$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 16 janvier 2012 (15 minutes)

I. (1 point) Question de cours

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R. On considère un arc du cercle $\mathcal{C}$.
On note x la mesure en radians de l'angle au centre associé à cet arc de cercle.
Donner l'expression de la longueur l de l'arc de cercle en fonction de R et x.

II. (4 points)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.
Dans chaque cas, déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

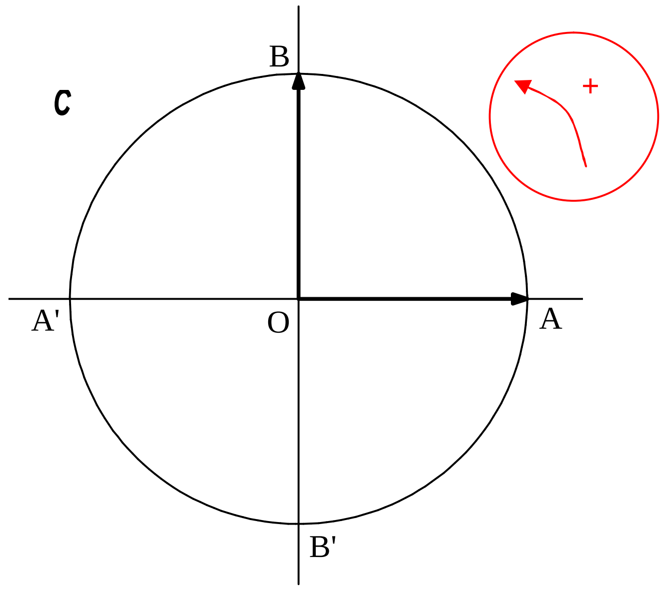
1°) $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = -\dfrac{29\pi}{4}$

2°) $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{202\pi}{3}$

III. (3 points)

Quel sont les points images sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ ci-contre des réels suivants ?

- $420\,\pi$
- -9π
- $\dfrac{13\pi}{2}$



IV. (1 point)

Soit ABCD un trapèze non croisé de bases [AB] et [CD] dans le plan orienté.
Donner une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

V. (2 points)

Soit EFGH un carré indirect de centre O du plan orienté.
Donner une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{EG}\right)$.

VI. (4 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient $n - 1$ boules blanches et $n + 1$ boules noires.
On tire successivement sans remise deux boules au hasard dans l'urne.

1°) Exprimer en fonction de n le nombre de tirages possibles.

2°) Exprimer en fonction de n la probabilité de tirer deux boules noires (résultat sous forme simplifiée).

VII. (5 points) Les deux questions sont indépendantes (les sommes S et S' n'ont pas de lien entre elles).

1°) a) Calculer la somme $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$.

b) Écrire S au moyen du symbole Σ en utilisant la variable k.

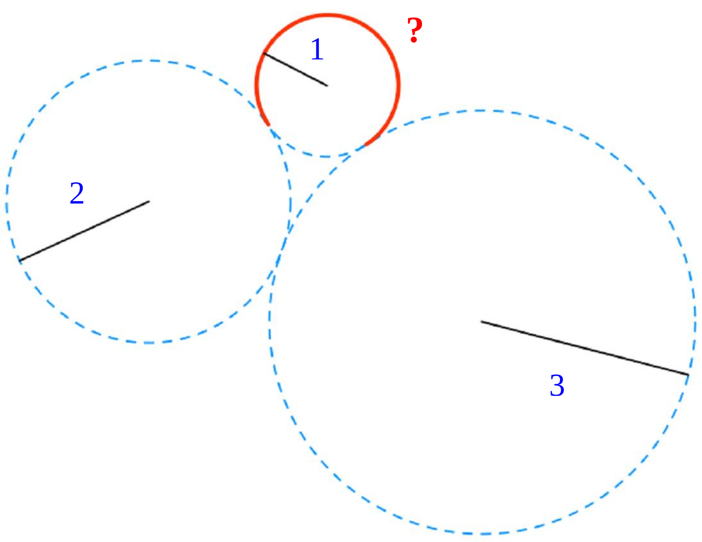
Compléter $S = \sum_{k=1}^{k=100} \ldots\ldots\ldots\ldots$

(à partir de l'expression initiale donnée en extension, et non à partir du résultat trouvé à la question a)).

2°) Calculer $S' = \sum_{k=0}^{k=5} 2^k$.

Bonus
(2 points)

Trois cercles de rayons respectifs 1, 2 et 3 sont tangents extérieurement comme le montre la figure ci-dessous.
Combien vaut la longueur du grand arc de cercle en gras sur la figure ?



Feuille de réponses du contrôle du lundi 16 janvier 2012

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ….. / 20

• Ne rien écrire ni surligner sur l'énoncé ni sur cette feuille.

• Écrire lisiblement et sans rature. Aucune justification n'est demandée.
Ne mettre qu'une seule réponse à chaque fois.

• Tirer les traits de fraction à la règle.

I. (1)	**II.** (4)	**III.** (3)	**IV.** (1)	**V.** (2)	**VI.** (4)	**VII.** (5)	**Bonus** (2)
………	………	………	………	………	………	………	………

I. (1 point) $I =$ …………………

II. (4 points)

1°) La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est ……………..

2°) La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est ……………..

III. (3 points)

• L'image sur $\mathcal{C}$ de 420 π est ……. .

• L'image sur $\mathcal{C}$ de -9π est ……. .

• L'image sur $\mathcal{C}$ de $\dfrac{13\pi}{2}$ est ……. .

IV. (1 point)

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est ……..

V. (2 points)

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}\right)$ est ……….. .

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{EG}\right)$ est ……….. .

VI. (4 points)

1°) Le nombre de tirages possibles est égal ………………………………..

2°) La probabilité de tirer deux boules noires est égale ……………………………….. .

VII. (5 points)

1°)

a) S = ………………..

b) $S = \sum\limits_{k=1}^{k=100}$..........

2°) S ' =………………...

Bonus :

Corrigé du contrôle du 16 janvier 2012

I. Formule de la longueur d'un arc de cercle

$$\boxed{l = R\,x}$$

II. Mesures principales d'angles orientés

La résolution présentée ci-dessous est faite de manière succinte.

1°) $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = -\dfrac{29\pi}{4}$

$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{3\pi}{4} - 8\pi$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{4}$.

2°) $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{202\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}, \vec{v}\right) &= -\frac{2\pi}{3} + \frac{204\pi}{3} \\ &= -\frac{2\pi}{3} + 68\pi\end{aligned}$$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

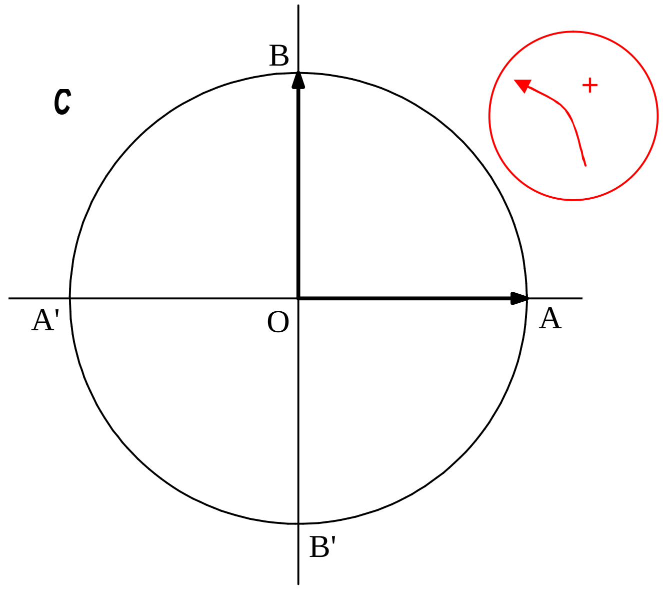
Compétence : déterminer la mesure principale d'un angle orienté.

III. Images de réels sur le cercle trigonométrique

• Le point image de 420π sur le cercle trigonométrique est le point A.

• Le point image de -9π sur le cercle trigonométrique est le point A'.

• Le point image de $\frac{13\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point B.



Méthodes :

1ère méthode :

On détermine la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$, en notant M le point image du réel considéré.

2e méthode :

On effectue des déplacements sur le cercle trigonométrique.

• Image de 420π :

On part de A, puis on effectue des déplacements dans le sens direct : un premier tour complet (2π), un deuxième tour (4π), un troisième tour…
Tous les multiples pairs de π ont pour image A.

• Image de -9π :

On part de A, puis on effectue des déplacements dans le sens indirect de manière à rencontrer tous les multiples négatifs de π : A'$(-\pi)$, A(-2π), A'(-3π), A(-4π) etc. A'(-9π).

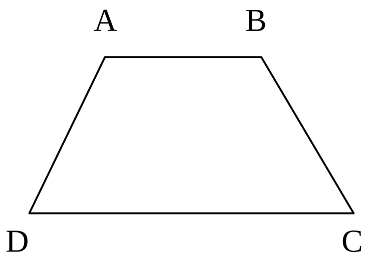
• Image de $\frac{13\pi}{2}$:

On part de A, puis on effectue des déplacements dans le sens indirect de manière à rencontrer tous les multiples positif de $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ etc. B$\left(\frac{13\pi}{2}\right)$

Compétence : déterminer l'image d'un réel sur le cercle trigonométrique.

IV. Détermination de la mesure d'un angle orienté dans un trapèze

ABCD est un trapèze non croisé de bases [AB] et [CD].



Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est π car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

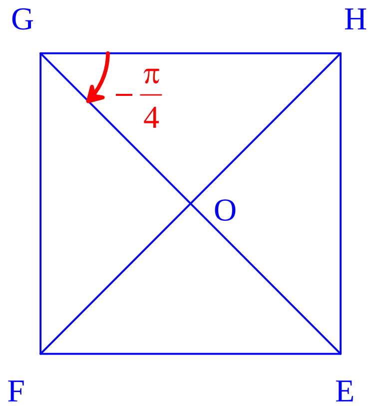
Compétence : lire une mesure d'angle orienté dans une configuration simple

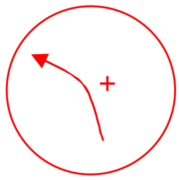
---

V. Détermination de mesures d'angles orientés dans un carré

EFGH carré indirect de centre O

On tourne dans le sens négatif lorsque l'on nomme les points E, F, G, H dans cet ordre.





Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{EG}\right)$ est π car les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Compétence : lire une mesure d'angle orienté dans une configuration simple

VI. Probabilités (expériences aléatoires à deux épreuves)

$$\text{urne}\ \left|\begin{array}{l} n-1 \text{ boules blanches} \\ \\ n+1 \text{ boules noires} \end{array}\right.$$

On tire successivement sans remise deux boules au hasard dans l'urne.

1°) **Exprimons en fonction de *n* le nombre de tirages possibles.**

Méthode : le premier travail à faire est de calculer le nombre total de boules dans l'urne.

Le nombre total de boules dans l'urne est égal $(n-1)+(n+1)=2n$.

Le nombre de tirages possibles est égal à : $2n\,(2n-1)$.

2°) **Exprimons en fonction de *n* la probabilité de tirer deux boules noires.**

La probabilité de tirer deux boules noires est égale à : $\dfrac{\cancel{n}(n+1)}{2\cancel{n}(2n-1)}=\dfrac{n+1}{2(2n-1)}$

VII. Sommes

Compétences :

- calculer astucieusement une somme ;

- écrire une somme avec le symbole Σ ;

- interpréter et calculer une somme écrite avec le symbole Σ.

1°) a) $S=1-2+3-4+5-6+\ldots+99-100$

On effectue une réécriture.

On groupe les termes deux par deux.
On observe que la somme de chaque groupement est égale à -1.
On réécrit S en séparant les termes groupés par des parenthèses.

$S=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots+(99-100)$

Chaque expression entre parenthèse est égale à -1.

$$S = \underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \ldots + (-1)}_{50 \text{ termes}}$$

On obtient immédiatement la valeur de S.
On écrit directement :

$S = -50$

b) À l'aide de la forme de base, on peut écrire S au moyen du symbole Σ en utilisant la variable k sous la forme suivante.

S est la somme de tous les entiers naturels de 1 à 100, chacun précédé d'un signe.
Le signe est positif si l'entier est impair.

Le signe est négatif si l'entier est pair.

Donc on va pouvoir écrire le terme général de la somme sous la forme $(-1)^{k+1} \times k$.

En effet,

si k est pair, alors $k + 1$ est impair et $(-1)^{k+1} = -1$

si k est impair, alors $k + 1$ est pair et $(-1)^{k+1} = 1$

On en déduit l'écriture condensée de S à l'aide du symbole Σ :

$$S = \sum_{k=1}^{k=100} (-1)^{k+1} k$$

2°) $S' = \sum_{k=0}^{k=5} 2^k$

Cette somme comporte 6 termes.
Dans cette somme, la variable k varie entre 0 et 5 (avec pas de 1, par convention du symbole, c'est-à-dire que k va prendre successivement toutes les valeurs des entiers de 0 à 5).

La formule du terme général de la somme est : 2^k.

Le 1er correspond à $k = 0$. Il est égal à $2^0 = 1$.

Le 2e correspond à $k = 1$. Il est égal à $2^1 = 2$.

Le 3e correspond à $k = 2$. Il est égal à $2^2 = 4$.

Le 4e correspond à $k = 3$. Il est égal à $2^3 = 8$.

Le 5e correspond à $k = 4$. Il est égal à $2^4 = 16$.

Le 6e correspond à $k = 5$. Il est égal à $2^4 = 32$.

On peut à présent écrire *S* ' en extension.

S ' = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 (somme des puissances 6 premières puissances de 2)
= 63

Version plus courte :

$S' = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
= 1 + 2+ 4 + 8 + 16 + 32
= 63

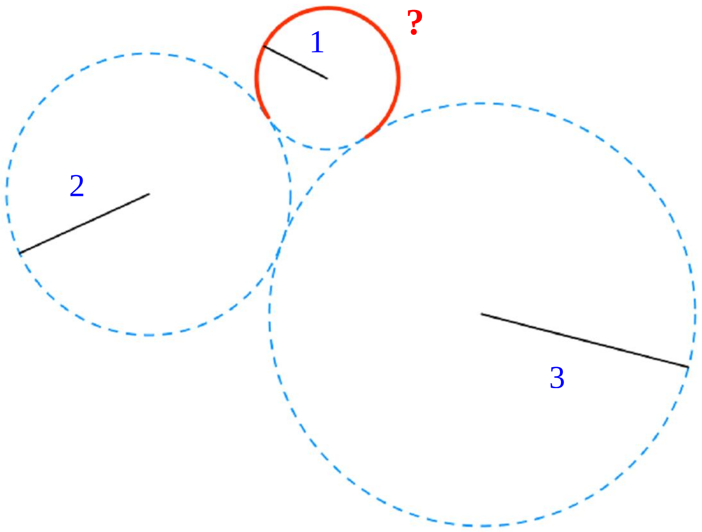
La calculatrice permet de calculer une somme définie à l'aide du Σ :

CASIO GRAPH 35 + :

Menu Math (F4) puis F6 : il s'affiche le symbole Σ.

Bonus

Trois cercles de rayons respectifs 1, 2 et 3 sont tangents extérieurement comme le montre la figure ci-dessous. Combien vaut la longueur du grand arc de cercle en gras sur la figure ?



En joignant les centres des trois cercles, on obtient un triangle dont les longueurs des côtés sont 3, 4, 5.

En utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, on démontre immédiatement que le triangle est rectangle.

L'angle au centre associé au grand arc de cercle a donc pour mesure $\frac{3\pi}{2}$ rad.

Le grand arc a donc pour longueur $\frac{3\pi}{2}\times 1=\frac{3\pi}{2}$.