac{\mathrm{i}\,\bar{z}}{1-z}\right)}\\ &= \frac{\bar{\mathrm{i}} \times \bar{\bar{z}}}{\overline{1-z}}\\ &= \frac{-\mathrm{i}\times z}{1-\bar{z}}\\ &= \frac{\mathrm{i}\times z}{-\left(1-\bar{z}\right)}\\ &= \frac{\mathrm{i}\times z}{\bar{z}-1}\end{aligned}$$

2°) Déterminons l'ensemble E des points M du plan d'affixe z ($z \neq 1$) tels que $|Z| = 1$.

Soit M un point quelconque du plan d'affixe $z \neq 1$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow |Z| = 1\\ &\Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{i}\,\bar{z}}{1-z}\right| = 1\\ &\Leftrightarrow \frac{|\mathrm{i}\,\bar{z}|}{|1-z|} = 1\\ &\Leftrightarrow \frac{|\mathrm{i}|\times|\bar{z}|}{|1-z|} = 1\\ &\Leftrightarrow \frac{1\times|z|}{|1-z|} = 1 \quad (\text{car } |\bar{z}| = |z|)\\ &\Leftrightarrow \frac{|z|}{|1-z|} = 1\\ &\Leftrightarrow |z| = |1-z|\\ &\Leftrightarrow \mathrm{OM} = \mathrm{AM}\end{aligned}$$

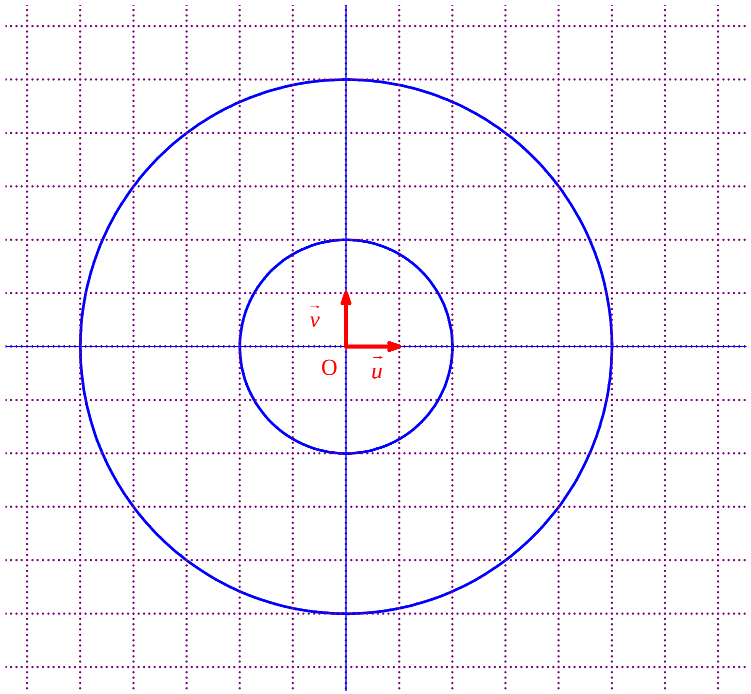
Conclusion :

L'ensemble E est la médiatrice du segment [OA].

III.

1°) $E = \left\{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, 2 \leqslant |z| \leqslant 5\right\}$

$$\mathrm{M} \in E \;\Leftrightarrow\; 2 \leqslant \mathrm{OM} \leqslant 5$$

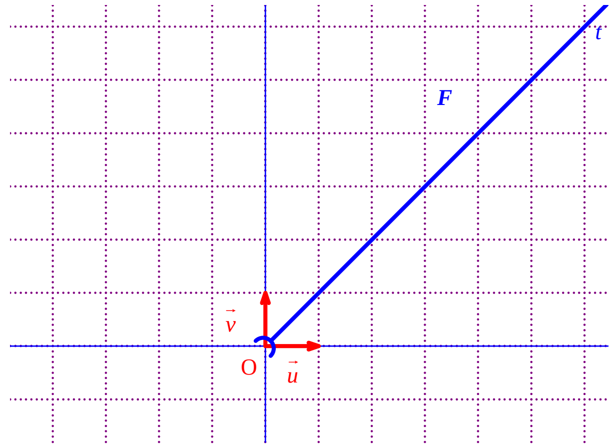


L'ensemble E est la couronne circulaire définie par les cercles de centre O et de rayons 2 et 5.

2°) $F = \left\{ \mathrm{M}(z) \in P \,/\, \arg z = \dfrac{\pi}{4} \ [2\pi] \right\}$

$$\mathrm{M} \in F \iff \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Quand on écrit arg z, cela suppose que $z \neq 0$ car 0 n'a pas d'argument.
On a donc $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$.
Le point O n'est donc pas dans l'ensemble F.



On peut marquer l'angle orienté formé par le vecteur $\vec{u}$ et la demi-droite.

L'ensemble F est la demi-droite ouverte d'origine O, faisant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses.
Pour montrer que demi-droite est ouverte, on met une marque pour montrer que le point O est exclu.

On peut dire que l'ensemble F est la demi-droite]Ot).

IV. $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $z_2 = 1 - \mathrm{i}$

1°) En appliquant la technique classique ou en factorisant, on obtient :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 1 - \mathrm{i} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2°)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)(1 - \mathrm{i}) \\ &= 1 - \mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right) \end{aligned}$$

$z_1 z_2 = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$

3°)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, on obtient successivement :

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

V. $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Calculons z^2 sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2+2\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \text{(identité remarquable)} \\ &= 2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)+2\mathrm{i}\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right)} \\ &= 2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+2\mathrm{i}\sqrt{4-3} \\ &= 2\sqrt{3}+2\mathrm{i} \longleftarrow \text{ forme algébrique} \end{aligned}$$

Déterminons un argument de z^2.

Méthode : On écrit z^2 sous forme trigonométrique ou, ce qui revient au même, sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} z^2 &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\times\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(on fait une factorisation forcée de 4, qui est le module de } z^2\text{)} \\ &= 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

On a donc $\arg\left(z^2\right)=\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

VI.

Une enquête faite auprès d'une population comprenant 51 % de femmes et 49 % d'hommes montre que 20 % des femmes et 15 % des hommes de cette population ne vont jamais au cinéma.
On choisit au hasard un individu de cette population.

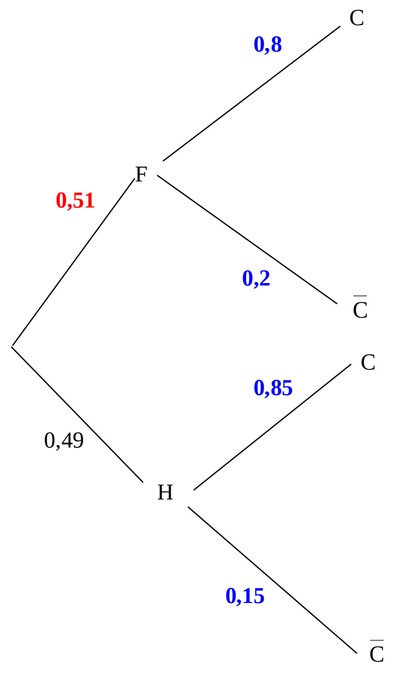
Représentons la situation par un arbre pondéré.

On définit les événements :

F : « L'individu est une femme »

H : « L'individu est un homme »

C : « L'individu va au cinéma »



Déterminons la probabilité que l'individu choisi fréquente les salles de cinéma.

Les événements F et H constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(\text{C}) &= P(\text{C} \cap \text{F}) + P(\text{C} \cap \text{H})\\ &= P(\text{F}) \times P(\text{C}/\text{F}) + P(\text{H}) \times P(\text{C}/\text{H})\\ &= 0{,}51 \times 0{,}8 + 0{,}49 \times 0{,}85\\ &= 0{,}8245\end{aligned}$$

La probabilité que l'individu choisi fréquente les salles de cinéma est égale à 0,8245.

VII.

$f : x \mapsto 2\mathrm{e}^{x} - x - 2$

$g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^{x}$

Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \mathrm{e}^{x} f(x)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \qquad &= 2\mathrm{e}^{2x} - \left[1 \times \mathrm{e}^{x} + (x+1)\mathrm{e}^{x}\right]\\ &= 2\mathrm{e}^{2x} - (x+2)\mathrm{e}^{x}\\ &= \mathrm{e}^{x}\left[2\mathrm{e}^{x} - (x+2)\right]\\ &= \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - x - 2\right)\\ &= \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - x - 2\right)\\ &= \mathrm{e}^{x} f(x)\end{aligned}$$