Exercices sur les intégrales (1)

1 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n=\int_{\mathrm{I}} f^n$.

1°) Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 2$, on a : $u_n u_{n-2}\geqslant {u_{n-1}}^2$.
2°) On suppose que f est à valeurs strictement positives sur I.

Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est convergente.

2 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $[0\,;1]$.

Comparer $\int_{\mathrm{I}} f$ et $\int_{\mathrm{I}} f^2$.

Préciser dans quel cas il y a égalité (autrement dit, déterminer les fonctions f définies et continues sur I à valeurs dans $[0\,;1]$ telles que $\int_{\mathrm{I}} f=\int_{\mathrm{I}} f^2$).

3 Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

1°) Démontrer qu'il existe un réel $a\in\mathrm{I}$ tel que $f(a)=\dfrac{1}{2}$.

2°) Démontrer que f admet un point fixe.

4 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ telle que, pour toute fonction φ en escalier sur I, on ait $\int_{\mathrm{I}} \varphi\, f=0$.

Déterminer f.

Indication : On pourra utiliser le théorème d'approximation rappelé ci-dessous.
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier φ définie sur I telle que pour tout $x\in\mathrm{I}$, on ait $|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$.

5 Soit f une fonction continue de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{I}_n=\int_0^1 \dfrac{xf(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n=\int_0^1 \dfrac{nf(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

Étudier la convergence de (I_n) et (J_n).

6 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathrm{I}} f^2=\int_{\mathrm{I}} f^3=\int_{\mathrm{I}} f^4$.
Démontrer que f est constante sur I.

Indication : On pourra calculer $\int_{\mathrm{I}}\left(f^2-f\right)^2$.

7 Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Pour toute fonction f de E, on pose $J(f)=\int_0^1 \left|\, f'(t)-f(t)\,\right|\,\mathrm{d}t$.

1°) Démontrer que pour toute fonction $f\in\mathrm{E}$, on a : $J(f)\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Indication : Calculer d'abord $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\left[f'(t)-f(t)\right]\mathrm{d}t$.

2°) Existe-t-il une fonction $f\in\mathrm{E}$ telle que $J(f)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$?

3°) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on considère la fonction f_n définie sur I par $f_n(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-n}}$.

a) Vérifier que $f_n\in\mathrm{E}$.
b) Calculer $J(f_n)$.
c) Justifier que l'ensemble $\{J(f),\ f\in\mathrm{E}\}$ admet une borne inférieure et donner sa valeur.

8 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\int_0^{\frac{1}{n}} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

Le 11-10-2020

On peut faire directement $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\int_0^{\frac{1}{x}} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

9 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $\forall k\in\{0,1,\ldots n\}$ $\int_{\mathrm{I}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f s'annule au moins $n+1$ fois en changeant de signe dans l'intervalle $]a\,;b[$.

1°) Calculer $\int_{\mathrm{I}} f(x)\,P(x)\,\mathrm{d}x$ pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Démontrer que f s'annule en changeant de signe au moins une fois dans l'intervalle $]a\,;b[$.
3°) On suppose que f s'annule en changeant de signe en $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$ $(a_1<a_2<\ldots<a_p)$ dans l'intervalle $]a\,;b[$ avec $p\leqslant n$.

Conclure en considérant $P(x)=\prod\limits_{i=1}^{p}(x-a_i)$.

10 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ ($a<b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que si l'on a : $\left|\int_{\mathrm{I}} f\right| = \int_{\mathrm{I}} |f|$, alors f est de signe constant sur I.

Indication : Écrire $f = f_+ - f_-$ et distinguer deux cas suivant que $\int_{\mathrm{I}} f \geqslant 0$ ou $\int_{\mathrm{I}} f \leqslant 0$.

11 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction en escalier définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ par

$f_n(x)=n$ si $x \in \left]0\,;\frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x)=0$ si $x=0$ ou si $x \in \left]\frac{1}{n}\,;1\right]$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ ($x \in \mathrm{I}$ fixé).

2°) Calculer $\int_{\mathrm{I}} f_n$.

12 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'on a : $\left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)^2 \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Préciser le cas d'égalité.

13 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2°) Démontrer que si $f(1)=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

14 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
On suppose qu'il existe un réel a tel que pour tout entier $k \in \{0\,;1\,;2\}$, on ait

$\int_0^{\pi} \cos(2kx)\, f(x)\,\mathrm{d}x = (4k+1)a$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f est identiquement nulle sur $[0\,;\pi]$.

1°) Pour tout entier $k \in \{0\,;1\,;2\}$, on pose $J_k = \int_0^{\pi} \cos^{2k} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$.

Calculer J_k, pour tout entier $k \in \{0\,;1\,;2\}$, en fonction de a.

2°) Calculer $J_0 + J_1 - J_2$; conclure.

15 Étudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n x^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

16 Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans l'intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<0<b$.

Démontrer que si $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $\int_{\mathrm{I}} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t \leqslant -ab$.

Méthode : On part de $(a-f(t))(b-f(t)) \leqslant 0$ pour tout réel $t \in \mathrm{I}$.

17 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel X, on pose $F(X) = \int_0^X f(\mathrm{E}(x))\,\mathrm{d}x$.

Donner une expression de $F(X)$.

Pour tout réel X, $\mathrm{E}(X)$ désigne la partie entière de X.

18 On considère la fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x)=x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x)=0$ sinon.

On se propose de démontrer que f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0\,;1]$.

1°) Démontrer que $\mathrm{I}_-(f)=0$.

2°) Soit h une fonction en escalier sur $[0\,;1]$ telle que pour tout $x \in [0\,;1]$ $f(x) \leqslant h(x)$.

On note $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à h.

Démontrer que $\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k (x_k - x_{k-1}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1})$.

En déduire que $\mathrm{I}_+(f) \geqslant \frac{1}{2}$.

3°) Conclure.

4°) Démontrer que $\mathrm{I}_+(f) = \frac{1}{2}$.

19 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2}+1$.

On considère la suite de fonctions (g_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $g_{n+1} = f \circ g_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

20 Soit a et b deux réels tels que $a<b$. On pose $\mathrm{I}=[a\,;b]$ et l'on note E l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Déterminer les fonctions $f \in E$ telles que pour toute fonction $g \in E$, on ait : $\int_{\mathrm{I}} fg = 0$.

21 **Première formule de la moyenne**

I désigne un intervalle $[a, b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur I dans $\mathbb{R}$ et g une fonction continue sur I dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives ou nulles.

Démontrer qu'il existe un réel $c \in \mathrm{I}$ tel que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} fg = f(c) \int_{\mathrm{I}} g$.

Application :

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} \,\mathrm{d}t$.

22 Soit f une fonction continue de $\mathrm{I} = [a\,;b]$ ($a < b$) dans $\mathbb{R}_+$. On pose $\mathrm{M} = \sup\limits_{\mathrm{I}} f$.

On veut démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\int_{\mathrm{I}} \left[f(x) \right]^n \mathrm{d}x} = \mathrm{M}$.

1°) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sqrt[n]{\int_{\mathrm{I}} \left[f(x) \right]^n \mathrm{d}x} \leqslant \mathrm{M}\sqrt[n]{b-a}$.

2°) Soit ε un réel strictement positif. À l'aide de la question précédente, démontrer qu'il existe un entier naturel N_1 tel que $n \geqslant \mathrm{N}_1 \Rightarrow \displaystyle\sqrt[n]{\int_{\mathrm{I}} \left[f(x) \right]^n \mathrm{d}x} \leqslant \mathrm{M} + \varepsilon$.

3°) Démontrer qu'il existe un intervalle $\mathrm{J} = [c\,;d]$ ($c < d$) inclus dans I tel que pour tout $t \in \mathrm{J}$ on ait $f(t) \geqslant \mathrm{M} - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Conclure.

23 Soit $a \in]0\,;1]$.

Déterminer toutes les fonctions f continues de $\mathrm{I} = [0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathrm{I}$ $\displaystyle f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication : Introduire $\mathrm{M} = \sup\limits_{x \in \mathrm{I}} |f(x)|$.

24 Soit u une fonction continue définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} u = \frac{1}{2}$.

1°) Démontrer que u admet au moins un point fixe x_0 dans I.
On considèrera la fonction v définie sur I par $v(t) = u(t) - t$.

2°) On suppose de plus que l'on a $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} tu(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$.

Démontrer que u admet au moins deux points fixes distincts dans I.
On considèrera la fonction w définie sur I par $w(t) = (t - x_0)v(t)$.

25 1°) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on pose $\mathrm{d}(x\,;\mathrm{A}) = \inf\limits_{a \in \mathrm{A}} |x - a|$.

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{d}(x\,;\mathrm{A})$ est continue (on pourra démontrer que f est lipschitzienne de rapport 1).

2°) Dans cette question, on prend $\mathrm{A} = \left\{ \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Calculer l'intégrale de f sur $[0\,;1]$ (on pourra s'aider de l'allure de la représentation graphique de f).

26 **Inégalité de Tchébytcheff**

1°) Soit $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ deux suites finies de réels de même monotonie.

Démontrer que $\displaystyle\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Indication : Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$.

2°) Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I = [0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux.

On suppose que f et g sont monotones et de même monotonie sur I.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_I f \times \int_I g \leqslant \int_I fg$.

Inégalité à rapprocher de l'inégalité de Grüss ?

Partie 1

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on pose $E = \mathbb{R}^n$.
Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$ deux éléments de E que l'on a pourra assimiler à des suites finies de réels.

On dit que a et b vérifient la condition S lorsque $\forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0$. Dans ce cas, on peut dire que les suites a et b sont synchrones.

1°) Dans cette question, on prend $n = 3$.
Démontrer que les suites $a = (4, 1, 2)$ et $b = (1, -1, 0)$ vérifient la condition S.

2°) Justifier que la condition S est vérifiée dans chacun des cas suivants :

- l'une des deux suites a ou b est constante ;
- les deux éléments a et b de E ont la même monotonie ;
- $b = \lambda a$ avec λ est un réel positif ;
- $b = a + (\lambda, \lambda, ..., \lambda)$ où λ est un réel.

3°) Soit a et b deux éléments de E vérifiant la condition S.

Démontrer que l'on a $\displaystyle\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Indication : Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$.

4°) Qu'obtient-on dans l'inégalité précédente lorsque l'une des suites a ou b est constante ?
5°) Quelle inégalité obtient-on lorsque $a = b$? Retrouver ce résultat par une autre manière.

Partie 2

1°) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que deux fonctions f et g définies sur I vérifient la condition S lorsque
$\forall (x,y)\in I^2 \quad \big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\geqslant 0$.
Dans ce cas, on peut dire que les fonctions f et g sont synchrones.
Justifier que la condition S est vérifiée lorsque :

- l'une des deux fonctions f ou g est constante ;
- les deux fonctions f et g ont la même monotonie sur I ;
- $g=\lambda f$ où λ est un réel positif ;
- $g=f+\lambda$ où λ est un réel.

2°) Dans toute la suite, on suppose que :

- I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ dont la longueur est égale à 1 ;
- f et g sont deux fonctions définies sur I continues par morceaux vérifiant la condition S.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_I f\times\int_I g\leqslant\int_I fg$.

Indication : considérer des sommes de Riemann et utiliser la partie 1.
Énoncer une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.
3°) Que donne l'inégalité précédente lorsque l'une des deux fonctions f ou g est constante ?
4°) Quelle inégalité obtient-on lorsque $f=g$? Retrouver ce résultat par une autre manière.

$\boxed{27}$ Soit u une fonction continue de $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Comparer $\displaystyle\left(\int_I u\right)^2$ et $\displaystyle\int_I u^2$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

Indication : On pourra calculer $\displaystyle\int_I (u-m)^2$ avec $\displaystyle m=\int_I u$.

$\boxed{28}$ Soit u une fonction continue de $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle \mathrm{e}^{\int_I u}\leqslant\int_I \mathrm{e}^u$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$ appliquée à $\displaystyle x=u(t)-\int_I u$.

À quelle condition y a-t-il égalité ?

$\boxed{29}$ Soit u une fonction continue sur $I=[0,1]$ à valeurs strictement positives.

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\left(\int_I u\right)\times\left(\int_I \frac{1}{u}\right)\geqslant 1$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

$\boxed{30}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Indication : On pourra utiliser le fait que $\displaystyle\frac{1}{\alpha}=\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ pour transformer l'écriture de S_n.

$\boxed{31}$ Même énoncé qu'au $\boxed{30}$ avec $\displaystyle S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{2(i+j)+1}$; $\displaystyle\frac{1}{2\alpha+1}=\int_0^1 t^{2\alpha}\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{32}$ **Inégalité de Jensen**

On pose $I=[0\,;1]$. Soit u une fonction de I dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux et φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En utilisant les sommes de Riemann, comparer : $\displaystyle\varphi\left(\int_I u\right)$ et $\displaystyle\int_I \varphi\circ u$.

$\boxed{33}$ Soit u une fonction continue de $I=[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait : $\displaystyle\int_I u(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0$.

1°) Démontrer que u admet au moins un zéro x_0 dans I.

2°) On suppose de plus que l'on a : $\displaystyle\int_I u(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$

Démontrer que u admet au moins deux zéros distincts dans I.
On pourra raisonner par l'absurde en considérant la fonction v définie sur I par $v(x)=u(x)\sin(x-x_0)$.

$\boxed{34}$ Soit f une fonction définie de $I=[a\,;b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\displaystyle u_n=\int_I f(x)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
Indication : Traiter d'abord le cas où f est positive.

$\boxed{35}$ Soit u une fonction définie sur $I=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $[0\,;1]$ continue.

Comparer $\displaystyle\int_I u^2$ et $\displaystyle\int_I u$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

Application :

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x>2$.

$\boxed{36}$ Soit u une fonction définie sur $I=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs dans $[0\,;1]$ continue par morceaux. Pour tout entier naturel n, on pose $\displaystyle a_n=\int_I u^n$.

Démontrer que la suite (a_n) converge.

$\boxed{37}$ Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I=[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

38 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[n]{\sin x}\ \mathrm{d}x$ (on pourra utiliser, après l'avoir prouvée, l'inégalité $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$ pour $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$).

39 Soit u une fonction continue définie sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans I.

Démontrer que l'on a $\int_{\mathrm{I}} u(1-u)\leqslant\frac{1}{4}$.

À quelle condition y a-t-il égalité ?

40 Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a,b]$ ($a<b$) à valeur dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall k\in\{0,\dots,n\}\quad \int_a^b x^k f(x)\ \mathrm{d}x=0.$$

1°) Soit P une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n. Que vaut $\int_{[a,b]} fP$?

2°) a) Démontrer qu'il existe au moins un réel de $]a,b[$ en lequel f s'annule et change de signe.

b) Démontrer que f s'annule et change de signe en au moins $n+1$ réels de $]a,b[$.

Indication : raisonner par l'absurde en supposant que x_1, …, x_n sont les réels de $]a,b[$ où f s'annule et change de signe puis considérer $P(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

41 Soit u une fonction définie sur un segment I de $\mathbb{R}$ à valeur positives ou nulles.

Pour tout entier naturel k, on pose $a_k=\int_I t^k u(t)\ \mathrm{d}t$.

Démontrer que pour toute suite finie $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ de réels on a : $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}a_{i+j}x_ix_j\geqslant 0$.

Indication : Considérer le carré du polynôme $P(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}x_it^i$.

Soit u une fonction définie sur un segment I de $\mathbb{R}$ à valeurs positives ou nulles.

Pour tout entier naturel $k\geqslant 1$, on pose $a_k=\int_I t^{k-1}u(t)\ \mathrm{d}t$.

Démontrer que $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\quad \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i+j}x_ix_j\geqslant 0$.

Indication : $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i+j}x_ix_j=\int_I\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_it^{i-\frac{1}{2}}\right)^2u(t)\ \mathrm{d}t$.

Application :

Démontrer que $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\quad \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}\geqslant 0$.

On peut aussi, en se limitant à des indices supérieurs ou égaux à 1, démontrer que $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}\geqslant 0$.

Voir pour cela, le DS1 d'Aurélien Poiret année scolaire 2020-2021.

42 **Lemme de Lebesgue**

Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathrm{I}=[a,b]$ ($a<b$) dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$J_n=\int_{\mathrm{I}} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x.$$

Démontrer que $J_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ lorsque f est en escalier sur I puis lorsque f est continue par morceaux (on pourra utiliser la propriété suivante d'approximation :

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\varphi$ en escalier sur I telle que $\forall x\in\mathrm{I}\quad |f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$)

Démontrer directement que $J_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ lorsque f est de classe C^1 par une méthode simple.

43 Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathrm{I}=[a,b]$ ($a<b$) dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$J_n=\int_{\mathrm{I}} f(x)|\sin(nx)|\ \mathrm{d}x.$$

Démontrer que (J_n) converge et exprimer sa limite en fonction de $\int_{\mathrm{I}} f$:

① dans le cas où f est constante

② puis dans le cas où f est en escalier

③ et enfin dans le cas où f est continue par morceaux (on pourra utiliser la propriété d'approximation suivante vue dans le cours : $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\varphi$ en escalier sur I telle que $\forall x\in\mathrm{I}\quad |f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$).

44 **Inégalités de Cauchy-Schwartz et de Minkovski**

Soit u et v deux fonctions de $\mathrm{I}=[a,b]$ ($a<b$) dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux.

1°) Démontrer que l'on a : $\left|\int_{\mathrm{I}} uv\right|\leqslant\sqrt{\int_{\mathrm{I}} u^2}\times\sqrt{\int_{\mathrm{I}} v^2}$.

À quelle condition y a-t-il égalité dans le cas où u et v sont continues ?

Indication : Considérer la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=\int_{\mathrm{I}}(tu+v)^2$.

2°) Démontrer que l'on a : $\sqrt{\int_{\mathrm{I}}(u+v)^2}\leqslant\sqrt{\int_{\mathrm{I}} u^2}+\sqrt{\int_{\mathrm{I}} v^2}$.

À quelle condition y a-t-il égalité dans le cas où u et v sont continues ?

45 Soit a_0 et b_0 deux réels fixés.

On considère les suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout entier naturel n, on ait $a_{n+1}=\int_0^1\max(x,b_n)\ \mathrm{d}x$

et $b_{n+1}=\int_0^1\min(x,a_n)\ \mathrm{d}x$.

Étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

46 À toute fonction f, continue sur l'intervalle $[0\,;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on associe la suite $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $a_k(f)=\int_0^1 x^k f(x)\ \mathrm{d}x$.

1°) Démontrer que pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[0\,;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a :

$a_k(f)\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$.

2°) Soit α et β deux réels vérifiant $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$.

Démontrer qu'il existe un polynôme P du second degré satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) : $\forall x\in\,]\alpha,\beta[\quad P(x)>1$

(ii) : $\forall x\in[0,\alpha]\cup[\beta,1]\quad 0\leqslant P(x)\leqslant 1$.

Un tel polynôme P étant choisi, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta [P(x)]^n\ \mathrm{d}x$.

3°) a) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe trois constantes ε, α, β avec $\varepsilon>0$ et $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$ telles que l'on ait

$\forall x\in[\alpha,\beta]\quad f(x)\geqslant\varepsilon$.

Soit alors un polynôme P satisfaisant aux conditions imposées dans la question précédente.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)\ [P(x)]^n\ \mathrm{d}x$.

b) En déduire que si f est une fonction continue sur $[0\,;1]$ telle que $a_k(f)=0$ pour tout entier naturel k, alors f est identiquement nulle.

On pourra raisonner par l'absurde.

4°) Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$.

a) Calculer $a_k(F)$ où F est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $F(x)=-\int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.

b) On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout entier naturel $k\geqslant p$, on ait $a_k(f)=0$.

Démontrer que f est identiquement nulle.

47 1°) Démontrer que pour tout réel $x\geqslant 0$, on a : $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$.

2°) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\sqrt{\dfrac{k}{n^3}}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right)$ $(\alpha>0)$.

48 Soit f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $I=[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)g\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

Indication :

Considérer $\mathrm{A}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)g\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

On pourra d'abord considérer le cas où g est lipschitzienne.

Application :

Soit α et β deux réels strictement positifs tels que $\alpha+\beta=1$.

Démontrer que la suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(n+k)^\alpha\times(n+k+1)^\beta}$ converge et déterminer sa limite.

Corrigé

$\boxed{2}$ « dans I » : très important
Dans l'énoncé initial, j'avais souligné deux fois le « à valeurs dans I »

Déterminer les fonctions f continues définies sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ à valeurs dans I telles que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f=\int_{\mathrm{I}} f^2$.

$\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(1-f)=0$; or, $f(1-f)\geqslant 0 \Rightarrow f(1-f)=0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=0$ ou $1-f(x)=0$.

Autre version possible (écrite le 19-4-2021) :
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$ $(a<b)$ à valeurs positives ou nulles.
On note M le maximum de f sur I.

Démontrer que $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f^2 \leqslant \mathrm{M}\int_{\mathrm{I}} f$.

$\boxed{3}$ 1°) Inégalité de la moyenne

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \min\limits_{[0\,;1]} f}}{m}\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underset{\substack{\uparrow\\ \max\limits_{[0\,;1]} f}}{M}$$

$$m\leqslant \frac{1}{2}\leqslant M$$

On applique le TVI à f sur l'intervalle $[0\,;1]$ car elle est continue sur $[0\,;1]$.

Donc il existe un réel $a\in[0\,;1]$ tel que $f(a)=\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{4}$ $\left|\, f^2-f\varphi \,\right|\leqslant \varepsilon M$ d'où $f\varphi-\varepsilon M\leqslant f^2\leqslant f\varphi+\varepsilon M$

On utilise un raisonnement à la Cauchy.

Autre méthode (Paul Dario le 7 février 2011) :

Si f n'est pas la fonction constante nulle, il existe un réel α dans I tel que $f(\alpha)\neq 0$.
1^er^ cas : $f(\alpha)>0$.
Il existe donc un réel $\varepsilon>0$ tel que $\forall x\in[\alpha-\varepsilon\,;\alpha+\varepsilon] \quad f(x)>0$.

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x)=\begin{vmatrix} 1 & \text{si } x\in[\alpha-\varepsilon\,;\alpha+\varepsilon] \\ 0 & \text{si } x\notin[\alpha-\varepsilon\,;\alpha+\varepsilon]\end{vmatrix}$.

La fonction φ est en escalier.

On a donc : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \varphi f=0$.

D'où $\displaystyle\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f=0$.

Or la fonction f est strictement positive et continue sur l'intervalle $[\alpha-\varepsilon\,;\alpha+\varepsilon]$.
On obtient ainsi une contradiction.
2^e^ cas : $f(\alpha)<0$.

Conclusion : la fonction f est la fonction nulle.

$\boxed{6}$ 2°) Non, sinon $f(t)=C\mathrm{e}^t \quad (C\in\mathbb{R})$.

$\boxed{8}$ On peut commencer par regarder ce qui se passe pour une fonction constante.
On écrit ensuite $f(t)=f(t)-f(0)+f(0)$.
On se donne un nombre $\varepsilon>0$.
On utilise la continuité de f en 0.
La limite est $\dfrac{f(0)}{2}$.

$\boxed{10}$ **Autre rédaction possible de l'indication :**

Exprimer f à l'aide de f_+ et de f_- et distinguer deux cas suivant le signe de $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f$.

$\boxed{14}$ 1°) $J_0=\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=a$.

$$J_1=\int_0^{\pi}\cos^2 x\; f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{5a}{2}=3a$$

$$J_2=\int_0^{\pi}\cos^4 x\; f(x)\mathrm{d}x=4a$$

2°) $J_0+J_1-J_2=0$

$$J_0+J_1-J_2=\int_0^{\pi}\left(1+\cos^2 x-\cos^4 x\right)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or $1+\cos^2 x-\cos^4 x=1+\cos^2 x\sin^2 x\geqslant 1$ d'où la conclusion.

$$J_0+J_1-J_2=\int_0^{\pi}\left(1+\cos^2 x\sin^2 x\right)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{17}$ Il faut distinguer des cas suivants les valeurs de X.

Si $X\geqslant 1$, alors $f(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(X)-1} f(k)+\left(x-\mathrm{E}(X)\right)f\left(\mathrm{E}(X)\right)$.

Si $0\leqslant X<1$, alors $f(X)=Xf(0)$.
Si $X<0$, …

$\boxed{18}$

$f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon

1°) Démontrer que $\mathrm{I}_-(f) = 0$.

2°) h : fonction en escalier sur [0 ; 1] telle que $\forall x \in [0\,;1] \quad f(x) \leqslant h(x)$.
On note $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à h.

h vaut c_i sur l'intervalle $]x_{i-1}\,;x_i[$.
Or $\forall x \in]x_{i-1}\,;x_i[\cap \mathbb{Q} \quad h(x) \geqslant x$.
D'où $\forall x \in]x_{i-1}\,;x_i[\cap \mathbb{Q} \quad c_i \geqslant x$.

On prend une suite de rationnels (r_n) dans l'intervalle $]x_{i-1}\,;x_i[$ qui tend vers x_i.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad r_n \leqslant c_i$.
Par conséquent, en appliquant le TPLI, on obtient : $x_i \leqslant c_i$.

3°) Conclure.
4°) $\forall x \in [0\,;1] \quad f(x) \leqslant x$

Donc $\mathrm{I}_+(f) \leqslant \mathrm{I}_+(x) = \mathrm{I}(x) = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{19}$ $g_n(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (x-2) + 2$

$\boxed{26}$ Remarque : On peut prendre pour I un intervalle fermé borné de longueur 1.

$\boxed{27}$ Autre version :
Soit u une fonction continue de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que l'on a : $\left(\displaystyle\int_I u\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_I u^2$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

J'ai mis sur le site une autre version meilleure.

$\boxed{30}$ $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\left(1-(-t)^n\right)^2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$\boxed{34}$ Dans le cas où f est positive ou nulle sur I, on a $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lorsque f est de signe quelconque, on pose $f = f_+ - f_-$.

$\boxed{37}$ Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution :
Appliquer la formule de la moyenne (éventuellement faire quelques cas : f identiquement égale à 1).

$\boxed{45}$ **Étude de suites définies par des intégrales**

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ on a $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$

Si $x \leqslant 0$ on a $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

Si $x \geqslant 1$ on a $F(x) = x$.

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $G(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$

Si $x \leqslant 0$, on a $G(x) = x$.

Si $x \geqslant 1$, on a $G(x) = \dfrac{1}{2}$.

$$\forall n \geqslant 2 \quad a_{n+2} = G(b_{n+1}) = (G \circ F)(a_n)$$
$$b_{n+2} = (F \circ G)(b_n)$$

$\boxed{46}$ 4°) a) $a_k(F) = -\dfrac{a_{k+1}(f)}{k+1}$

$\boxed{48}$ Dans le cas général, il faut utiliser la continuité uniforme de g.

Voir document :

[Oral Centrale] Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

puis en déduire celle de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Questions de cours

Théorie de l'intégration

$\boxed{1}$ Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Exemple (illustration graphique).
Exemple de fonction non continue par morceaux.
Propriétés (toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée). Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment). Partie positive, partie négative, valeur absolue d'une fonction continue par morceaux.

$\boxed{2}$ Subdivision d'un segment. Subdivision régulière. Subdivision plus fine qu'une autre.

$\boxed{3}$ Définition d'une fonction en escalier sur un segment. Subdivision adaptée.
Structure d'espace vectoriel d'une fonction en escalier sur un segment.
Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.

$\boxed{4}$ Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

$\boxed{5}$ Positivité de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Cas de nullité dans le cas d'une fonction continue sur un segment de signe constant.

$\boxed{6}$ Linéarité de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

$\boxed{7}$ Somme de Riemann d'une fonction continue sur un segment.
Théorème de convergence des sommes de Riemann.
Donner une illustration des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction continue par morceaux à valeurs positives ou nulles.
Donner un encadrement de l'intégrale à l'aide de sommes de Riemann dans le cas d'une fonction continue par morceaux monotone à valeurs positives ou nulles. Préciser l'amplitude de l'encadrement.

$\boxed{8}$ Inégalité de Cauchy-Schwartz (énoncé et démonstration).
Si manque de temps, donner uniquement le principe de la démonstration.

$\boxed{9}$ Théorème d'approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

$\boxed{10}$ Cahier des charges d'un opérateur d'intégration sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment.

$\boxed{11}$ Inégalité de la moyenne pour les intégrales (énoncé et démonstration).

$\boxed{12}$ Le théorème fondamental de l'analyse (hypothèses, énoncé et démonstration).

$\boxed{13}$ Le théorème du changement de variable (hypothèses, formule, démonstration et si possible un exemple).

$\boxed{14}$ Le théorème d'intégration par parties (hypothèses, formule, démonstration et exemple).

$\boxed{15}$ Formule de Taylor avec reste intégral (hypothèses, énoncé, démonstration) ; inégalité qui en résulte.
Application : écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle entre 0 et x.

$\boxed{16}$ Intégrale d'une fonction continue par morceaux paire sur un segment centré en 0, intégrale d'une fonction continue par morceaux impaire sur un segment centré en 0, intégrale d'une fonction continue par morceaux périodique sur une période.

$\boxed{17}$ Cahier des charges

$\boxed{18}$ Intégrale supérieure et inférieure d'une fonction bornée f (hors-programme) $\mathrm{I}_+(f)$ et $\mathrm{I}_-(f)$.

$\boxed{19}$ Propriétés, évaluation (validation) du cahier des charges

$\boxed{20}$ Fonctions φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$
φ et ψ sont appelées **fonctions de Darboux**.