

# Expériences aléatoires indépendantes

## Expériences aléatoires répétées

### Objectifs :

- Modélisation d'expériences indépendantes et en particulier d'expériences aléatoires répétées dans des conditions identiques indépendantes

- Influence du passé sur l'avenir

### I. Introduction

#### 1°) Situation étudiée

On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note le numéro obtenu. On répète cette expérience 10 fois. On a obtenu 10 fois le 6.

#### 2°) Parmi ces phrases quelle(s) est (sont) celle(s) qui est (sont) vraie(s) ?

- (1) La 11<sup>e</sup> fois qu'on lance ce dé la probabilité d'obtenir le 6 est plus grande que celle d'obtenir un autre nombre.
- (2) La 11<sup>e</sup> fois qu'on lance ce dé la probabilité d'obtenir le 6 est moins grande que celle d'obtenir un autre nombre.
- (3) La 11<sup>e</sup> fois qu'on lance ce dé la probabilité d'obtenir le 6 est la même que celle d'obtenir un autre nombre.

#### 3°) Réponses

Les lancers sont indépendants. Il n'y a aucune influence des lancers précédents sur les lancers suivants. Donc la 11<sup>e</sup> fois qu'on lance le dé la probabilité d'obtenir le 6 est la même que celle d'obtenir un autre nombre, c'est-à-dire  $\frac{1}{6}$ .

#### 4°) Bilan

On peut dire que le dé n'a pas de « mémoire ».

On peut dire aussi que le passé n'a pas d'influence sur l'avenir.

### II. Expériences aléatoires successives

#### 1°) Écriture des résultats pour des expériences successives

Pour des expériences aléatoires successives, on écrit le résultat global sous la forme d'une **liste ordonnée**.

#### Exemple :

#### 2°) Utilisation d'arbres pondérés

#### 3°) Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

Les règles suivantes précisent les conditions à respecter pour construire un arbre pondéré représentant des expériences aléatoires successives et calculer les probabilités des événements.

##### • Règle 1 (« Loi des nœuds »)

**La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud vaut 1.**

##### • Règle 2 (« Loi des chemins »)

**La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.**

##### • Règle 3

**La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de A.**

Autrement dit, pour les règles 2 et 3, dans le cas d'expériences aléatoires successives représentées par un arbre pondéré, les probabilités se calculent ainsi :

- la probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par ces branches ;

- la probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins est alors obtenue en ajoutant les probabilités des événements correspondants à chaque chemin.

### III. Expériences aléatoires indépendantes

#### 1°) Définition

On dit que des expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'est pas affecté par les résultats des autres.

## 2°) Exemples

- tirages successifs de boules dans des urnes distinctes
- lancers successifs de dés distincts

## 3°) Contre-exemple

Tirages successifs de boules dans une urne sans remise.

## 4°) Cas particulier important : répétition d'une expérience aléatoire dans des conditions identiques indépendantes

- tirages successifs dans une urne avec remise
- lancers successifs d'un dé

Voir paragraphe IV.

## 5°) Principe multiplicatif (admis sans démonstration)

**Dans des expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste ordonnée de résultats est égale au produit des probabilités des résultats pour chaque expérience aléatoire.**

La modélisation d'expériences aléatoires successives indépendantes se fera surtout grâce à des arbres pondérés.

## IV. Expériences aléatoires répétées dans des conditions identiques indépendantes

Il s'agit d'un cas particulier d'expériences aléatoires indépendantes.

### 1°) Exemples d'expériences aléatoires répétées dans des conditions identiques indépendantes

- tirages successifs dans une urne avec remise
- lancers successifs d'un dé
- marches aléatoires sur une droite, dans le plan...

Ce genre d'expérience aléatoire se prête particulièrement bien aux simulations (voir exercices). On pourra se référer aux simulations de tirages avec remise (cf. cours d'algorithmique).

### 2°) Structure de l'arbre

À chaque niveau, le nombre de branches est le même et les probabilités sont les mêmes.

## 3°) Quelques résultats sur les expériences aléatoires indépendantes répétées

### a) Propriété

On considère une expérience aléatoire modélisée par  $(\Omega, P)$ .

Soit A un événement de cette expérience aléatoire.

Si on répète  $n$  fois ( $n \geq 1$ ), de manières indépendantes, cette même expérience aléatoire, alors la probabilité d'obtenir  $n$  fois l'événement A est égale à  $[P(A)]^n$ .

### b) Corollaire

La probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement A est la probabilité de l'événement contraire de « ne jamais obtenir l'événement A ».

Elle est donc égale à :  $1 - [P(\bar{A})]^n$ .

### c) Exemple

On lance 4 fois un dé cubique non truqué.

La probabilité d'obtenir au moins une fois le 6 est  $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$ .

$p \approx 0,52$

## 4°) Variables aléatoires liées à des situations d'expériences aléatoires répétées dans des conditions identiques indépendantes

Voir exercices.

## V. Exemple-type d'expériences aléatoires répétées dans des conditions identiques indépendantes

### 1°) Situation

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules.

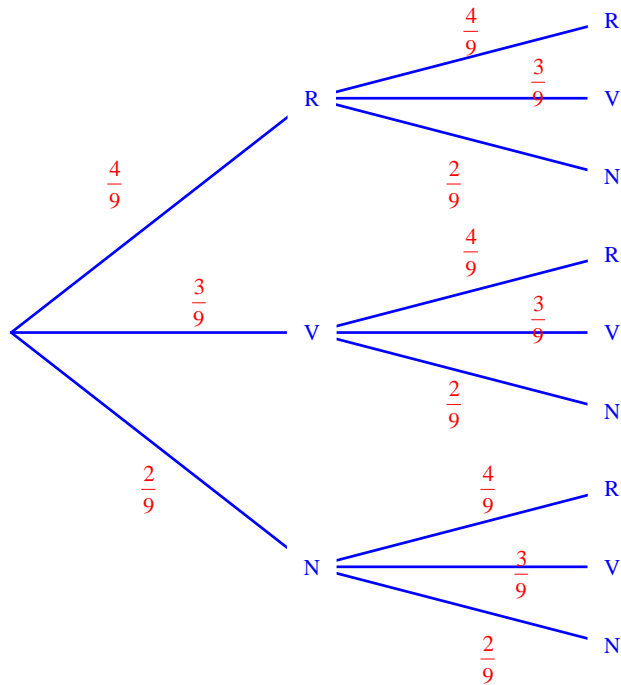
### 2°) Interprétation

Les deux tirages constituent chacune une expérience aléatoire.

Il s'agit d'une même expérience répétée deux fois dans des conditions identiques indépendantes.

### 3°) Arbre pondéré

La répétition peut être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Les issues de la répétition sont les listes :

(R ; R), (R ; V), (R ; N), (V ; R), (V ; V), (V ; N), (N ; R), (N ; V), (N ; N).

### 4°) Calcul de probabilité (utilisation de l'arbre)

Par exemple, la probabilité de la liste (R ; N) est égale à :  $\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}$ .

## VI. Loi géométrique tronquée et situation apparentées

### 1°) Situation

On dispose une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à  $p$  ou  $p$  est un réel appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$ .

On considère le jeu suivant :

On lance une première fois la pièce.

Si l'on obtient pile, on a gagné et le jeu s'arrête.

Si l'on obtient face, on relance la pièce une deuxième fois.

Si l'on obtient pile, on a gagné et le jeu s'arrête.

Si l'on obtient face, on relance la pièce une troisième fois.

etc.

On recommence au maximum quatre fois.

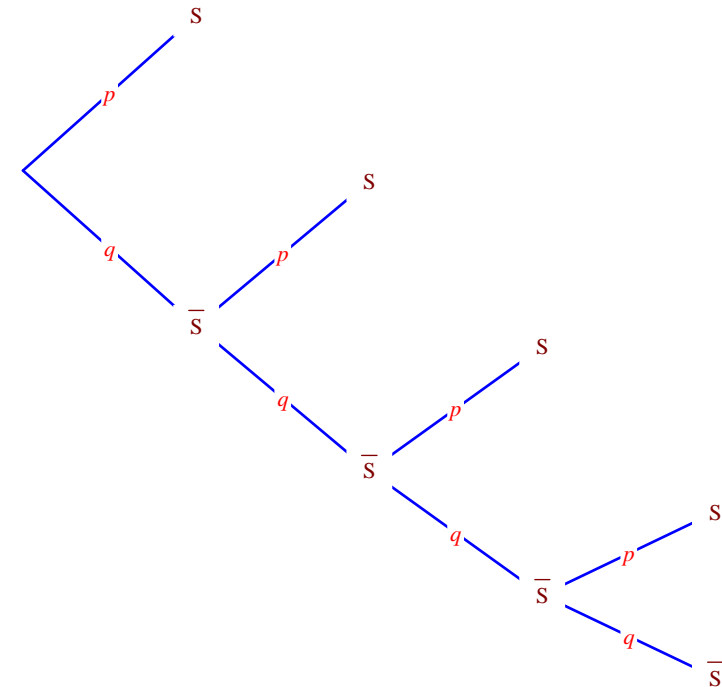
Au bout de quatre fois, le jeu s'arrête.

On considère l'événement  $S$  : « obtenir pile ».

$$P(S) = p$$

On note  $q = 1 - p$  (probabilité de l'événement contraire  $\bar{S}$ ).

La situation peut être modélisée par l'arbre suivant.



## 2°) Structure de l'arbre

L'arbre est « bancal » ; il s'arrête dès que l'événement  $\bar{S}$  apparaît.

On note  $X$  la variable aléatoire qui prend le numéro du lancer ou l'on a obtenu le premier pile et 0 si l'on n'a pas obtenu de pile.

La loi de probabilité de  $X$  est donnée dans l'arbre ci-dessous.

$x_i$	0	1	2	3	4	
$P(X = x_i)$	$q^4$	$p$	$pq$	$pq^2$	$pq^3$	Total = 1

## 3°) Situations-types

- marches aléatoires sur une droite, dans le plan et dans l'espace (voir exercices)
- jeux avec condition d'arrêt

## 4°) Simulations

- à l'aide de tables de chiffres au hasard
- à l'aide d'un algorithme (programme)

Voir exercices

## 5°) Situations apparentées à une loi géométrique tronquée

Jeux avec condition d'arrêt : on introduit une variable qui représente le gain (voir exercices)

## 6°) Algorithme de simulation de la loi géométrique tronquée

On dispose d'une pièce non truquée.  
On réalise l'expérience aléatoire suivante.

On lance une première fois la pièce.

Si l'on obtient pile, on a gagné et le jeu s'arrête.  
Si l'on obtient face, on relance la pièce une deuxième fois.

Si l'on obtient pile, on a gagné et le jeu s'arrête.  
Si l'on obtient face, on relance la pièce une troisième fois.

etc.

On recommence au maximum quatre fois.  
Au bout de quatre fois, le jeu s'arrête.

On désire écrire un algorithme qui simule l'expérience aléatoire étudiée et donne en sortie la valeur prise par  $X$ .

### Variables :

$x, a, k$  : nombres

### Initialisations :

$a$  prend la valeur 2 (on peut prendre n'importe quelle valeur autre que 0)

$k$  prend la valeur 0

### Traitement :

**Tantque** ( $a \neq 0$  et  $k < 4$ ) **Faire**

$k$  prend la valeur  $k + 1$

$a$  prend la valeur aléatoire 0 ou 1 (0 = Pile et 1 = Face)

**FinTantque**

**Si**  $a = 0$

    Alors  $x$  prend la valeur  $k$

**Sinon**  $x$  prend la valeur 0

**FinSi**

### Sortie :

Afficher  $x$

## Bilan :

- dé ou pièce sans mémoire
- influence du passé sur l'avenir